$$\left\| f(t) - \tilde{L}_2(t) \right\|_{C[-1,1]} = \max_{t \in [-1,1]} \left| f(t) - \tilde{L}_2(t) \right| = 0{,}236748;$$

$$\left\| f(t) - \tilde{L}_3(t) \right\|_{C[-1,1]} = 0{,}0171394; \quad \left\| f(t) - \tilde{L}_4(t) \right\|_{C[-1,1]} = 0{,}00101163.$$

В данном случае с увеличением степени интерполяционного полинома вида (1) точность приближения повышается более чем на один порядок.

УДК 519.2:004.6

О ФУНКЦИИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ЗАКОНА ПУАССОНА И НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Липовцев А.П., Гладкий И.И., Каримова Т.И.
Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Махнист Л.П., к.т.н., доцент

Пуассона распределение - распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями $P(X = k) = p_k = e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, где $\lambda > 0$ - параметр.

Функция распределения закона Пуассона: $F(x) = P(X < x) = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\lceil x \rceil - 1} \dfrac{\lambda^k}{k!}$, если $x > 0$, где $\lceil x \rceil$ - наименьшее целое, большее или равное x: $\lceil x \rceil = \min\{n \in Z \mid n \geq x\}$).

Рассмотрим функцию $F(m+1, \lambda) = 1 - \dfrac{\gamma(m+1, \lambda)}{m!} = 1 - \dfrac{1}{m!} \int_0^\lambda t^m e^{-t} dt$, где $\gamma(m, \lambda) = \int_0^\lambda t^{m-1} e^{-t} dt$ - неполная нижняя гамма-функция (например, в [1]).

Заметим, что $F(1, \lambda) = 1 - \dfrac{1}{0!} \int_0^\lambda t^0 e^{-t} dt = 1 - \int_0^\lambda e^{-t} dt = 1 + e^{-t} \Big|_0^\lambda = e^{-\lambda} = p_0$.

Используя метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим

$$F(m+1, \lambda) = 1 - \frac{1}{m!} \int_0^\lambda t^m e^{-t} dt = 1 + \frac{1}{m!} \int_0^\lambda t^m de^{-t} = 1 + \frac{1}{m!} \left(t^m e^{-t} \Big|_0^\lambda - \int_0^\lambda e^{-t} dt^m \right) =$$

$$= 1 + \frac{1}{m!} \left(\lambda^m e^{-\lambda} - m \int_0^\lambda e^{-t} t^{m-1} dt \right) = 1 + \frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} - \frac{1}{(m-1)!} \int_0^\lambda e^{-t} t^{m-1} dt =$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^m}{m!} + F(m, \lambda) = p_m + F(m, \lambda) = \ldots = \sum_{k=1}^m p_k + F(1, \lambda) = \sum_{k=0}^m p_k.$$

Следовательно, функцию распределения $F(x)$ можно определить следующим образом: $F(x) = P(X < x) = \sum_{k=0}^{\lceil x \rceil - 1} p_k = F(\lceil x \rceil, \lambda) = 1 - \dfrac{1}{(\lceil x \rceil - 1)!} \int_0^\lambda t^{\lceil x \rceil - 1} e^{-t} dt$, если $x > 0$.

Рассмотрим числовые последовательности $x_m = e^{-m} \sum_{k=0}^m \dfrac{m^k}{k!}$ и $y_m = e^{-m} \sum_{k=0}^{m-1} \dfrac{m^k}{k!}$.

Утверждение. Последовательность x_m является убывающей.

Доказательство. Так как $x_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!} = F(m+1,m) = 1-\frac{1}{m!}\int_0^m t^m e^{-t}dt$, то используя метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим:

$$x_m - x_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}\left(m^{m-1}e^{-m} - \int_{m-1}^{m} t^{m-1}e^{-t}dt\right).$$

Заметим, что $\frac{d}{dt}\left(t^{m-1}e^{-t}\right) = t^{m-2}e^{-t}(m-1-t) \le 0$, если $t \ge m-1$.

Тогда $\min\limits_{[m-1;\,m]}\left(t^{m-1}e^{-t}\right) = m^{m-1}e^{-m}$.

Так как $\int_{m-1}^{m} t^{m-1}e^{-t}dt > \int_{m-1}^{m}\min\limits_{[m-1;\,m]}\left(t^{m-1}e^{-t}\right)dt = m^{m-1}e^{-m}\int_{m-1}^{m}dt = m^{m-1}e^{-m}$, то $x_m < x_{m-1}$, т. е. последовательность $x_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!}$ является убывающей.

Утверждение. Последовательность y_m является возрастающей.

Доказательство. Так как $y_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!} = F(m,m) = 1-\frac{1}{(m-1)!}\int_0^m t^{m-1}e^{-t}dt$, то используя метод интегрирования по частям в определенном интеграле, получим:

$$y_m - y_{m-1} = \frac{1}{(m-1)!}\left((m-1)^{m-1}e^{-m+1} - \int_{m-1}^{m} t^{m-1}e^{-t}dt\right).$$

Заметим, что $\frac{d}{dt}\left(t^{m-1}e^{-t}\right) = t^{m-2}e^{-t}(m-1-t) \le 0$, если $t \ge m-1$.

Тогда $\max\limits_{[m-1;\,m]}\left(t^{m-1}e^{-t}\right) = (m-1)^{m-1}e^{-(m-1)}$.

Так как $\int_{m-1}^{m} t^{m-1}e^{-t}dt < \int_{m-1}^{m}\max\limits_{[m-1;\,m]}\left(t^{m-1}e^{-t}\right)dt = (m-1)^{m-1}e^{-m+1}\int_{m-1}^{m}dt = (m-1)^{m-1}e^{-m+1}$, то $y_m > y_{m-1}$, т. е. последовательность $y_m = e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}$ является возрастающей.

Легко доказать следующее утверждение.

Утверждение. Последовательности x_m и y_m являются ограниченными.

Утверждение. Для последовательностей x_m и y_m выполняется $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$.

Доказательство. Так как пределы последовательностей x_m и y_m существуют, то

$$\lim_{m\to\infty} x_m - \lim_{m\to\infty} y_m = \lim_{m\to\infty}(x_m - y_m) = \lim_{m\to\infty}\left(e^{-m}\sum_{k=0}^{m}\frac{m^k}{k!} - e^{-m}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{m^k}{k!}\right) = \lim_{m\to\infty} e^{-m}\frac{m^m}{m!}.$$

Очевидно, что $\lim\limits_{m\to\infty} x_m - \lim\limits_{m\to\infty} y_m = \lim\limits_{m\to\infty} e^{-m}\frac{m^m}{m!} \ge 0$.

Учитывая формулу Стирлинга (например, в [2]) $m^m e^{-m}\sqrt{2\pi m} < m! < m^m e^{-m+\frac{1}{12m}}\sqrt{2\pi m}$, имеем $\frac{m^m e^{-m}}{m!} < \frac{1}{\sqrt{2\pi m}}$. Тогда $\lim\limits_{m\to\infty} x_m - \lim\limits_{m\to\infty} y_m = \lim\limits_{m\to\infty} e^{-m}\frac{m^m}{m!} \le \lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2\pi m}} = 0$.

Следовательно, $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$.

Утверждение. Для последовательностей x_m и y_m выполняется равенство: $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m = 0,5$ и выполняются неравенства: $0,5 < x_m \le x_1 = 2e^{-1}$ и $e^{-1} = y_1 \le y_m < 0,5$.

Доказательство. Пусть распределение случайной величины *X* задаётся плотностью вероятности, имеющей вид

$$f_X(x) = \begin{cases} 0, \ x < 0 \\ \dfrac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)}, \ x \ge 0 \end{cases}, \text{ где } \Gamma(m) = \int\limits_0^{+\infty} t^{m-1}e^{-t}dt \text{ - гамма-функция Эйлера.}$$

Тогда говорят, что случайная величина X имеет гамма-распределение с параметром m и пишут $X : Gamma(m)$. Заметим, что гамма-распределение имеет математическое ожидание и дисперсию, которые равны параметру распределения m.

Согласно центральной предельной теореме, при больших m гамма-распределение может быть приближено нормальным распределением: $Gamma(m) \approx \mathrm{N}(a;\sigma^2) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(t-a)^2}{2\sigma^2}}$ с математическим ожиданием a и дисперсией σ^2 для которых $a = \sigma^2 = m$.

Следовательно, $\dfrac{x^{m-1}e^{-x}}{\Gamma(m)} \approx \dfrac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2m}}$ при больших m.

Тогда, учитывая, что $\Gamma(m) = (m-1)!$ ($m \in N$) и используя метод замены переменной в определенном интеграле, получим:

$$\frac{1}{(m-1)!}\int\limits_0^m t^{m-1}e^{-t}dt = \int\limits_0^m \frac{t^{m-1}e^{-t}}{\Gamma(m)}dt \approx \int\limits_0^m \frac{1}{\sqrt{2\pi m}} e^{-\frac{(t-m)^2}{2m}}dt = \begin{vmatrix} t = m - u\sqrt{m} \\ dt = -\sqrt{m}du \end{vmatrix} = -\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\sqrt{m}}^0 e^{-\frac{u^2}{2}}du =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{\sqrt{m}} e^{-\frac{u^2}{2}}du = \Phi\left(\sqrt{m}\right), \text{ где } \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^x e^{-\frac{u^2}{2}}du$$ - интеграл вероятностей (например, в [2]). Таким образом, при больших m выполняется $y_m \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{m}\right)$.

Учитывая, что $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}}du = 0,5$, получим: $\lim\limits_{m\to\infty} y_m = 1 - \lim\limits_{m\to\infty}\Phi\left(\sqrt{m}\right) = 0,5$.

Заметим так же, что при больших m выполняется: $x_m \approx 1 - \Phi\left(\sqrt{m}\right)$, так как $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \lim\limits_{m\to\infty} y_m$.

Поэтому выполняются неравенства: $0,5 < x_m \le x_1 = 2e^{-1}$ и $e^{-1} = y_1 \le y_m < 0,5$.

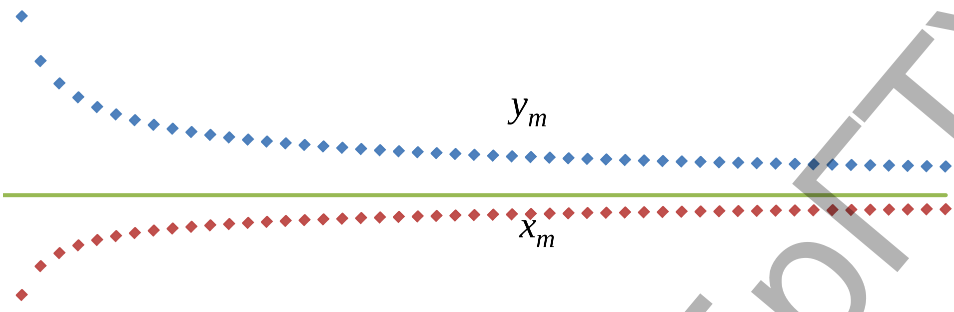
Утверждение. Для любого целого неотрицательного числа m существует единственное решение уравнения $F(m+1,\lambda) = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{\lambda^k}{k!} = 0,5$ относительно λ, принадлежащее интервалу $(m, m+1)$.

Доказательство. Функция $F(m+1,\lambda) = e^{-\lambda}\sum\limits_{k=0}^{m}\dfrac{\lambda^k}{k!}$ для любого целого неотрицательного числа m является убывающей, так как

$$F'_\lambda(m+1,\lambda) = \left(1 - \frac{1}{m!}\int\limits_0^\lambda y^m e^{-y}dy\right)'_\lambda = -\frac{\lambda^m e^{-\lambda}}{m!} < 0.$$

Так как $F(m+1,m+1)=y_{m+1}<0,5$ и $F(m+1,m)=x_m>0,5$, то для любых целого неотрицательного числа m существует единственное $\lambda_m\in(m,m+1)$ такое, что $F(m+1,\lambda_m)=e^{-\lambda_m}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda_m^k}{k!}=0,5$.

На рисунке изображены числовые последовательности x_m и y_m $(m=\overline{1,50})$.



Используя полученные результаты, можно получить, например, следующие выводы: если параметр λ распределения Пуассона является натуральным числом, то медиана такого распределения равна этому параметру. Если параметр λ распределения Пуассона не является натуральным числом, то медиана такого распределения равна либо целой части параметра распределения $[\lambda]$, если $\lambda<\lambda_m$, или $[\lambda]=[\lambda]+1$, если $\lambda>\lambda_m$, или принадлежит интервалу $[[\lambda],[\lambda]+1]$, если параметр λ распределения равен $\lambda_m\in(m,m+1)$ - решению уравнения $e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{m}\frac{\lambda^k}{k!}=0,5$, где $[\lambda]=m$.

Список цитированных источников

1. Янке, Е. Специальные функции: формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш – М.: Наука, 1968. – 344 с.
2. Корн, Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А. Корн, Т.М. Корн – М.: Наука, 1984. – 832 с.

УДК 535:621.373.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАСЧЕТА ВОЛНОВОДОВ

Маркина А.А.
Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Тарасюк Н.П.

Для эффективного развития приборов оптоэлектроники необходимо применение сложных геометрий многослойных волноводов. Это осложняет аналитический расчет данных структур. Поэтому важное значение приобретают численные методы расчета волноводов. Для расчета оптических свойств слоистых структур широко используется метод матриц переноса (ММП).

Рассмотрим многослойную волноводную структуру [1]. Рассмотрим случай TE – мод, распространяющихся в направлении оси z, направленной вдоль слоев. Выражение для напряженности электрического поля имеет вид:

$$E_y(x,z,t)=E_{y,j}(x)\exp[i(wt-b\,z)] \tag{1}$$