Назаров С.Г., Рахимов М.Р.

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ЛИНЕАРИЗАЦИИ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Государственный энергетический институт Туркменистана.

Назаров С.Г. – ректор Государственного энергетического института Туркменистана;

Рахимов М.Р. – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий кафедрой общей физики, математики и информатики.

Введение. Изучение неоднородных или несамосопряженных граничных условий, влияния насосов в сетях теплопередачи, а также добавления дополнительного члена к уравнениям Навье-Стокса, более подходящих для технологических процессов теплопроводности, является одной из актуальных проблем. В современных установках в процессе теплопередачи широко используются насосы, которые влияют на скорость теплового потока, что приводит к конвективному теплообмену в турбулентном тепловом потоке. Нахождение оптимального режима работы насоса в зависимости от скорости, температуры и времени теплового потока в процессе теплопередачи является одной из самых современных технологических проблем.

В литературе [1-3, см. там библ.] по исследованию математических моделей процесса теплопередачи, в основном, отмечаются две проблемы: 1 - *физические* вопросы адекватности математических моделей процесса теплопередачи; 2 - *математические* вопросы исследования нелинейных уравнений Навье-Стокса.

Существует обширный список литературы, посвященный решениям этих проблем. Краткий обзор работ, посвященных этим проблемам, приведен в [1-3].

В работе [1] по оптимальному моделированию процесса теплопередачи вязкой несжимаемой жидкости мы предложили *метод линеаризации уравнения Навье-Стокса*. Сущность предложенного там метода заключалась в замене в нелинейных членах компонентов искомого вектора-функции скорости течение жидкости с выбранными усредненными или другими постоянными значениями этих же компонентов из предшествующего времени или процессов. Тем самым нелинейные члены, учитывающие кинетическую энергию движения жидкости по координатным осям, заменяются на линейные члены, учитывающие скорости изменения вектора-скорости, умноженные на соответствующие значения компонентов вектора. Такие линейные члены будут соответствовать процессу экспоненциального роста скорости частицы жидкости по координатным осям в турбулентном течении.

В вышеупомянутой работе был предложен метод оптимального моделирования процесса теплопередачи, заключающийся в следующем:

- Линеаризовать уравнений Навье-Стокса указанным выше способом.
- Выбрать экспериментально или из аналогичных процессов известные функции скорости и приблизить скорости жидкости за заданное короткое время к выбранным функциям с помощью синтезирующих управляющих функций, т.е. решить линейно-квадратичную задачу оптимального синтеза и для полного описания процесса теплопередачи добавить к уравнению Навье-Стокса линейный интегральный оператор с ядром, полученным из решения нелинейного операторного уравнения Риккати, и функцию, полученную из решения линейной системы уравнений с известными данными задачи.

Такой метод линеаризации уравнений оправдан тем, что, во-первых, выбранные постоянные значения компонентов скорости движения можно принять как параметры и их можно оптимизировать по смыслу задачи, во-вторых, эти параметры можно выбрать как функции временного параметра. Кроме того, если процесс рассматривается в длительном периоде времени, то этот период времени можно разбить на несколько промежуток и построить многошаговый процесс, решая задачу для каждого шага с новыми параметрами, полученными из решения предыдущих периодов времени.

Постановка задачи оптимизации двумерных векторных дифференциальных уравнений Навье-Стокса.

В работе [1-3] нестационарное и нелинейное двумерное (трехмерный случай рассматривается аналогично) векторное дифференциальное уравнение Навье-Стокса с помощью подстановки $v_i = e^{\frac{1}{2\nu}(\sigma x+\tau y)}u_i$, $i = 1,2$ и выбранные значения σ и τ компонентов вектора скорости $w = w(x,y,t)$ =$(v_1(x,y,t), v_2(x,y,t))$ жидкости, т.е. функции $v_i \equiv v_i(x,y,t)$, $i = 1,2$, соответственно (плотность полагают $\rho = 1$), приведено к линейному уравнению следующего вида:

$$u_{it} - \nu\Delta u_i + \frac{1}{4\nu}(\sigma^2+\tau^2)u_i = Ç_i r_i + F_i + J_i \,, \tag{1}$$

$$Ç_i = e^{-\frac{1}{2\nu}(\sigma x+\tau y)}ç_i(x,y);\ r_i = r_i(t),\ \ F_i = e^{-\frac{1}{2\nu}(\sigma x+\tau y)}f_i,$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = p_1, \frac{\partial p}{\partial y} = p_2; \quad j_i = -p_i + q_i\,, J_i = e^{-\frac{1}{2\nu}(\sigma x+\tau y)}j_i,\ i = 1,2,$$

где $t \in [0,T]$; $(x,y) \in \Omega = \{0 \le x \le h,\ 0 \le y \le l\}$ − прямоугольная область с границей $- S = \{x = 0, x = h;\ 0 \le y \le l; 0 \le x \le h;\ y = 0, y = l\}$, $Q_T = \Omega X(0,T)$, $S_T = SX[0,T]$; $\Delta -$ оператор Лапласа, $\nu -$ постоянный коэффициент вязкости; функции $ç_i(x,y)$ может выражаться через дельта-функции Дирака и может учесть влияние внешних сил насосов из граничного режима.

Считается, что в уравнении (1) функции $p = p(x,y,t)$ (давление), $f = (f_1, f_2)$, $f_i = f_i(x,y,t)$ (внешняя сила) и $q = (q_1, q_2)$, $q_i = q_i(x,y,t)$ (постоянно действующая сила) и в условиях (2) функции $a(x,y)$, $b(x,y)$ обладают необходимыми дифференциальными свойствами. Вектор-функция f характеризует разницу между температурой поверхности греющего устройства и температурой жидкости (подъемную силу).

Считаем, что режим теплопередачи обусловлен несамосопряженными граничными условиями, например, типа Бицадзе-Самарского [3], т.е. начальные и нелокальные граничные условия для функции u_i записаны в виде:

$$\begin{cases} u_1(x,y,0) = a(x,y),\ \ u_2(x,y,0) = b(x,y); \qquad \dfrac{\partial a}{\partial x} + \dfrac{\partial b}{\partial y} = 0; \\ u_i(0,y,t) = 0,\ \ u'_{ix}(0,y,t) - u'_{ix}(h,y,t) = 0\,, 0 \le y \le l; \\ u_i(x,0,t) = 0,\ u'_{iy}(x,0,t) - u'_{iy}(x,l,t) = 0,\ 0 \le x \le h;\ \ i = 1,2. \end{cases} \tag{2}$$

С помощью подстановки $u_i = e^{-\frac{1}{2\nu}(\sigma x+\tau y)}v_i$, $i = 1,2$, можно воостановить исходные линеаризованные уравнения Навье-Стокса с нелокальными граничными условиями:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v_1}{\partial t} + \sigma\dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \tau\dfrac{\partial v_1}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial x} + \nu\Delta v_1 + ç_1(x,y)r_1(t) + f_1 + q_1 \\ \dfrac{\partial v_2}{\partial t} + \sigma\dfrac{\partial v_2}{\partial x} + \tau\dfrac{\partial v_2}{\partial y} = -\dfrac{\partial p}{\partial y} + \nu\Delta v_2 + ç_2(x,y)r_2(t) + f_2 + q_2 \\ \dfrac{\partial v_1}{\partial x} + \dfrac{\partial v_2}{\partial y} = 0, \end{cases} \tag{1'}$$

$$\begin{cases} v_i(0,y,t)=0,\ \ v'_{ix}(0,y,t)-e^{-\frac{\sigma h}{2\nu}}\left[v'_{ix}(h,y,t)-\frac{\sigma}{2\nu}v'_{ix}(h,y,t)\right]=0\,, 0\le y\le l; \\ v_i(0,y,t)=0,\ \ v'_{iy}(x,0,t)-e^{-\frac{\tau l}{2\nu}}\left[v'_{iy}(x,l,t)-\frac{\tau}{2\nu}v'_{iy}(x,l,t)\right]=0\,,\ 0\le x\le h;\ \ i=1,2, \end{cases} \tag{2'}$$

Сформулируем задачу оптимального моделирования процесса теплопередачи следующим образом.

В условиях (1), (2) найти управляющие функции $F_i(x,y,t)$, $r_i(t)$, $i=1,2$, как функции скорости жидкости, т.е. найти синтезирующие $F_i=F_i(u_i,t)$, $r_i=r_i(u_i,t)$ управляющие функции, зависящие от компонентов вектора скорости w и добиться того, что скорость управляемого потока жидкости приблизился в точках (x,y) и времени t к заданной $\varphi(t,x,y)=(\varphi_1(t,x,y),\varphi_2(t,x,y))$ нормальной скорости жидкости, а в конце управляемого процесса приблизился также к заданной нормальной скорости $\psi(x,y)=(\psi_1(x,y),\psi_2(x,y))$ и, таким образом, чтобы энергии сил, действующие на конвективный теплообмен были минимальны.

Для каждого компонента вектора скорости критерий оптимального моделирования может быть записан в виде [3] $(i=1,2)$:

$$I_i[t_0,r_i,F_i]=\alpha_1\int_{t_0}^{T}\|u_i(t)-\varphi_i(t)\|^2\,dt+\alpha_4\int_{t_0}^{T}{r_i}^2(t)\,dt+$$
$$+\alpha_2\|u_i(T)-\varphi_i\|^2+\alpha_3\int_{t_0}^{T}\|F_i(t)\|^2dt, \tag{3}$$

где $\|u\|-$норма элемента $u\epsilon L_2(\Omega)$; $t_0=0$; $\alpha_i(i=1,2,3,4)-$ заданные положительные числа. Конец T управляемого процесса зафиксирован.

Задача синтеза оптимального управления: найти синтезирующие функции $F_i=F_i(u_i,t)$, $r_i=r_i(u_i,t)$ управления, которые зависят от компонента u_i скорости $w=(u_1,u_2)$, $u_i=e^{-\frac{1}{2\nu}(\sigma x+\tau y)}v_i$ потока и вместе с соответствующим им решением начально-краевой задачи (1), (2), доставляющие функционалу (3) минимальное значение.

О решении задачи.

Положим $S[t_0,u_i(t,.)]=min_{g_{ij},f_i}I_i[t_0,\,r_i,F_i]$. В соответствии с методом динамического программирования получено нелинейное функциональное уравнение Р. Беллмана, решение которого ищется в виде квадратичного функционала [1-3]:

$$S[t,u_i(t,x)]=(R(t)u_i(t),u_i(t))+(k(t),u_i(t))+\eta(t),$$

где $R(t)-$ линейный интегральный оператор с ядром $R(x,y;\beta,\gamma,t)$; $k(t)-$ функция со значением в $L_2(\Omega)$ [3]; $\eta(t)-$скалярная функция. Вычисляя производные по Фреше функционала S, находим:

$$\omega_i(t,u_i)=2R(t)u_i+k(t),$$
$$F_i(x,y,t)=-\frac{1}{2\alpha_3}\,\omega_i(t,u_i),\qquad r_i(t)=-\frac{1}{2\alpha_4}(\c{C}_i,\omega_i(t,u_i)) \tag{4}$$

Функции управления, найденные по формулам (4) [1-3], как потребовалось в сформулированной выше задаче оптимального моделирования процесса теплопередачи с заданными режимами, являются функциями, зависящими от скорости потока жидкости. Подставляя их в (1), (2), получим уравнения с начально-краевыми условиями, описывающие скорость оптимального потока жидкости.

Для дальнейшего вычисления целесообразно применить метод спектрального разложения несамосопряженных операторов. Рассмотрим дифференциальный оператор, порожденный следующей несамосопряженной краевой задачей:

$$X''(x)+\lambda^2X(x)=0,\quad X(0)=X'(0)-X'(1)=0,$$

Известно [3, см. там библ.], что собственные функции $X_0^k(x) = \sqrt{2}\sin\lambda_k x$, $X_0^0(x) = x$, $k = 1,2,...$, соответствующие собственным значениям λ_k^2, $\lambda_k = 2\pi k$, $k = 0,1,2,...$, т.е. система $\{X_0^k(x)\}$ не образует полную систему в $L_2(0,1)$, а кратность собственного элемента $X_0^k(x)$ соответствующего собственным значениям λ_k^2 равна 2. Дополним её, определив присоединенные элементы по правилу [3]:

$$X''^k_1 + \lambda_k^2 X_1^k + 2\lambda_k X_0^k = 0,\ \ X_1^k(0) = X'^k_1(0) - X'^k_1(1) = 0$$

Отсюда получим $X_1^k(x) = \sqrt{2}x\cos\lambda_k x$, $\quad k = 1,2,...$.

Аналогичным образом из сопряженной задачи ($k = 0,1,2,...$):

$$g''^k_1(x) + \lambda_k^2 g_1^k(x) = 0, \qquad g'^k_1(0) = g_1^k(0) - g_1^k(1) = 0,$$

$$g''^k_0(x) + \lambda_k^2 g_0^k(x) + 2\lambda_k g_1^k(x) = 0, \qquad g'^k_0(0) = g_0^k(0) - g_0^k(1) = 0$$

определяем ($k = 1,2,...$)

$$g_0^0(x) = 2;\ g_1^k(x) = 2\sqrt{2}\cos\lambda_k x,\ g_0^k(x) = 2\sqrt{2}\,(1-x)\sin\lambda_k x. \qquad (5)$$

Системы $\{X_h^k(x)\}$ и $\{g_h^k(x)\}$, $k = 0,1,2,...;\ h = 0,1$, образуют биортогональную систему, т.е. $(X_h^k, g_\nu^l) = \delta_{h\nu}^{kl}$ и образуют базисы Рисса в $L_2(0,1)$ [3, см. там библ.]. Решение соответствующей начально-краевой задачи математической физики можно построить с помощью биортогональной системы $\{X_h^k(x); g_h^k(x)\}$.

Важно отметить следующий момент в теории базиса Рисса [3]: если $\{u_h^k\}$ система образует базис Рисса в $L_2(a,b)$, а $\{v_h^k\}$ система образует базис Рисса в гильбертовом пространстве H, то система $\{u_h^k v_\nu^l\}$ образует базис Рисса в гильбертовом пространстве $L_2(a,b;H)$. Следовательно, решение задачи оптимального моделирования можно построить с помощью корневых функций оператора Лапласа.

Корневые функции оператора Лапласа с несамосопряженными краевыми условиями (2) определим по следующим правилам: $\varphi_{h\nu}^{kl}(x,y) = X_h^k(x)X_\nu^l(y)$,

$$\Delta\varphi_{h\nu}^{kl} \equiv \frac{\partial^2\varphi_{h\nu}^{kl}(x,y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi_{h\nu}^{kl}(x,y)}{\partial y^2} = X_h^{k\prime\prime}(x)X_\nu^l(y) + X_h^k(x)X_\nu^{l\prime\prime}(y) =$$
$$= -[\lambda_k^2 X_h^k + 2\lambda_k X_{h-1}^k]X_\nu^l(y) - X_h^k(y)[\lambda_k^2 X_\nu^l + 2\lambda_k X_{\nu-1}^l],$$

Заметим, что $\varphi_{h\nu}^{kl} = 0$ при $h < 0$ или $\nu < 0$.

Корневые функции оператора Лапласа с сопряженными краевыми условиями определяется аналогично: $\psi_{h\nu}^{kl}(x,y) = Y_h^k(x)Y_\nu^l(y)$, где $Y_h^k(x)$и $Y_\nu^l(y)$ определяются из (5). С помощью найденных корневых $\varphi_{h\nu}^{kl}(x,y)$ и $\psi_{h\nu}^{kl}(x,y)$ функций оператор $R(t)$ (или его ядро $R(x,y;\beta,\gamma,t)$) и функцию $k(t)$ можно разложить в ряд и тем самым получить систему уравнений, содержащую в себе нелинейные уравнения типа Риккати и линейные дифференциальные уравнения, которая изучена в [3].

Список использованных источников:

1. S.Nazarow, M.Rahymow, G. Hekimow, Optimal modeling of the heat transfer of a viscous incompressible liquid, E3S Web of Conferences 216, 01059 (2020) RSES 2020, https ://doi.org/10.1051/e3sconf/202021601059.
2. Об оптимальном моделировании теплопередачи вязкой несжимаемой жидкости, Электронный сборник научных докладов 92 заседаний Международного семинара «Вопросы надежности больших энергосистем», т. 3, Казань-Иркутск-2020 г.
3. M.Рахимов, Оптимальное моделирование процессов теплопередачи и колебаний. Методы динамического программирования и спектрального разложения, научная монография, LAP, LAMBERT Academic Publishing.