Таким образом, общая оценка погрешности для неявного итерационного метода (3) с учётом вычислительных погрешностей имеет вид

$$\|x-z_n\| \le \|x-x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta}-z_n\| \le s^s(2n\alpha)^{-s}\|z\| + n\alpha\delta + n\alpha\gamma.$$

УДК 519.6+517.983

СХОДИМОСТЬ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ДВУХШАГОВОЙ ПРОЦЕДУРЫ ЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Минзер Е.И.

Брестского государственного университета имени А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Матысик О.В., к.физ.-мат.н., доцент

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается явная итерационная двухшаговая процедура

$$x_n = 2(E-\alpha A)x_{n-1} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2} + \alpha^2 Ay, \quad x_0 = x_1 = 0. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть y уравнения (1) известна приближённо $\|y-y_\delta\| \le \delta$, метод (2) примет вид

$$x_{n,\delta} = 2(E-\alpha A)x_{n-1,\delta} - (E-\alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 Ay_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению x уравнения (1) при подходящем выборе n и достаточно малых δ.

Теорема 1. *Итерационный процесс* (2) *при условии* $0<\alpha<2/\|A\|$ *сходится*.

Теорема 2. *Итерационный процесс* (3) *сходится при условии* $0<\alpha\le\dfrac{5}{4\|A\|}$, *если выбирать число итераций n в зависимости от* δ *так, чтобы* $n\delta\to 0,\ n\to\infty,\ \delta\to 0$.

Теорема 3. *При условии* $0<\alpha\le\dfrac{5}{4\|A\|}$ *и* $x=A^s z,\ s>0$ *оценка погрешности для итерационного метода* (3) *имеет вид*

$$\|x-x_{n,\delta}\| \le s^s(s+2)[(n-1)\alpha e]^{-s}\|z\| + (5/4)(n-1)\delta\alpha. \tag{4}$$

Оптимизируем по n полученную оценку погрешности. Для её минимизации производную по n от правой части оценки погрешности приравняем нулю. Получим

$$n_{\text{опт}} = 1+\left(\frac{5}{4}\delta\right)^{-1/(s+1)} e^{-s/(s+1)} s(s+2)^{1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}\alpha^{-1}.$$

Подставив $n_{\text{опт}}$ в (4), найдем оптимальную оценку погрешности для метода (3):

$$\|x-x_{n,\delta}\|_{\text{опт}} \le (5/4)^{s/(s+1)}\delta^{s/(s+1)}e^{-s/(s+1)}(s+1)(s+2)^{1/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)}.$$