УДК 004.42:51

ОПРЕДЕЛЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТОВ КУБИЧЕСКИХ СПЛАЙНОВ В MATHCAD

Кофанов В.А., Хомицкая Т.Г.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

Очень часто при замене дискретных данных (*X*, *Y*) функцией, вид которой априори неизвестен, применяют метод интерполяции кубическими сплайнами. В системе компьютерной математики MathCAD для реализации этого метода используют встроенные функции: *lspline*, *pspline* и *cspline*, отличительные особенности которых друг от друга рассмотрены нами в работе [1]. В данной статье рассмотрим алгоритм определения коэффициентов кубических сплайнов, заложенный в указанные встроенные сплайн-функции в MathCAD.

Суть метода сплайн-интерполяции заключается в том, что на каждом частичном отрезке между соседними точками необходимо подобрать такие коэффициенты кубического полинома, чтобы в каждой точке (*X*, *Y*) обеспечивалась неразрывность функции *f*(*x*), ее первой и второй производной. В MathCAD осуществить такого рода подбор можно путем решения системы уравнений.

$$\begin{cases} f(X_i) = Y_i; & \text{n уравнений} & (1а) \\ f(X_j)\big|_{x_j-0} = f(X_j)\big|_{x_j+0}; & \text{(n-2) уравнений} & (1б) \\ f'(X_j)\big|_{x_j-0} = f'(X_j)\big|_{x_j+0}; & \text{(n-2) уравнений} & (1в) \\ f''(X_j)\big|_{x_j-0} = f''(X_j)\big|_{x_j+0}. & \text{(n-2) уравнений} & (1г) \\ i = 1..n;\ j = 2..(n-1) \end{cases}$$

где *n* – общее количество точек.

Исходя из сути метода, количество уравнений, чаще всего, будет равно (*m*-2)=4·*n*-6, где *m* – количество неизвестных коэффициентов кусочно-кубического полинома. В связи с этим количество решений такой системы уравнений будет бесконечное множество.

Получить два недостающих уравнения можно путем добавления двух дополнительных ограничений. Ограничения могут быть различного рода:

- известно точное значение первой производной функции *f*(*x*) в первой и последней точках (фундаментальный сплайн);
- значение второй производной функции *f*(*x*) в первой и последней точках равно нулю (естественный сплайн);
- представить первый и последний частичный отрезок сплайна полиномом второй степени (параболой);
- представить первые и последние два частичных отрезка сплайна одним кубическим полиномом;
- задать периодические граничные условия.

MathCAD предоставляет возможность использовать три типа таких ограничений, которые заложены в работу трех встроенных сплайн-функций.

Встроенная функция *lspline* подразумевает следующие дополнительные ограничения: вторая производная функции *f*(*x*) равна нулю в первой и последней точках.

$$\begin{cases} f''(X_1) = 0; \qquad f''(X_n) = 0. \end{cases} \qquad (2)$$

В этом случае система уравнений с учетом (1) и (2) в MathCAD при n=5 будет такой, как показано на рисунке 1. Решим эту систему уравнений и отобразим на графике (рисунок 2) все найденные функции кусочно-кубических полиномов, а также функцию, полученную с помощью *lspline*.

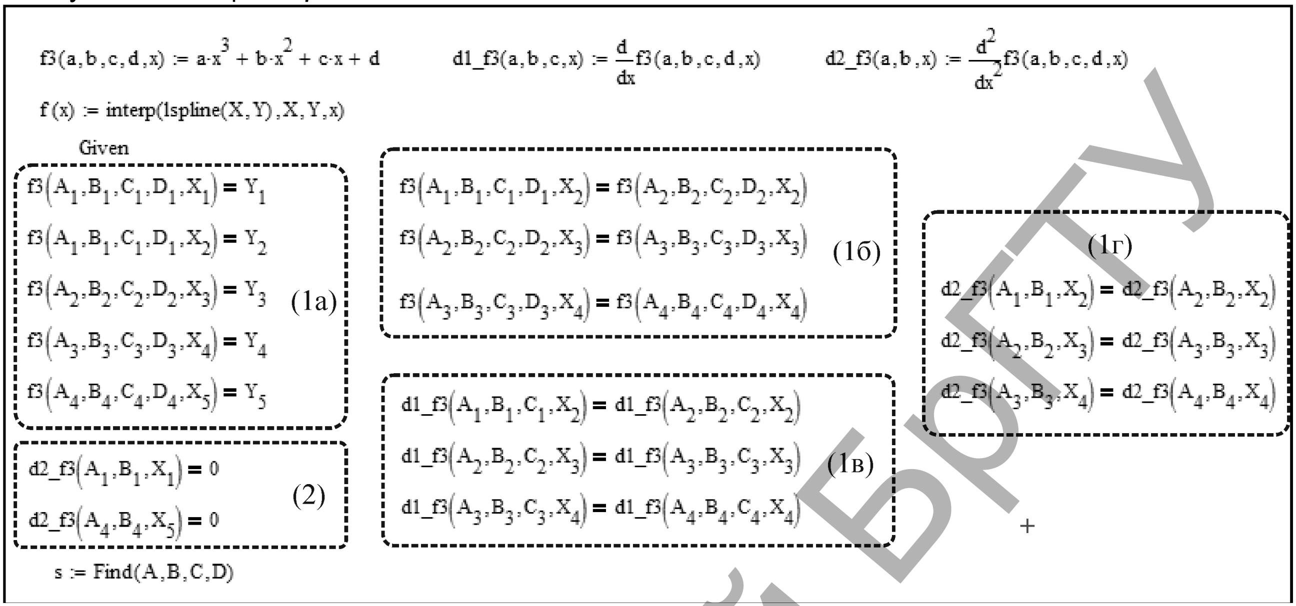

Рисунок 1 – Система уравнений в MathPAD для определения коэффициентов кусочно-кубических полиномов, составляющих функцию lspline при n=5

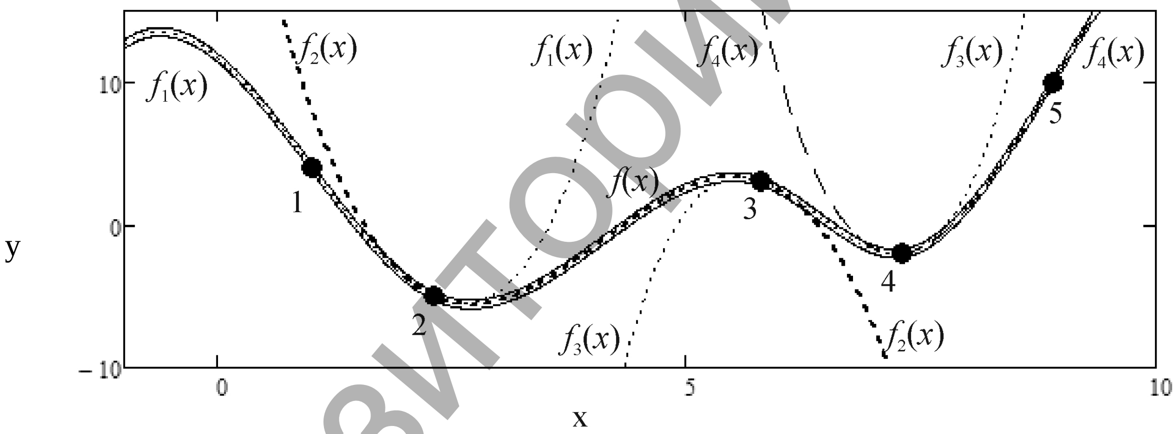

Рисунок 2 – График сплайн-интерполяции по функции lspline (при n=5) и составляющих его кубических полиномов

Из графика на рисунке 2 видно, что на всех частичных отрезках найденная с помощью *lspline* сплайн-функция $f(x)$ действительно описывается кубическими полиномами $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$ и $f_4(x)$. В первой и последней точках у функции $f(x)$ наблюдается перегиб, который наиболее ярко можно увидеть, построив график ее второй производной.

Встроенная функция *cspline* подразумевает следующие дополнительные ограничения: кубические полиномы на первом и втором частичных отрезках одинаковы, а также одинаковы на последнем и предпоследнем. Отмеченные ограничения исключают из системы уравнений (1) уравнения (1б), (1в), (1г) для второй и предпоследней точек, т.е. количество уравнений в системе (1) уменьшится на 6 ((m-2)-6), а количество неизвестных – на 8 (m-8), тем самым уровняв количество уравнений в системе и количество неизвестных.

Решая полученную систему уравнений при n=5 (рисунок 3), находим коэффициенты кусочно-кубических полиномов $f_1(x)$ и $f_2(x)$, которые покажем на рисунке 4 вместе с кубическим сплайном $f(x)$, определенным с помощью встроенной функции *cspline*.

```
f(x) := interp(cspline(X,Y),X,Y,x)
   Given
f3(A1,B1,C1,D1,X1) = Y1    f3(A2,B2,C2,D2,X4) = Y4
f3(A1,B1,C1,D1,X2) = Y2    f3(A2,B2,C2,D2,X5) = Y5
f3(A1,B1,C1,D1,X3) = Y3              (1а)

f3(A1,B1,C1,D1,X3) = f3(A2,B2,C2,D2,X3)      (1б)
d1_f3(A1,B1,C1,X3) = d1_f3(A2,B2,C2,X3)      (1в)
d2_f3(A1,B1,X3) = d2_f3(A2,B2,X3)            (1г)

s := Find(A,B,C,D)
```

Рисунок 3 – Система уравнений в MathPAD для определения коэффициентов кусочно-кубических полиномов, составляющих функцию cspline при n=5

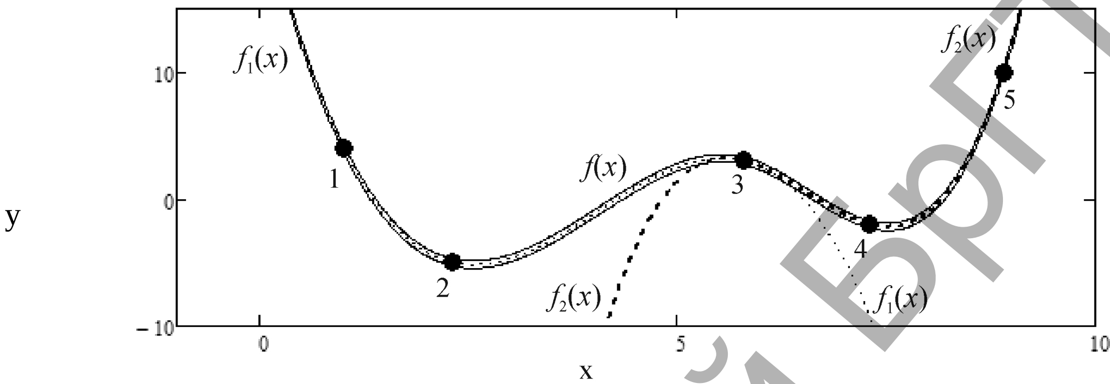

Рисунок 4 – График сплайн-интерполяции по функции cspline (при n=5) и составляющих его кубических полиномов

Из графика на рисунке 4 видно, что на первых двух частичных отрезках найденная сплайн-функция $f(x)$ описывается одним и тем же кубическим полиномом $f_1(x)$. Аналогичное поведение наблюдается и на последних двух частичных отрезках, описываемых кубическим полиномом $f_2(x)$.

Пользователь MathCAD полагает, что, используя любую встроенную сплайн-функцию, он на каждом частичном отрезке получает функцию кубического полинома. Это не совсем так.

Встроенная функция *pspline* подразумевает, что на первом и последнем отрезках функция $f(x)$ описывается полиномом второй степени – параболой. В результате чего уменьшается количество неизвестных на 2 (m-2) и система уравнений (1) (рисунок 5) имеет одно единственное решение (рисунок 6).

```
f3(a,b,c,d,x) := a·x^3 + b·x^2 + c·x + d   d1_f3(a,b,c,x) := d/dx f3(a,b,c,d,x)   d2_f3(a,b,x) := d^2/dx^2 f3(a,b,c,d,x)
f2(a,b,c,x) := a·x^2 + b·x + c             d1_f2(a,b,x) := d/dx f2(a,b,c,x)       d2_f2(a,x) := d^2/dx^2 f2(a,b,c,x)
f(x) := interp(pspline(X,Y),X,Y,x)
   Given
f2(A1,B1,C1,X1) = Y1
f2(A1,B1,C1,X2) = Y2
f3(A2,B2,C2,D2,X3) = Y3   (1а)
f3(A3,B3,C3,D3,X4) = Y4
f2(A4,B4,C4,X5) = Y5

f2(A1,B1,C1,X2) = f3(A2,B2,C2,D2,X2)
f3(A2,B2,C2,D2,X3) = f3(A3,B3,C3,D3,X3)   (1б)
f3(A3,B3,C3,D3,X4) = f2(A4,B4,C4,X4)

d1_f2(A1,B1,X2) = d1_f3(A2,B2,C2,X2)
d1_f3(A2,B2,C2,X3) = d1_f3(A3,B3,C3,X3)   (1в)
d1_f3(A3,B3,C3,X4) = d1_f2(A4,B4,X4)

(1г)
d2_f2(A1,X2) = d2_f3(A2,B2,X2)
d2_f3(A2,B2,X3) = d2_f3(A3,B3,X3)
d2_f3(A3,B3,X4) = d2_f2(A4,X4)

s := Find(A,B,C,D)
```

Рисунок 5 – Система уравнений в MathPAD для определения коэффициентов кусочно-кубических полиномов, составляющих функцию pspline при n=5

Из графика на рисунке 6 видно, что сплайн-функция $f(x)$ на первом и последнем частичных отрезках действительно описывается параболой $f_1(x)$ и $f_4(x)$, а на остальных внутренних частичных отрезках – кубическим полиномом $f_2(x)$ и $f_3(x)$.

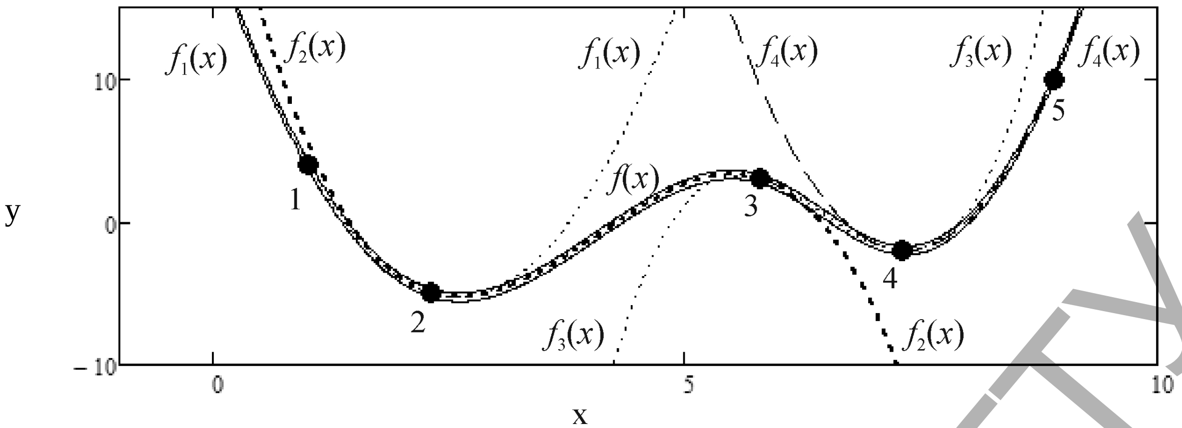

Рисунок 6 – График сплайн-интерполяции по функции pspline (при n=5) и составляющих его кубических полиномов

Показанные в работе примеры раскрывают пользователю MathCAD механизм работы встроенных сплайн-функций. Используя эту информацию при выполнении интерполяции дискретных данных, можно делать осознанный выбор в пользу той или иной функции.

Как было отмечено выше, встроенные сплайн-функции в MathCAD не могут охватить всего многообразия дополнительных ограничений, приводящих систему уравнений (1) к единственному решению. В этом случае можно использовать в MathCAD блок поиска решения системы уравнений Given..find, демонстрация которого подробно показана на рисунках 1, 3 и 5.

Список цитированных источников

1. Кофанов, В.А. Аппроксимация кубическим сплайном в MathCAD / В.А. Кофанов, Т.Г. Хомицкая // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 15–16 окт. 2014 г. / БрГУ имени А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2014. – С. 105–106.

УДК 519.65

О ПОГРЕШНОСТИ ЭРМИТОВА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ПО СИСТЕМАМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Кучейко О.В.
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Худяков А.П., к.физ.-мат.н.

В [1] построен обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа степени $n+1$ вида

$$\widetilde{L}_{n+1}(t) = L_n(t) + \frac{\omega_n(t)(t_j + c_{n+1})^{n+2}\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)}{q_{n+1}(t)(n+1)!\delta_n}, \tag{1}$$

где $L_n(t) = \dfrac{1}{q_n(t)}\sum\limits_{k=0}^{n}\dfrac{\omega_n(t)q_n(t_k)}{\omega_n'(t_k)(t-t_k)}f(t_k),$ $\qquad q_n(t) = (t+c_0)(t+c_1)\cdots(t+c_n),$

$\omega_n(t) = (t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_n),$ $\qquad \delta_n = (t_0+c_{n+1})(t_1+c_{n+1})\cdots(t_n+c_{n+1}).$ Здесь $\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)$ – значение дифференциального оператора вида

$$\widehat{L}_{n+1}f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}[q_n(t)f(t)], \tag{2}$$

а $0 \le c_0 < c_1 < \ldots < c_n$ – некоторые неотрицательные действительные числа. Многочлен (1) удовлетворяет интерполяционным условиям вида