УДК 519.6+517.983

АПРИОРНЫЙ ВЫБОР ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ В НЕЯВНОМ ИТЕРАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Мархель М.А.
Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Матысик О.В., к.физ.-мат.наук, доцент

В гильбертовом пространстве H решается некорректное уравнение первого рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что $0 \in SpA$, поэтому задача (1) некорректна. Для решения задачи предлагается неявная итерационная схема

$$x_{n+1} = x_n - \alpha(Ax_{n+1} - y), \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть y уравнения (1) известна приближённо $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2) примет вид

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} - \alpha(Ax_{n+1,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ, т.е. что $\lim\limits_{\delta \to 0}\left(\inf\limits_n \|x - x_{n,\delta}\|\right) = 0$.

Теорема 1. _Итерационный процесс_ (2) _при условии_ $\alpha > 0$ _сходится_.

Теорема 2. _Итерационный процесс_ (3) _сходится при условии_ $\alpha > 0$, _если выбирать число итераций n в зависимости от_ δ _так, чтобы_ $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Теорема 3. _При условии_ $\alpha > 0$ _и_ $x = A^s z,\ s > 0$ _оценка погрешности для итерационного метода_ (3) _имеет вид_

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (2n\alpha)^{-s} \|z\| + n\alpha\delta. \tag{4}$$

Оптимизируем по n полученную оценку погрешности. Для её минимизации производную по n от правой части оценки погрешности приравняем нулю. Получим

$$n_{\text{опт}} = s\alpha^{-1} 2^{-s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \delta^{-1/(s+1)}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (4), найдём оптимальную оценку погрешности для метода (3):

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (1+s) 2^{-s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$

Рассмотрим погрешность метода (3) при счёте с округлениями. Пусть $x_{n,\delta}$ – точное значение, полученное по формуле (3), а z_n – приближённое решение, полученное по той же формуле с учётом вычислительных погрешностей γ_n, т.е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha A)^{-1}(z_n + \alpha y_\delta) + \alpha\gamma_n, \ z_0 = 0. \tag{5}$$

Обозначим $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$ и вычтем из (5) равенство (3), получим $\varepsilon_{n+1} = (E + \alpha A)^{-1} \varepsilon_n + \alpha\gamma_n$. Так как нулевые приближения равны нулю, то $\gamma_0 = 0$. По индукции получим $\varepsilon_n = \sum\limits_{k=0}^{n-1} (E + \alpha A)^{-(n-1-k)} \alpha\gamma_k$. В силу $\alpha > 0$ и принадлежности нуля спектру оператора A имеем $\left\|(E + \alpha A)^{-1}\right\| \le 1$, поэтому $\|\varepsilon_n\| \le n\alpha\gamma$, где $\gamma = \sup\limits_k |\gamma_k|$.

Таким образом, общая оценка погрешности для неявного итерационного метода (3) с учётом вычислительных погрешностей имеет вид

$$\|x - z_n\| \le \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \le s^s (2n\alpha)^{-s} \|z\| + n\alpha\delta + n\alpha\gamma.$$

УДК 519.6+517.983

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДВУХШАГОВОЙ ПРОЦЕДУРЫ ЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Минзер Е.И.

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Матысик О.В., к.физ.-мат.н., доцент

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \qquad (1)$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается явная итерационная двухшаговая процедура

$$x_n = 2(E - \alpha A)x_{n-1} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \qquad (2)$$

В случае, когда правая часть y уравнения (1) известна приближённо $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2) примет вид

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \qquad (3)$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

Теорема 1. *Итерационный процесс* (2) *при условии* $0 < \alpha < 2/\|A\|$ *сходится*.

Теорема 2. *Итерационный процесс* (3) *сходится при условии* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$, *если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta \to 0,\ n \to \infty,\ \delta \to 0$.

Теорема 3. *При условии* $0 < \alpha \le \dfrac{5}{4\|A\|}$ *и* $x = A^s z,\ s > 0$ *оценка погрешности для итерационного метода* (3) *имеет вид*

$$\|x - x_{n,\delta}\| \le s^s (s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s} \|z\| + (5/4)(n-1)\delta\alpha. \qquad (4)$$

Оптимизируем по n полученную оценку погрешности. Для её минимизации производную по n от правой части оценки погрешности приравняем нулю. Получим

$$n_{\text{опт}} = 1 + \left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)} \alpha^{-1}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (4), найдем оптимальную оценку погрешности для метода (3):

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (5/4)^{s/(s+1)} \delta^{s/(s+1)} e^{-s/(s+1)} (s+1)(s+2)^{1/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}.$$