исследовать предельное поведение решений задачи (4) при следующих условиях: $\frac{1}{n} = o(h_n)$ при $n \to \infty,\ h_n \to 0$. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t+} f^{ij}\left(s, x(s-)\right) dL^j(s),\ i = \overline{1,p}, \tag{8}$$

где $i = \overline{1,p}$ и интеграл $\int_u^t f(x)dL(x)$ понимается в смысле Лебега-Стилтьеса.

Теорема 2. Пусть $f^{ij}\ i = \overline{1,p},\ j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t), j = \overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда I-ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (8), если $\int_T \left|x_{n0}(\tau_t) - x_0\right| dt \to 0$.

Для описания S-ассоциированных решений рассматриваемой системы необходимо исследовать предельное поведение решений задачи (4) при следующих условиях: $h_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$ при $n \to \infty,\ h_n \to 0$. Для этого рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int_0^{t} f^{ij}\left(s, x(s))dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r -), \Delta L(\mu_r)\right),\ i = \overline{1,p}, \tag{9}$$

где $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{q} u^j \int_0^t f^{ij}\left(\mu, \phi(s, \mu, x, u)\right) ds,\ i = \overline{1,p}.$$

Теорема 3. Пусть $f^{ij}\ i = \overline{1,p},\ j = \overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены. $L^j(t), j = \overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда *S*-ассоциированное решение задачи Коши (3) является решением системы уравнений (9), если для любого $t \in T$ выполняется $\left|x_{n0}(\tau_t) - x_0\right| \to 0$.

Список цитированных источников

1. Каримова, Т.И. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов / Т.И. Каримова, О.Л. Яблонский // Вест. Белорус. гос. ун-та. – Серия 1: Физика. Математика. Информатика. – 2009. – №2. – С. 81–86.
2. Миллер, Б.М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович – М.: Наука, 2005. – 429 с.

УДК 517.925

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Завадский А.Ф.

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Юдов А.А., к.физ.-мат.н., доцент

Работа посвящена исследованию свойств подгрупп Ли группы Ли движений четырехмерного евклидова пространства R_4. Для всех подгрупп Ли группы Ли вращений пространства R_4 находятся все инвариантные подпространства и все инвариантные прямые и $k-$плоскости.

Одной из важных задач геометрии является задача исследования подгрупп Ли преобразований различных пространств. Особое место в ряду этих исследований занимает задача изучения подгрупп Ли групп Ли движений различных (псевдо)евклидовых пространств. Значимость этой задачи вытекает из того, что геометрия (псевдо)евклидовых пространств находит широкое применение в различных разделах математики и теоретической физики. Исследованиями в этом направлении занимались А.С. Феденко, И.В. Белько, В.Г. Копп, Р.Ф. Билялов, А.А. Юдов и другие. В данной работе исследуется группа Ли движений четырехмерного евклидова пространства.

Рассмотрим четырехмерное евклидово пространство, т.е. пространство R_4. Пусть G – группа Ли движений пространства R_4, H – группа Ли вращений пространства R_4, $\overline{G}$ – алгебра Ли группы Ли G, $\overline{H}$ – алгебра Ли группы Ли H.

Рассмотрим в пространстве R_4 ортонормированный базис $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, т.е.

$$\overline{e_1^2} = \overline{e_2^2} = \overline{e_3^2} = \overline{e_4^2} = 1, \left(\overline{e_i} = \overline{e_j}\right) = 0, i \neq j.$$

Выберем в алгебре Ли $\overline{G}$ базис:

$$i_1 = E_{21}, i_2 = E_{31}, i_3 = E_{41}, i_4 = E_{51}, i_5 = E_{23} - E_{32}, i_6 = E_{24} - E_{42},$$
$$i_8 = E_{34} - E_{43}, i_9 = E_{35} - E_{53}, i_{10} = E_{45} - E_{54},$$

где $E_{\alpha\beta} - (5 \times 5) -$ матрицы, у которых в α – й строке, β – м столбце стоит 1, а остальные элементы нули. При этом вектора i_1, i_2, i_3, i_4 задают базис алгебры Ли группы Ли параллельных переносов, а вектора $i_5, i_6, i_7, i_8, i_9, i_{10}$ задают базис алгебры Ли $\overline{H}$ группы Ли H вращений пространства R_4.

Группа Ли G является полупрямым произведением группы Ли H вращений пространства R_4 и группы T_4 параллельных переносов этого пространства: $G = H * T_4$. Алгебра Ли $\overline{G}$ является прямой суммой алгебр Ли $\overline{H}$ и τ_4, где τ_4 алгебра Ли группы Ли $T_4 : \overline{G} = \overline{H} \oplus \tau_4$. Для векторов пространства $\overline{H}$ определяется операция $[a, b]$ – коммутирование, а сам результат называется коммутатором. Операция коммутирования в алгебре Ли $\overline{G}$ определяется по правилу $[A, B] = AB - BA$. Чтобы вектор a с координатами $\{a_1, a_2, a_3, a_4\}$ был инвариантен относительно подгруппы Ли G_i с алгеброй Ли $\overline{G}_i$ необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие $a \cdot c = \lambda \cdot c$, где c – любое из $\overline{G}_i$. В частности, вместо c достаточно брать вектора базиса $\overline{G}_i$.

Чтобы подпространство $\{a, b\}$ было инвариантно относительно подгруппы G_i необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия:

$$a \cdot c = \lambda \cdot a + \mu \cdot b,$$
$$b \cdot c = \nu \cdot a + \sigma \cdot b.$$

В данной работе находятся инвариантные одномерные и двумерные подпространства групп Ли $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$ соответствующие алгебрам Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6$. Все подгруппы Ли группы Ли G классифицированы. Всего существует с точностью до сопряженности 6 подгрупп Ли группы Ли H вращений: $G_1, G_2, G_3, G_4, G_5, G_6$, которым соответствуют алгебры Ли $\overline{G}_1, \overline{G}_2, \overline{G}_3, \overline{G}_4, \overline{G}_5, \overline{G}_6$, задаваемые соответственно векторами $\{i_5\}, \{i_5 + \omega i_{10}\}, \{i_5, i_{10}\}, \{i_8, i_9, i_{10}\}, \{i_5 - i_7, i_8 - i_{10}, i_6 - \lambda i_9\}, \{i_5, i_{10}, i_6 + i_9, i_7 - i_8\}$.

Рассмотрим группу G_1. Найдем одномерные инвариантные подпространства.

Условие инвариантности имеет вид:

$$a \cdot i_5 = (a_1, a_2, a_3, a_4) \cdot i_5 = (-a_2, a_1, 0, 0) = \mu \cdot a.$$

Отсюда следует система

$$\begin{cases} -a_2 = \mu a_1, \\ a_1 = \mu a_2, \\ 0 = \mu a_3, \\ 0 = \mu a_4 \end{cases}$$

Решив данную систему, можно сделать вывод, что при $\mu = 0$ инвариантное подмножество имеет вид: $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$.

При $\mu \neq 0$ решений нет.

Рассмотрим двумерные инвариантные подпространства.

Система инвариантности имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot i_5 = \lambda \cdot a + \mu \cdot b \\ b \cdot i_5 = \nu \cdot a + \sigma \cdot b \end{cases}.$$

Для решения данной системы достаточно рассмотреть 6 случаев:

$$1^0 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & \alpha & \beta \\ 0 & 1 & \gamma & \delta \end{pmatrix}, 2^0 : \begin{pmatrix} 1 & \alpha & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 1 & \gamma \end{pmatrix},$$

$$3^0 : \begin{pmatrix} 1 & \alpha & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 4^0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & \beta \end{pmatrix},$$

$$5^0 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, 6^0 : \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим случай 1^0. Получим систему:

$$\begin{cases} 0 = \lambda \cdot 1 + \mu \cdot 0 & -1 = \nu \cdot 1 + \sigma \cdot 0 \\ 1 = \lambda \cdot 0 + \mu \cdot 1 & 0 = \nu \cdot 0 + \sigma \cdot 1 \\ 0 = \lambda \cdot \alpha + \mu \cdot \gamma & 0 = \nu \cdot \alpha + \sigma \cdot \gamma \\ 0 = \lambda \cdot \beta + \mu \cdot \delta & 0 = \nu \cdot \beta + \sigma \cdot \delta \end{cases}$$

Решая данную систему получим, что инвариантным двумерным подпространством для случая 1^0 является $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$. Аналогичным способом находим двумерные инварианты для остальных случаев.

Трехмерными инвариантными подпространствами для группы Ли G_1 являются подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -\mu\overline{e_3} + \lambda\overline{e_4}\}$, которые являются ортогональным дополнением к одномерным подпространствам $\{\lambda\overline{e_3} + \mu\overline{e_4}\}$.

Решая таким же образом группы алгебры Ли $G_2 - G_6$ таким же способом так же приходим к определенным результатам.

Полученные результаты сформулируем в виде теорем.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны только одномерные подпространства $\{\lambda \bar{e}_3 + \mu \bar{e}_4\}$, двумерные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$ и следующие трехмерные подпространства $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}, -\mu\overline{e_3} + \lambda\overline{e_4}\}$.

Теорема 2. Относительно группы G_2 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\{\overline{e_1} + \lambda\overline{e_3} + \mu\overline{e_4}, \overline{e_2} + \mu\overline{e_3} - \lambda\overline{e_4}\}$ $\{\overline{e_1}, \overline{e_2}\}$и $\{\overline{e_3}, \overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 3. Относительно группы G_3 нет инвариантных одномерных подпространств, двумерные подпространства $\{\overline{e_1},\overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3},\overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Теорема 4. Относительно группы G_4 инвариантны только одномерные подпространства $\{\overline{e_1}\}$, инвариантных двумерных и трехмерных подпространств не существует.

Теорема 5. Относительно группы G_5 нет инвариантных одномерных, двумерных и трехмерных.

Теорема 6. Относительно группы G_6 нет одномерных инвариантных подпространств, двумерные подпространства $\{\overline{e_1},\overline{e_2}\}$ и $\{\overline{e_3},\overline{e_4}\}$, трехмерных инвариантных подпространств не существует.

Список цитированных источников

1. Зубей, Е.В. Геометрические характеристики связных подгрупп Ли группы Ли вращений пространства Минковского / Е.В. Зубей, А.А. Юдов // Вестник БрГУ. – 2014. – №1. – С. 52–59.
2. Юдов, А.А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движения пространства R_4^2 / А.А. Юдов, Е.Е. Гурская // Вестник БрГУ. – 2008. №1(30). – С. 35–41.

УДК 519.711.3

МЕТОД ЭКСПЕРТНЫХ ОЦЕНОК В ИЗМЕРЕНИИ И АНАЛИЗЕ УРОВНЕЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ МАРКЕТИНГОВОЙ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ ОРГАНИЗАЦИИ

Зацепина Е.В., Гарчук И.М.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Высоцкий О.А., д.э.н., профессор

Математические методы обработки информации являются важнейшим инструментом анализа экономических явлений и процессов, построения теоретических моделей, позволяющих отобразить существующие связи в экономической жизни, прогнозировать поведение экономических субъектов и экономическую динамику.

При определении стартовых значений уровней управляемости специальной функции управления маркетинговой деятельностью организации посредством проведения экспресс-диагностики общих функций управления часто возникают проблемы дефицита достоверной информации. В этих условиях, бесспорно, для сбора необходимой информации следует опираться на опыт, знания и интуицию опытного персонала, специалистов, то есть необходимо использовать методы экспертных оценок – методы организации работы со специалистами-экспертами, обработки мнений экспертов, выраженных в количественной и/или качественной форме с целью разработки математического описания и моделей исследуемого объекта или подготовки информации для принятия решений представителями высшего и среднего звеньев управления [1].

Рассмотрим основные результаты проведения экспертных оценок с использованием математических методов для их анализа с целью построения динамики развития управляемости функции маркетинга на одном из предприятий Брестского региона ПКУПП «Коммунальник». Определение начальных условий, называемых стартовыми, связано с оценкой уровней управляемости общих функций управления, образующих поле управляемости маркетинговой деятельностью в стартовый момент времени t_0. Стартовые условия уровней управляемости общих функций управления определяют проблемы и задачи, возникающие при совершенствовании процессов управления маркетинговой деятельностью с целью развития рынка дополнительных платных услуг населению. Далее можно разработать программу действий, необходимых для улучшения ситуации и решения актуальных задач деятельности предприятия [1].