УДК 517.9

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ НЕАВТОНОМНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Жук А.И.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0;a] \subset R$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t)) \dot{L}^j(t), \ i = \overline{1,p}, \tag{1}$$

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ – липшицевы функции, $x(t) = \left[x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)\right]$, $x_0 \in R^p$, а $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке Т. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$, $j = \overline{1,q}$.

Таким образом, правая часть рассматриваемой системы содержит произведение обобщенных функций, которое однозначно не определено в силу существующей проблемы умножения обобщенных функций, следовательно, рассматриваемая система является некорректной и решение системы уравнений (1) зависит от подхода к трактовке подобного рода систем. Наиболее перспективным из таких подходов является концепция новых обобщенных функций. Согласно этому подходу, заменяем обычные функции в системе дифференциальных уравнений (1) на соответствующие им новые обобщенные функции и получим запись уравнения в дифференциалах в алгебре новых обобщенных функций

$$d_{\tilde{h}}\tilde{x}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \tilde{f}^{ij}\left(\tilde{t}, \tilde{x}(\tilde{t})\right) d_{\tilde{h}}\tilde{L}^j(\tilde{t}), \ i = \overline{1,p} \tag{3}$$

с начальным условием $\tilde{x}\big|_{[0,\tilde{h})} = \tilde{x}^0$, где обобщенные функции $\tilde{f}^{ij}$, $\tilde{L}^j$ ассоциируют функции f^{ij} и L^j соответственно.

Заменим в (3) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (3) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t, x_n(t)) \left[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)\right], \ i = \overline{1,p} \tag{4}$$

с начальным условием $x_n(t)\big|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t)$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка Т. Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_t h_n$, где $\tau_t \in [0, h_n)$, $m_t \in N$. Несложно видеть, что решение системы (4) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^{q} \sum_{k=0}^{m_t - 1} f_n^{ij}(\tau_t + kh_n, x_n(\tau_t + kh_n)) \left[L_n^j(\tau_t + (k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t + kh_n)\right],$$

где $i = \overline{1,p}$.

Таким образом, под решением системы неавтономных дифференциальных уравнений (1) будем понимать ассоциированное решение задачи (3), существование и единственность решения которой доказано в работе [1].

В качестве представителей для уравнения (4) рассмотрим следующие функции:

$$L_n^j(t) = \left(L^j * \rho_n^j\right)(t) = \int_0^{1/\gamma^j(n)} L^j(t+s)\rho_n^j(s)ds, \tag{5}$$

где $\rho_n^j(t) = \gamma^j(n)\rho^j\left(\gamma^j(n)t\right)$, $\rho^j \geq 0$, $supp(\rho^j) \subseteq [0,1]$, $\int_0^1 \rho^j(s)ds = 1$, а $f_n = f * \tilde{\rho}_n$, $\tilde{\rho}_n\left(x_0, x_1, ..., x_p\right) = n^{p+1}\tilde{\rho}\left(nx_0, nx_1, ..., nx_p\right)$, $supp(\tilde{\rho}) \subset [0,1]^{p+1}$, $\tilde{\rho} \in C^\infty\left(R^{p+1}\right)$, $\tilde{\rho} \geq 0$, $\int_{[0,1]^{p+1}} \tilde{\rho}\left(x_0, x_1, ..., x_p\right)dx_0dx_1...dx_p = 1$. Здесь $\gamma^j(n)$ – некоторая монотонная функция.

Будем говорить, что функция $x(t)$ является ассоциированным решением уравнения в дифференциалах (3), если существуют представители новых обобщенных функций $\tilde{f}$, $\tilde{L}$ и x_0, для которых $\tilde{x}$ ассоциирует x в $D'(T)$, т.е. решение задачи (5) $x_n(t)$ сходится в $D'(T)$ к x и $\tilde{x} = \left[\{x_n(t)\}\right] \in \varsigma(\tilde{T})$ (пространство новых обобщенных функций).

Будем говорить, что функция x является I-ассоциированным (*S*-ассоциированным) решением уравнения (3), если она является ассоциированным решением задачи (3) при условии, что $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ $(\gamma^j(n)h_n \to 0)$ и представители функций $\tilde{f}$ и $\tilde{L}$ задаются формулой (5). В этом случае $d_{\tilde{h}}\tilde{L}^j$ будем называть I-ассоциированным (*S*-ассоциированным) коэффициентом.

Для описания предельного поведения решений задачи (4) в случае, когда одни обобщенные коэффициенты являются I-ассоциированными, а другие *S*-ассоциированными, рассмотрим систему интегральных уравнений, существование и единственность решений которой доказано в работе [2].

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^q \int_0^t f^{ij}\left(s, x(s)\right)dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \leq t} S^i\left(\mu_r, x(\mu_r-), \Delta L(\mu_r)\right)\Bigg), \; i = \overline{1,p}, \tag{6}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющие функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$, μ_r – точки разрыва функции $L(t)$, $\Delta L(\mu_r) = L^d(\mu_r+) - L^d(\mu_r-)$ – величина скачка. $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, где $x \in R^p$, $u \in R^q$, $\mu \in T$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^b u^j \int_0^t f^{ij}\left(\mu, \varphi(s-, \mu, x, u)\right)dH(s-1) + \sum_{j=b+1}^q u^j \int_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u))ds\Bigg),$$

где $i = \overline{1,p}$, $H(t)$ – функция Хевисайда. Имеет место следующая теорема.

Теорема 1. Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены, $L^j(t)$ $j = \overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ для $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ и для $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$, ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (6), если $\int_T \left|x_{n0}(\tau_t) - x_0\right|dt \to 0$.

Рассмотрим случай, когда в качестве представителей $\tilde{f}^{ij}$, $\tilde{L}^j$ рассматриваются свертки функций f^{ij}, L^j $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ со стандартными шапочками, т.е. $\gamma^j(n) = n$. Для описания I-ассоциированных решений системы (1) начальны условием (2) необходимо исследовать предельное поведение решений задачи (4) при следующих условиях: $\frac{1}{n} = o(h_n)$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t+} f^{ij}\left(s, x(s-)\right) dL^j(s),\ i = \overline{1,p}, \tag{8}$$

где $i = \overline{1,p}$ и интеграл $\int_u^t f(x)dL(x)$ понимается в смысле Лебега-Стилтьеса.

Теорема 2. Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t), j = \overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда I-ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (8), если $\int_T \left|x_{n0}(\tau_t) - x_0\right| dt \to 0$.

Для описания S-ассоциированных решений рассматриваемой системы необходимо исследовать предельное поведение решений задачи (4) при следующих условиях: $h_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t} f^{ij}\left(s, x(s)) dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)\right),\ i = \overline{1,p}, \tag{9}$$

где $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}\left(\mu, \phi(s, \mu, x, u)\right) ds,\ i = \overline{1,p}.$$

Теорема 3. Пусть f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t), j = \overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда *S*-ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (9), если для любого $t \in T$ выполняется $\left|x_{n0}(\tau_t) - x_0\right| \to 0$.

Список цитированных источников

1. Каримова, Т.И. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов / Т.И. Каримова, О.Л. Яблонский // Вест. Белорус. гос. ун-та. – Серия 1: Физика. Математика. Информатика. – 2009. – №2. – С. 81–86.
2. Миллер, Б.М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович – М.: Наука, 2005. – 429 с.

УДК 517.925

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Завадский А.Ф.

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Юдов А.А., к.физ.-мат.н., доцент

Работа посвящена исследованию свойств подгрупп Ли группы Ли движений четырехмерного евклидова пространства R_4. Для всех подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 находятся все инвариантные подпространства и все инвариантные прямые и k – плоскости.