Доказательство. Рассмотрим разность $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$. По доказанному в теореме 1 $x - x_n \to 0, n \to \infty$. Покажем, что $x_n - x_{n,\delta}$ можно сделать сходящимися к нулю. Воспользовавшись интегральным представлением самосопряжённого оператора A, получим $x_n - x_{n,\delta} = \quad = A^{-1}\left[E - (E - \alpha A)^n (E + \alpha A)^{-n}\right](y - y_\delta) = \int\limits_0^M \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n\right] dE_\lambda (y - y_\delta)$.

Оценим сверху положительную подынтегральную функцию $g_n(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^n\right]$ при условии (4). Покажем по индукции, что

$$g_n(\lambda) \le 2n\alpha. \qquad (5)$$

При $n = 1$ $g_1(\lambda) = \frac{2\alpha}{1+\alpha\lambda} \le 2\alpha$. Предположим, что (5) истинно при $n = k$, т.е. $g_k(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k\right] \le 2k\alpha$ и рассмотрим $n = k + 1$. Имеем

$$g_{k+1}(\lambda) = \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1=\alpha\lambda}\right)^k\right] + \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^{k+1}\right] - \lambda^{-1}\left[1 - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k\right] \le$$

$$\le 2k\alpha + \lambda^{-1}\left[\left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k - \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^{k+1}\right] = 2k\alpha + \left(\frac{1-\alpha\lambda}{1+\alpha\lambda}\right)^k \frac{2\alpha}{1+\alpha\lambda} \le 2(k+1)\alpha.$$

Следовательно, оценка (5) справедлива для любого $n \in N$. Отсюда $\|x_n - x_{n,\delta}\| \le 2n\alpha\delta$. Поскольку $\|x - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + \|x_n - x_{n,\delta}\| \le \|x - x_n\| + 2n\alpha\delta$ и $\|x - x_n\| \to 0, n \to \infty$, то для сходимости процесса (3) достаточно выбрать n в зависимости от δ так, чтобы $n\delta \to 0$, $n \to \infty$, $\delta \to 0$. Теорема 2 доказана.

УДК 517.948

ОБ ЭФФЕКТИВНОСТИ НЕКОТОРЫХ МНОГОШАГОВЫХ МЕТОДОВ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Стаин Т.С., Тузик А.С.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: В.М. Мадорский, к.физ.-мат.н., доцент

Решается нелинейное уравнение

$$f(x) = 0, f(D \subset R^n \to R^n), f \in C_D^2 \qquad (1)$$

для решения которого предлагаются следующие квазиньютоновские нелокальные нерегуляризованные итерационные процессы.

Метод 1.

Шаг 1: Решается СЛАУ относительно поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\sqrt{\beta_n} f(x_n), n = 0,1,2 \ldots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \qquad (2)$$

Шаг 2: Вносится поправка в вектор x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n. \qquad (3)$$

Шаг 3: Проверяется условие окончания вычислительного процесса:
если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon,\ \varepsilon \ll 1,\ \varepsilon$ – параметр останова, то конец расчетов, иначе

Шаг 4: Вносится поправка в вычисление шаговой длины, если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе – шаговая длина определяется по формуле:

$$\beta_{n+1} = min\left(1, \frac{\gamma_n\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+1})\|\beta_n}\right), \gamma_0 = \beta_0^2, \tag{4}$$

Шаг 5: Решается СЛАУ с той же матрицей Якоби относительно поправки Δx_{n+1}

$$f'(x_n)\Delta x_{n+1} = -\sqrt{\beta_{n+1}}f(x_{n+1}). \tag{5}$$

Шаг 6: Уточняется вектор x_{n+1}:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \Delta x_{n+1} \tag{6}$$

Шаг 7: Проверяется условие окончания вычислительного процесса:
если $\|f(x_{n+2})\| < \varepsilon$, то конец расчетов, иначе

Шаг 8: Вносится поправка в вычисление шаговой длины, если $\|f(x_{n+2})\| < \|f(x_{n+1})\|$, то $\beta_{n+2} = 1$, иначе – шаговая длина определяется по формуле:

$$\beta_{n+2} = min\left(1, \frac{\gamma_{n+1}\|f(x_n)\|}{\|f(x_{n+2})\|\beta_{n+1}}\right), \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{\beta_{n+1}}{\beta_n}\frac{\|f(x_{n+1})\|}{\|f(x_{n+2})\|}, \tag{7}$$

И осуществляется переход на Шаг 1.

Теорема 1. Пусть оператор f в интересующей нас области D удовлетворяет условиям:

Отображение f является G-дифференцируемым на выпуклом множестве D,

$$\|f'(x)\| \le M < +\infty\ \forall x \in D, \|[f'(x)]^{-1}\| \le B. \tag{8}$$

В D существует решение x^* уравнения (1), $K = \sup_{x\in D}\|f''(x)\|$ и $\varepsilon_0 = KB^2\sqrt{\beta_0}\|f(x_0)\| < 1$.

Тогда итерационный процесс (2)–(7) сходится к решению уравнения x^* со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью, и оценка погрешности n-ого приближения имеет вид

$$\|x_n - x^*\| \le \frac{B\|f(x_0)\|q_0^n}{1-q_0}, q_0 = 1 - \sqrt{\beta_0}(1-\varepsilon_0).$$

Доказательство.

$$\|f(x_{n+1})\| \le \|f(x_n) + f'(x_n)(x_{n+1} - x_n)\| + \sup_{0\le t\le 1}\|f'(x_n + t\Delta x_n) - f'(x_n)\|\,\|x_{n+1} - x_n\| \le \left\|f(x_n) - \sqrt{\beta_n}f(x_n)\right\| + KB^2\beta_n\|f(x_n)\|^2 = \left(1 - \sqrt{\beta_n}(1-\varepsilon_n)\right)\|f(x_n)\| = q_n\|f(x_n)\|, \tag{9}$$

здесь $\varepsilon_n = KB^2\sqrt{\beta_n}\|f(x_n)\|, q_n = 1 - \sqrt{\beta_n}(1-\varepsilon_n)$.

Нетрудно показать, что имеет место равенство

$$\sqrt{\beta_n}\|f(x_n)\| = \sqrt{\beta_{n+1}}\|f(x_{n+1})\| \tag{10}$$

Из условий теоремы и (10) следует, что все $\varepsilon_i = \varepsilon_0$ и, если β_0 и x_0 таковы, что $\varepsilon_0 = KB^2\sqrt{\beta_0}\|f(x_0)\| < 1$, то $q_0 < 1$ и $\varepsilon_i = \varepsilon_0 < 1$. Пусть $n = 0$, тогда из (9) следует, что

$$\|f(x_1)\| \le q_0\|f(x_0)\| < \|f(x_0)\|, \tag{11}$$

и из (10) имеем, что

$$\sqrt{\beta_0}\|f(x_0)\| = \sqrt{\beta_1}\|f(x_1)\|. \tag{12}$$

Сравнивая (10) и (11), имеем, $\sqrt{\beta_0} < \sqrt{\beta_1}$ и $q_1 = 1 - \sqrt{\beta_1}(1-\varepsilon_1) < 1 - -\sqrt{\beta_0}(1-\varepsilon_0) < q_0$.

Применяя метод математической индукции, получим, что последовательность $\{\beta_i\} \nearrow 1$, а последовательность $\{q_i\} \searrow 0$.

Переходя к пределу в (9) при $n \to \infty$, получаем

$$\lim_{n\to\infty}\|f(x_n)\| \le \lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n} q_i\,\|f(x_0)\| = 0. \tag{13}$$

Таким образом, из (13) следует, что $\{f(x_n)\} \to f(x^*) = 0$, тем самым сходимость итерационного процесса к решению доказана.

Покажем, что в процесса счета существует номер k_0, что при $i \geq k_0$ все $\beta_i = 1$

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_n \|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n-1}\|f(x_0)\|^2}{\|f(x_{n+1})\|^2 \beta_{n-1}} = \cdots > +\infty. \quad (14)$$

Из (14) и (4) следует, что $\exists k_0$ такое, что для всех $i \geq k_0$ все $\beta_i = 1$. С этого момента процесс (2)–(7) переходит в классический метод Ньютона с характерной для него скоростью сходимости. Теорема доказана.

Метод 2.

Шаг 1: Решается СЛАУ относительно поправки Δx_n

$$f'(x_n)\Delta x_n = -\beta_n f(x_n), n = 0,1,2 \ldots, \beta_0 \in [10^{-3}, 10^{-1}]. \quad (15)$$

Шаг 2: Производится уточнение вектора x_n:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n \quad (16)$$

Шаг 3: Проверяется условие окончания вычислительного процесса:
если $\|f(x_{n+1})\| < \varepsilon,\ \varepsilon \ll 1,\ \varepsilon$ – параметр останова, то конец расчетов, иначе

Шаг 4: Вносится поправка в вычисление шаговой длины, если $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$, то $\beta_{n+1} = 1$, иначе – шаговая длина определяется по формуле:

$$\beta_{n+1} = min\left(1, \sqrt{\frac{\gamma_n \|f(x_n)\|}{{\beta_n}^2 \|f(x_{n+1})\|}}\right), \gamma_0 = \beta_0^4, \quad (17)$$

Шаг 5: Решается СЛАУ с той же матрицей Якоби относительно поправки Δx_{n+1}

$$f'(x_n)\Delta x_{n+1} = -\beta_{n+1} f(x_{n+1}). \quad (18)$$

Шаг 6: Уточняется вектор x_{n+1}:

$$x_{n+2} = x_{n+1} + \Delta x_{n+1} \quad (19)$$

Шаг 7: Проверяется условие окончания вычислительного процесса:
если $\|f(x_{n+2})\| < \varepsilon$, то конец расчетов, иначе

Шаг 8: Вносится поправка в вычисление шаговой длины, если $\|f(x_{n+2})\| < \|f(x_{n+1})\|$, то $\beta_{n+2} = 1$, иначе – шаговая длина определяется по формуле:

$$\beta_{n+2} = min\left(1, \sqrt{\frac{\gamma_{n+1}\|f(x_{n+1})\|}{{\beta_{n+1}}^2 \|f(x_{n+2})\|}}\right), \gamma_{n+1} = \gamma_n \frac{{\beta_{n+1}}^2}{{\beta_n}^2} \frac{\|f(x_{n+1})\|}{\|f(x_{n+2})\|}. \quad (20)$$

И осуществляется переход на Шаг 1.

Относительно итерационного процесса (15)–(20) может быть сформулирована.

Теорема 2. Пусть оператор f в интересующей нас области D удовлетворяет условиям:

Отображение f является G-дифференцируемым на выпуклом множестве D,

$$\|f'(x)\| \leq M < +\infty\ \forall x \in D, \|[f'(x)]^{-1}\| \leq B \quad (21)$$

В D существует решение x^* уравнения (1), $K = \sup_{x\in D}\|f''(x)\|$ и $\varepsilon_0 = KB^2\beta_0\|f(x_0)\| < 1$.

Тогда итерационный процесс (15) – (20) сходится к решению уравнения x^* со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью, и оценка погрешности n-ого приближения имеет вид

$$\|x_n - x^*\| \leq \frac{B\|f(x_0)\|q_0^n}{1-q_0}, q_0 = 1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0).$$

Доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Процедуры, построенные на основе описанных выше двух многошаговых итерационных процессов, показали высокую эффективность.

Список цитированных источников

1. Жанлав,Т. О сходимости на основе непрерывного метода Ньютона / Т. Жанлав, И.В. Пузынин // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 1992. – Т. 32. – № 6. – С. 846–856.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютовские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М.Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 186 с.