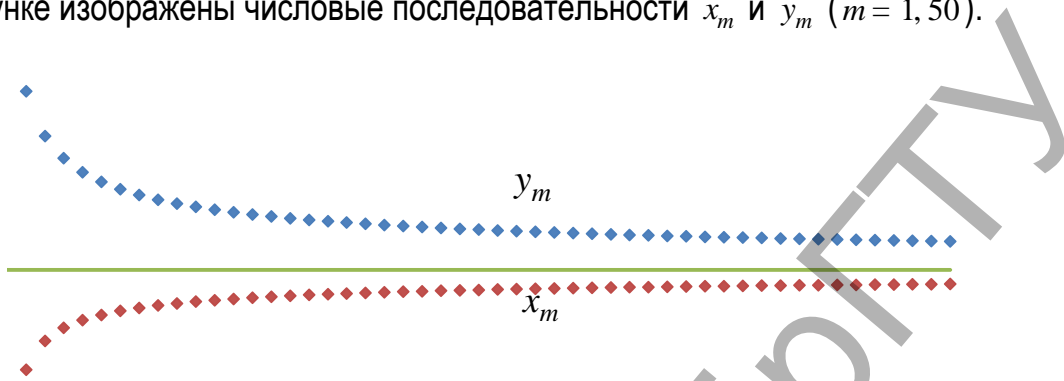


Так как $F(m+1, m+1) = y_{m+1} < 0,5$ и $F(m+1, m) = x_m > 0,5$, то для любых целого неотрицательного числа m существует единственное $l_m \in (m, m+1)$ такое, что

$$F(m+1, l_m) = e^{-l_m} \sum_{k=0}^m \frac{l_m^k}{k!} = 0,5.$$

На рисунке изображены числовые последовательности x_m и y_m ($m = \overline{1, 50}$).



Используя полученные результаты, можно получить, например, следующие выводы: если параметр l распределения Пуассона является натуральным числом, то медиана такого распределения равна этому параметру. Если параметр l распределения Пуассона не является натуральным числом, то медиана такого распределения равна либо целой части параметра распределения $[l]$, если $l < l_m$, или $[l] + 1$, если $l > l_m$, или принадлежит интервалу $[l] \cup [l] + 1$, если параметр l распределения равен $l_m \in (m, m+1)$ – решению уравнения $e^{-l} \sum_{k=0}^m \frac{l^k}{k!} = 0,5$, где $[l] = m$.

Список цитированных источников

1. Янке, Е. Специальные функции: формулы, графики, таблицы / Е. Янке, Ф. Эмде, Ф. Лёш – М.: Наука, 1968. – 344 с.
2. Корн, Г.А. Справочник по математике для научных работников и инженеров / Г.А. Корн, Т.М. Корн – М.: Наука, 1984. – 832 с.

УДК 535:621.373.8

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МАТРИЦ ПЕРЕНОСА ДЛЯ РАСЧЕТА ВОЛНОВОДОВ

Маркина А.А.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Научный руководитель: Тарасюк Н.П.

Для эффективного развития приборов оптоэлектроники необходимо применение сложных геометрий многослойных волноводов. Это осложняет аналитический расчет данных структур. Поэтому важное значение приобретают численные методы расчета волноводов. Для расчета оптических свойств слоистых структур широко используется метод матриц переноса (ММП).

Рассмотрим многослойную волноводную структуру [1]. Рассмотрим случай ТЕ – мод, распространяющихся в направлении оси z , направленной вдоль слоев. Выражение для напряженности электрического поля имеет вид:

$$E_y(x, z, t) = E_{y,j}(x) \exp[i(\omega t - \beta z)] \quad (1)$$

для j -го слоя. Амплитуда напряженности электрического вектора $E_{y,j}(x)$ удовлетворяет волновому уравнению:

$$\frac{\partial^2 E_{y,j}(x)}{\partial x^2} - (\beta^2 - k_0^2 \tilde{n}_j^2) E_{y,j}(x) = 0, \quad (2)$$

где $\beta = \beta_{re} + i\beta_{im}$ – проекция волнового вектора $k_0 = \frac{2\pi}{\lambda}$ на плоскость структуры, $\tilde{n}_j = n + ik$ – комплексный показатель преломления j -го слоя. Решение уравнения (2) имеет вид

$$E_{y,j}(x) = A_j \exp[\gamma_j(x - L_j)] + B_j \exp[-\gamma_j(x - L_j)], \quad (3)$$

где $\gamma_j = \sqrt{\beta^2 - k_0^2 \tilde{n}_j^2}$, L_j – координаты границы между j и $j+1$ слоями, A_j и B_j – комплексные коэффициенты, определяемые из граничных условий.

Граничные условия следуют из непрерывности тангенциальной составляющей вектора напряженности электромагнитного поля и его производной вдоль нормали к поверхности. В данном случае они будут выглядеть следующим образом:

$$\begin{aligned} A_j \exp[\gamma_j d_j] + B_j \exp[-\gamma_j d_j] &= A_{j+1} + B_{j+1} \\ A_j \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}} \exp[-\gamma_j d_j] - B_j \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}} \exp[\gamma_j d_j] &= A_{j+1} - B_{j+1} \end{aligned} \quad (4)$$

где d_j – толщина j -го слоя. Выражения (4) можно представить в матричном виде:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_{j+1} = T_j \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_j, \quad (5)$$

где

$$T_j = \begin{bmatrix} \left(1 + \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}}\right) \frac{\exp[\gamma_j d_j]}{2} & \left(1 - \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}}\right) \frac{\exp[-\gamma_j d_j]}{2} \\ \left(1 - \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}}\right) \frac{\exp[\gamma_j d_j]}{2} & \left(1 + \frac{\gamma_j}{\gamma_{j+1}}\right) \frac{\exp[-\gamma_j d_j]}{2} \end{bmatrix}.$$

Рекурсивные соотношения для коэффициентов первого и последнего слоев имеют вид:

$$\begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_m = T_{m-1} T_{m-2} \dots T_3 T_2 T_1 \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_1 = T_{tot} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix}_1. \quad (6)$$

Для направляемых мод напряженность электромагнитного поля на бесконечности стремится к нулю $E_y(x \rightarrow \pm\infty) \rightarrow 0$. Поэтому $B_1 = 0$, $A_m = 0$.

В результате получаем:

$$\begin{bmatrix} 0 \\ B_m \end{bmatrix} = T_{tot} \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (7)$$

В итоге граничные условия сводятся к уравнению:

$$t_{11}(\beta) = 0. \quad (8)$$

Для решения уравнения (8) использовался алгоритм скоростного спуска.

По известной величине β , определялись эффективный показатель преломления n_{eff} и удельный фактор оптического ограничения структуры. Они имеют вид [2]:

$$n_{eff} = \frac{\beta_{re}}{k_0}, \tag{9}$$

$$\Gamma = \frac{\int_{x_a}^{x_b} E_y^2(x) dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} E_y^2(x) dx} \tag{10}$$

где интегрирование в числителе происходит по толщине 1 нм в пике интенсивности.

Применение ММП покажем на простом примере плоского трехслойного симметричного волновода GaAs-Al_xGa_{1-x}As. Волновод образован двумя полубесконечными областями Al_xGa_{1-x}As с концентрациями Al, равными 10%, 20% и 30%, и показателями преломления n₁, соответственно равным 3.520, 3.448 и 3.385, и волноводным слоем с показателем преломления n₂=3.590. Толщина волноводного слоя изменялась от 0.1 до 1.0 мкм. Длина волны излучения равна 900 нм [3]. На рисунках 1 и 2 приведены зависимости удельного фактора оптического ограничения и эффективного показателя преломления от толщины волноводного слоя при концентрациях Al, равными 10%, 20% и 30%.

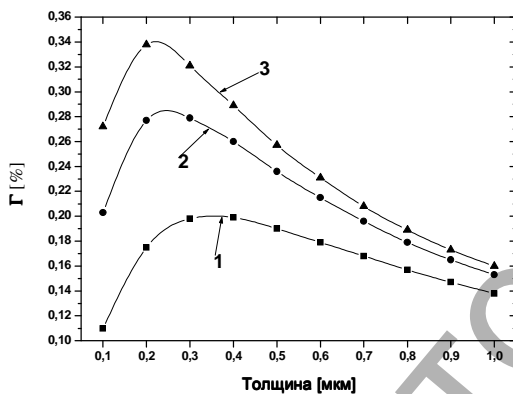


Рисунок 1 – Зависимость удельного фактора оптического ограничения от толщины волноводного слоя и концентрации Al:
1 – x=0.1, 2 – x=0.2, 3 – x=0.3

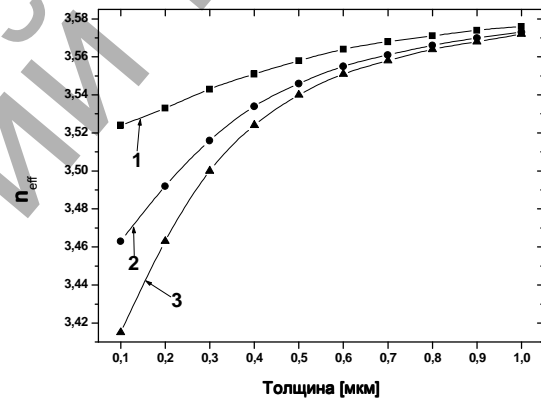


Рисунок 2 – Зависимость эффективного показателя преломления от толщины волноводного слоя и концентрации Al:
1 – x=0.1, 2 – x=0.2, 3 – x=0.3

На рисунке 1 видно, что максимальное значение удельного фактора оптического ограничения равно 0.338% и соответствует толщине волноводного слоя, равной 0.2 мкм, при концентрации Al, равной 30%. При концентрациях Al равных 10%, 20% и 30% толщина, соответствующая максимальному удельному фактору оптического ограничения, уменьшается и соответственно равна 0.4, 0.3 и 0.2 мкм. На рисунке 2 видно, что эффективный показатель преломления уменьшается при увеличении концентрации Al и увеличивается с ростом толщины волноводного слоя. При этом наибольший рост эффективного показателя преломления соответствует меньшим толщинам волноводного слоя. Значения эффективного показателя преломления при концентрациях Al 10% и 30% и толщине волноводного слоя 0.1 и 1 мкм примерно различаются соответственно на 3.2% и 0.1%.

Список цитированных источников

1. Bergmann, M.J. Optical-field calculations for lossy multiple-layer Al_xGa_{1-x}N/In_xGa_{1-x}N laser diodes / M.J. Bergmann, H.C. Casey, Jr. // J. Appl. Phys. – 1998. – Vol. 84. – Iss. 3. – P. 1196–1203.
2. Адамс, М. Введение в теорию оптических волноводов / М. Адамс. – Москва: Мир, 1984. – 512 с.
3. Кейси, К. Лазеры на гетероструктурах / К. Кейси, М. Паниш. – Москва: Мир, 1978. – Том 1. – 299 с.