Следовательно, найденные нами инварианты, действительно, образуют полную систему. Это завершает доказательство следующей теоремы.

Теорема *(О полной системе инвариантов инволюций). Полная система инвариантов троек* (V,φ,W) с точностью до изоморфизма векторного пространства V *есть шестерка* $(n,n_+,n_-,m,\dim V\cap V_+,\dim V\cap V_-)$, *где* $n=\dim V, n_+=\dim V_+, m=\dim W$, $n_-=\dim V_-, V_+=\ker(\varphi-\mathrm{id}), V_-=\ker(\varphi+\mathrm{id})$.

Список цитированных источников

1. Аграчев, А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. – М.: Физматлит, 2005. – 392 с.

УДК. 511

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕРАВЕНСТВА НЕСБИТТА

Пригун Р.В.
Командно-инженерный институт МЧС РБ, г. Минск
Научный руководитель: Шамукова Н.В., к. физ.-мат. н., доцент

В 1905 г. английский математик Несбитт поставил следующую задачу: доказать, что для всех $x>0, y>0, z>0$ выполняется неравенство $\frac{x}{y+z}+\frac{y}{z+x}+\frac{z}{x+y}\geq\frac{3}{2}$.

Неравенство Несбитта доказывается с использованием простейших алгебраических преобразований и теоремы Мюрхеда; неравенства Коши-Буняковского-Шварца; теоремы Йенсена; связи между средним арифметическим, средним геометрическим и средним гармоническим.

На математических олимпиадах различных уровней участникам предлагается доказать неравенства, являющиеся аналогами неравенства Несбитта. Также аналоги неравенства Несбитта, их доказательства и обобщения публикуются в различных математических журналах.

Теорема 1. [1] Пусть $x>0, y>0, z>0$

Тогда $\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}\leq\frac{3\sqrt{2}}{2}$

В статье [2] приводится доказательство неравенства, если $x>0, y>0, z>0, \alpha\leq\frac{1}{2}$,

то $\left(\frac{x}{x+y}\right)^{\alpha}+\left(\frac{y}{y+z}\right)^{\alpha}+\left(\frac{z}{z+x}\right)^{\alpha}\leq\frac{3}{2^{\alpha}}$.

Также выдвигается предположение, что справедливо неравенство:
$\left(\frac{x_1}{x_1+x_2}\right)^{\alpha}+\left(\frac{x_2}{x_2+x_3}\right)^{\alpha}+\cdots+\left(\frac{x_n}{x_n+x_1}\right)^{\alpha}\leq\frac{n}{2^{\alpha}}$.

Были попытки доказать данное предположение, однако нам удалось доказать неравенство, состоящее из четырех слагаемых, но с менее точной оценкой:

$\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+t}}+\sqrt{\frac{t}{t+x}}\leq 3\sqrt{2}-1$, где $x>0, y>0, z>0, t>0$.

Теорема 2. Справедливо неравенство

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+t}}+\sqrt{\frac{t}{t+x}}\le 3\sqrt{2}-1, \text{ где } x>0, y>0, z>0, t>0.$$

Доказательство.

Используя утверждение *теоремы 1*, получаем, что

$$\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+x}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+t}}+\sqrt{\frac{t}{t+y}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\sqrt{\frac{z}{z+t}}+\sqrt{\frac{t}{t+x}}+\sqrt{\frac{x}{x+z}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$\sqrt{\frac{t}{t+x}}+\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+t}}\le\frac{3\sqrt{2}}{2};$$

$$2\left(\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+t}}+\sqrt{\frac{t}{t+x}}\right)\le 6\sqrt{2}-\left(\sqrt{\frac{z}{z+x}}+\sqrt{\frac{x}{x+z}}\right)-$$

$$-\left(\sqrt{\frac{t}{t+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+t}}\right)\le 6\sqrt{2}-2$$

Докажем вспомогательное неравенство: $\sqrt{\frac{a}{a+b}}+\sqrt{\frac{b}{a+b}}\ge 1$

$$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a+b}}\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge\sqrt{a+b}\Leftrightarrow a+2\sqrt{ab}+b\ge a+b\Leftrightarrow\sqrt{ab}\ge 0.$$

Тогда $\sqrt{\frac{x}{x+y}}+\sqrt{\frac{y}{y+z}}+\sqrt{\frac{z}{z+t}}+\sqrt{\frac{t}{t+x}}\le 3\sqrt{2}-1.$

Неравенство доказано.

Полученная оценка является менее точной, чем в статье [2].

Для этого сравним полученную нами оценку $3\sqrt{2}-1$ и предложенную в статье [2] оценку $\frac{4}{2^{\frac{1}{2}}}$.

Пусть $\frac{4}{2^{\frac{1}{2}}}<3\sqrt{2}-1\Leftrightarrow 2\sqrt{2}<3\sqrt{2}-1\Leftrightarrow 1<\sqrt{2}$.

Последнее неравенство очевидно. Значит, $\frac{4}{2^{\frac{1}{2}}}<3\sqrt{2}-1$.

Возможно при усовершенствовании подхода можно получить доказательство выдвинутого предположения в [2].

Список цитированных источников

1. Mihaly, Bencze Generalizations and refinements for Nesbitt's inequality / Bencze Mihaly, T. Pop Ovidiu // Journal of Mathematical Inequalities – 2011. – Vol. 5. – № 1. – С. 13–20.
2. Fuhua, Wei Generalizations and analogues of the Nesbitt's inequality / Wei Fuhua, Wu Shanhe // Octogon Mathematical Magazine. – 2009. – Vol. 17. – No. 1. – С. 215–220.