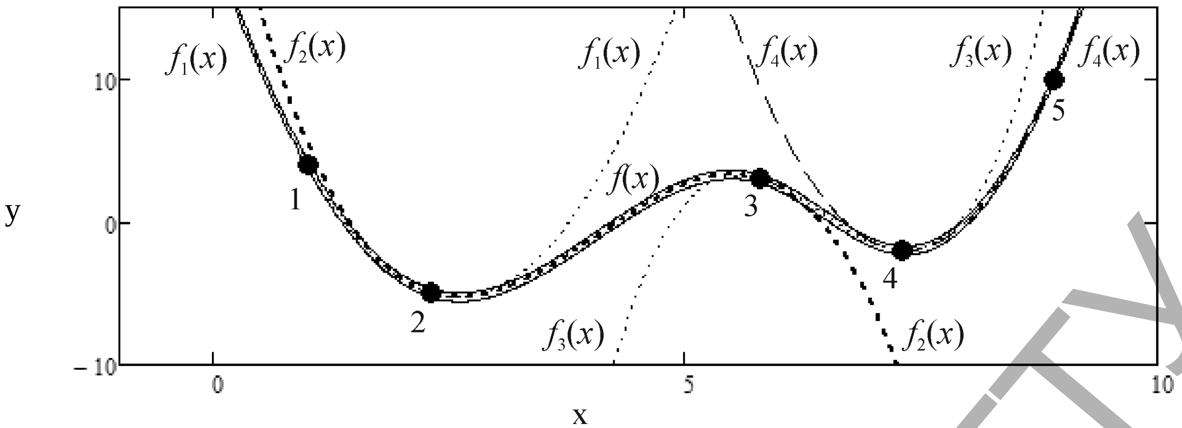

Рисунок 6 – График сплайн-интерполяции по функции pspline (при n=5) и составляющих его кубических полиномов

Показанные в работе примеры раскрывают пользователю MathCAD механизм работы встроенных сплайн-функций. Используя эту информацию при выполнении интерполяции дискретных данных, можно делать осознанный выбор в пользу той или иной функции.

Как было отмечено выше, встроенные сплайн-функции в MathCAD не могут охватить всего многообразия дополнительных ограничений, приводящих систему уравнений (1) к единственному решению. В этом случае можно использовать в MathCAD блок поиска решения системы уравнений Given..find, демонстрация которого подробно показана на рисунках 1, 3 и 5.

Список цитированных источников

1. Кофанов, В.А. Аппроксимация кубическим сплайном в MathCAD / В.А. Кофанов, Т.Г. Хомицкая // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : материалы Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 15–16 окт. 2014 г. / БрГУ имени А.С. Пушкина; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2014. – С. 105–106.

УДК 519.65

О ПОГРЕШНОСТИ ЭРМИТОВА ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ ПО СИСТЕМАМ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

Кучейко О.В.

Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Худяков А.П., к.физ.-мат.н.

В [1] построен обобщенный интерполяционный многочлен Эрмита – Биркгофа степени $n+1$ вида

$$\widetilde{L}_{n+1}(t) = L_n(t) + \frac{\omega_n(t)(t_j + c_{n+1})^{n+2}\,\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)}{q_{n+1}(t)(n+1)!\,\delta_n}, \tag{1}$$

где $L_n(t) = \dfrac{1}{q_n(t)}\sum_{k=0}^{n}\dfrac{\omega_n(t)q_n(t_k)}{\omega_n'(t_k)(t-t_k)}f(t_k)$, $\quad q_n(t) = (t+c_0)(t+c_1)\cdots(t+c_n)$,

$\omega_n(t) = (t-t_0)(t-t_1)\cdots(t-t_n)$, $\quad \delta_n = (t_0+c_{n+1})(t_1+c_{n+1})\cdots(t_n+c_{n+1})$. Здесь $\widehat{L}_{n+1}(f;t_j)$ – значение дифференциального оператора вида

$$\widehat{L}_{n+1}f(t) = \frac{d^{n+1}}{dt^{n+1}}[q_n(t)f(t)], \tag{2}$$

а $0 \le c_0 < c_1 < \ldots < c_n$ – некоторые неотрицательные действительные числа. Многочлен (1) удовлетворяет интерполяционным условиям вида

$$\widetilde{L}_{n+1}(t_i) = f(t_i) \quad \left(i = \overline{0,n}\right); \quad \widehat{L}_{n+1}\left(\widetilde{L}_{n+1}; t_j\right) = \widehat{L}_{n+1}(f; t_j). \tag{3}$$

Лемма. *Пусть* $(n+1)$*-непрерывно-дифференцируемая на отрезке* $[a,b]$ *функция* $f(t)$ *имеет на этом промежутке* $n+2$ *нулей. Тогда на отрезке* $[a,b]$ *найдется такая точка* ξ, *что функция* $\widehat{L}_{n+1}(f;t)$, *входящая в интерполяционную формулу* (1), *обращается в нуль в этой точке.*

Введем обозначения: $B_n = (a+c_0)(a+c_1)\cdots(a+c_n)$, $M_{n+1} = \max\limits_{\theta\in[a,b]} \widehat{L}_{n+1}(f;\theta)$.

Теорема. *Оценка погрешности формулы* (1) *для любого* $t \in [a,b]$ *имеет вид:*

$$\left| f(t) - \widetilde{L}_{n+1}(t) \right| \le \frac{(b-a)^{n+1} M_{n+1}}{B_n\,(n+1)!} \left[1 + \frac{(t_j + c_{n+1})^{n+2}}{(a+c_{n+1})\delta_n} \right]. \tag{4}$$

Пример. Пусть $f(t) = e^{\frac{1}{t+2}}$. Рассмотрим частные случаи формулы (1) при $n = 1, 2, 3$, соответственно, с узлами $t_k^n = -1 + 2k/n$, $t_j^n = t^n_{\lfloor (n+1)/2 \rfloor}$, где $\lfloor (n+1)/2 \rfloor$ – целая часть числа $\dfrac{n+1}{2}$ $\left(k = \overline{0,n};\ n = 1,2,3\right)$. Интерполяционные многочлены в данном случае примут вид

$$\widetilde{L}_2(t) = \frac{12{,}70}{t+2} - \frac{63{,}04}{t+3} + \frac{64{,}61}{t+4}, \quad \widetilde{L}_3(t) = \frac{2{,}685}{t+2} + \frac{19{,}01}{t+3} - \frac{92{,}82}{t+4} + \frac{85{,}87}{t+5},$$

$$\widetilde{L}_4(t) = \frac{7{,}8841}{t+2} - \frac{98{,}572}{t+3} + \frac{477{,}09}{t+4} - \frac{845{,}96}{t+5} + \frac{482{,}91}{t+6}.$$

Точность приближения функции $f(t)$ данными многочленами иллюстрируется на графике (рис. 1). Сплошная линия – график этой функции, штриховая – $\widetilde{L}_2(t)$, штрихпунктирная – $\widetilde{L}_3(t)$, пунктирной – $\widetilde{L}_4(t)$.

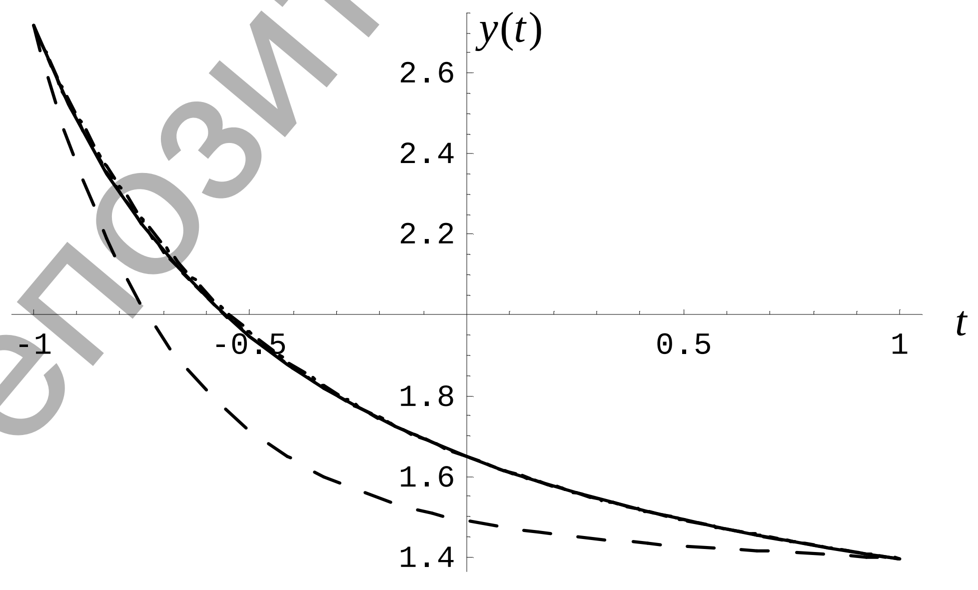

***Рисунок 1 – Точность приближения функции** $f(t)$*

Интерполяционные многочлены $\widetilde{L}_3(t)$ и $\widetilde{L}_4(t)$ достаточно точно описывают поведение функции $f(t)$ на отрезке $[-1,1]$. Нормы невязок между функцией $f(t)$ и интерполяционными многочленами $\widetilde{L}_2(t)$, $\widetilde{L}_3(t)$ и $\widetilde{L}_4(t)$, равны

$$\left\| f(t)-\widetilde{L}_2(t)\right\|_{C[-1,1]} = \max_{t\in[-1,1]}\left| f(t)-\widetilde{L}_2(t)\right| = 0{,}236748;$$

$$\left\| f(t)-\widetilde{L}_3(t)\right\|_{C[-1,1]} = 0{,}0171394; \quad \left\| f(t)-\widetilde{L}_4(t)\right\|_{C[-1,1]} = 0{,}00101163.$$

В данном случае с увеличением степени интерполяционного полинома вида (1) точность приближения повышается более чем на один порядок.

УДК 519.2:004.6

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОНА ПУАССОНА И НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Липовцев А.П., Гладкий И.И., Каримова Т.И.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Махнист Л.П., к.т.н., доцент

Пуассона распределение – распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями $P(X = k) = p_k = e^{-\lambda}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, где $\lambda > 0$ – параметр.

Функция распределения закона Пуассона: $F(x) = P(X < x) = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{\lceil x\rceil - 1}\dfrac{\lambda^k}{k!}$, если $x > 0$, где $\lceil x\rceil$ – наименьшее целое, большее или равное x: $\lceil x\rceil = \min\{n \in Z \mid n \ge x\}$).

Рассмотрим функцию $F(m+1,\lambda) = 1 - \dfrac{\gamma(m+1,\lambda)}{m!} = 1 - \dfrac{1}{m!}\int\limits_0^\lambda t^m e^{-t}dt$, где $\gamma(m,\lambda) = \int\limits_0^\lambda t^{m-1}e^{-t}dt$ – неполная нижняя гамма-функция (например, в [1]).

Заметим, что $F(1,\lambda) = 1 - \dfrac{1}{0!}\int\limits_0^\lambda t^0 e^{-t}dt = 1 - \int\limits_0^\lambda e^{-t}dt = 1 + e^{-t}\Big|_0^\lambda = e^{-\lambda} = p_0$.

Используя метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим

$$F(m+1,\lambda) = 1 - \frac{1}{m!}\int_0^\lambda t^m e^{-t}dt = 1 + \frac{1}{m!}\int_0^\lambda t^m de^{-t} = 1 + \frac{1}{m!}\left(t^m e^{-t}\Big|_0^\lambda - \int_0^\lambda e^{-t}dt^m \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{m!}\left(\lambda^m e^{-\lambda} - m\int_0^\lambda e^{-t}t^{m-1}dt \right) = 1 + \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} - \frac{1}{(m-1)!}\int_0^\lambda e^{-t}t^{m-1}dt =$$

$$= e^{-\lambda}\frac{\lambda^m}{m!} + F(m,\lambda) = p_m + F(m,\lambda) = \ldots = \sum_{k=1}^m p_k + F(1,\lambda) = \sum_{k=0}^m p_k.$$

Следовательно, функцию распределения $F(x)$ можно определить следующим образом: $F(x) = P(X < x) = \sum\limits_{k=0}^{\lceil x\rceil - 1} p_k = F(\lceil x\rceil,\lambda) = 1 - \dfrac{1}{(\lceil x\rceil - 1)!}\int\limits_0^\lambda t^{\lceil x\rceil - 1}e^{-t}dt$, если $x > 0$.

Рассмотрим числовые последовательности $x_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^m \dfrac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m}\sum\limits_{k=0}^{m-1}\dfrac{m^k}{k!}$.