МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задачи и упражнения
для студентов специальностей
факультета электронно-информационных систем

Репозиторий БрГТУ

Брест 2012

УДК 517:004 (075.8)

В настоящей учебно-методической разработке рассматриваются задачи и упражнения по числовым и функциональным рядам, функциям комплексной переменной и преобразованию Лапласа, линейным разностным уравнениям, изучаемые студентами специальностей факультета электронно-информационных систем. Часть задач сопровождается решениями или указаниями, задачи, предназначенные для индивидуальной работы, – ответами. В начале параграфов даются краткие теоретические сведения.

Составители: **Гладкий И.И.**, доцент,
Дерачиц Н.А., ассистент,
Дудкин А.А., д.т.н., доцент,
Журавель М.Г., ассистент,
Лебедь С.Ф., к.ф.-м.н., доцент.

Рецензент: Матысик О.В., заведующий кафедрой алгебры и геометрии учреждения образования «БрГУ А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

Учреждение образования
© «Брестский государственный технический университет», 2012

Репозиторий БрГТУ

I. ЧИСЛОВЫЕ РЯДЫ

1.1. Основные понятия. Необходимый признак сходимости

Рядом называется бесконечная сумма вида

$$u_1 + u_2 + u_3 + ... + u_n + ... = \sum_{n=1}^{\infty} u_n , \qquad (1.1.1)$$

где $u_1, u_2, ..., u_n, ...$ — последовательность чисел или функций.

Ряд *задан*, если известен его общий член $u_n = f(n)$, $n \in N$. n – ой частичной суммой ряда называется сумма n первых членов ряда: $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$. Конечный предел частичной суммы при $n \to \infty$ называется *суммой* ряда: $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$.

Если S является коненым числом, то ряд называется сходящимся. Если предел частичной суммы не существует или бесконечен, то ряд называется расходящимся.

Необходимый признак сходимости. Если ряд (1.1.1) сходится, то его общий член стремится к нулю, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

Если общий член *не стремится к нулю*, т.е. $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$, то ряд *расходится.*

Геометрический ряд

$$a + aq + aq^2 + ... + aq^{n-1} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} aq^{n-1} = \frac{a}{1-q}, \quad \textit{если} \quad |q| < 1.$$

Гармонический ряд

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ... = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty, \text{ т.е. расходится.}$$

Задания для аудиторной работы

1. Записать формулу n-го члена ряда по указанным членам

а) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + ... + u_n + ...$;

б) $1 + \frac{2}{2} + \frac{3}{4} + \frac{4}{8} + ... + u_n + ...$;

в) $1 + \frac{1\cdot 3}{1\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{1\cdot 4\cdot 7} + \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{1\cdot 4\cdot 7\cdot 10} + ... + u_n + ...$;

г) $\frac{3}{4} + \frac{4}{9} + \frac{5}{16} + \frac{6}{25} + ... + u_n + ...$.

2. Выписать 4-5 первых членов ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ по известному общему члену ряда:

а) $u_n = \frac{3n-2}{n^2+1}$; б) $u_n = \frac{1}{\left(3 + (-1)^n\right)^n}$; в) $u_n = \frac{\left(2 + \sin\frac{n\pi}{2}\right)\cos n\pi}{n!}$.

Репозиторий БрГТУ

3. Исследовать ряд на сходимость

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{(n+1)\cdot n}+... \quad .$$

4. Показать, что ряд сходится, найти его сумму

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2}{5}\right)^{n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{4^{n}}$;

г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}q^{n}\left(1+q^{n}\right)$, где $|q|<1$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{5^{n}+2^{n}}{10^{n}}$.

5. Исследовать сходимость рядов, применив необходимый признак сходимости

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{2n+3}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt[n+1]{10}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{3+2n^{2}}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^{n}}{n}$.

1.2. Признаки сравнения рядов с положительными членами

1. Если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$.

2. Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n\neq 0$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ расходится.

3. Если $\lim\limits_{n\to\infty}u_n=0$, то ряд может сходиться или расходиться.

4. Даны два ряда с положительными членами:

$$u_1+u_2+...+u_n+..., \qquad (1.2.1)$$

$$v_1+v_2+...+v_n+... . \qquad (1.2.2)$$

а) если $u_n\leq v_n$ и ряд (1.2.2) сходится, то сходится и ряд (1.2.1).

б) если $u_n\geq v_n$ и ряд (1.2.2) расходится, то расходится и ряд (1.2.1).

в) если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=A$ $(\neq 0$ и $\neq\infty)$, то ряды (1.2.1) и (1.2.2) сходятся или расходятся одновременно.

Задания для аудиторной работы

Исследовать сходимость рядов, используя необходимый признак и признаки сравнения

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{2}}$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n^{2}+1}}$; 4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{3}\right)^{n}$;

5. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{\ln n}$; 6. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^{2}}{3+2n^{2}}$; 7. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n^{2}+1}{n^{2}}$; 8. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{3}{\sqrt{n}}$;

Репозиторий БрГТУ

9. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$;   10. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(3n+1)^2}$;   11. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} tg\,\frac{\pi}{2^{n+1}}$;   12. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2+1}{n^3+5n+7}$.

Задания для индивидуальной работы

1. Запишите простейшую формулу общего члена u_n ряда по указанным первым его членам.

2. Найдите сумму ряда.

3–5. Исследуйте сходимость рядов с помощью необходимого признака или признаков сравнения.

I.	II.
1. $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\ldots+u_n+\ldots$.	1. $\frac{1}{2}+\frac{3}{4}+\frac{5}{8}+\frac{7}{16}+\frac{9}{32}+\frac{11}{64}+\ldots$.
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(5n-4)(5n+1)}$.	2. $1-\frac{3}{4}+\frac{9}{16}-\frac{27}{64}+\ldots+(-1)^{n-1}u_n+\ldots$.
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n^2+4}{n^2+3n+7}$.	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,\mathrm{tg}\frac{3}{n}$.
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{3}{8}\right)^n$.	4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\left(\frac{2}{7}\right)^n$.
5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\ln\frac{n+2}{n}$.	5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\arcsin\frac{1}{\sqrt[4]{n}}$.

1.3. Достаточные признаки сходимости знакоположительных рядов

Пусть задан знакоположительный ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n,\quad u_n>0. \qquad (1.3.1)$$

Признак Даламбера. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\mathrm{k}$, то при $\mathrm{k}<1$ ряд (1.3.1) сходится, при $\mathrm{k}>1$ ряд (1.3.1) расходится.

Радикальный признак Коши. Если $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\mathrm{k}$, то при $\mathrm{k}<1$ ряд (1.3.1) сходится, при $\mathrm{k}>1$ — расходится.

При $\mathrm{k}=1$ признаки ответа не дают.

Интегральный признак Коши. Если $u_n=f(n)$ и $f(x)$ — убывающая функция при $x\geq 1$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ и несобственный интеграл $\int\limits_1^{\infty}f(x)dx$ сходятся или расходятся одновременно.

Репозиторий БрГТУ

<u>Обобщенный гармонический ряд (ряд Дирихле):</u>

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}\to\begin{cases}\text{сходится,} & \textit{если } p>1,\\ \text{расходится,} & \textit{если } 0<p\le 1.\end{cases}$$

<u>Формула Стирлинга:</u>

$$n!\approx\sqrt{2\pi n}\,\frac{n^n}{\mathrm{e}^n}\cdot\mathrm{e}^{\frac{\theta}{12n}},\ \ 0<\theta<1.$$

Задания для аудиторной работы

Исследовать на сходимость ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{e^{2n+1}}{n!}$;

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 4\cdot 9\ldots n^2}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\ldots(2n-1)}$;

3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+2}\right)^n$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{5n+3}\right)^n$;

5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3^n\cdot n!}{n^n}$;

6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$;

7. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^2-n}$;

8. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\sqrt[3]{n}-\sqrt{n}}$.

9. Убедиться в том, что признак Даламбера неприменим к ряду $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$, где $u_{2k-1}=\frac{2^{k-1}}{3^k}$, $u_{2k}=\frac{2^k}{3^k}$, тогда как по признаку Коши этот ряд сходится.

Задания для индивидуальной работы

Исследуйте знакоположительные ряды на сходимость с помощью признака Даламбера, радикального или интегрального признаков Коши:

I.	II.
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2^n\cdot n!}{n^3}$;	1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3n+2}{(n+1)!}$;
2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{4\cdot 8\cdot 12\cdot\ldots(4n)}$;	2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n+1)}{1\cdot 4\cdot\ldots\cdot(3n-2)}$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{2n-1}{3n+8}\right)^n$;	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}n^n\,\mathrm{tg}^n\frac{1}{3n}$;

Репозиторий БрГТУ

4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)\ln^2(n+1)}$;	4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{n^3+5}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\frac{2n+7}{\sqrt{n^5+3}}$.	5. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4n+1}{n^3+2}$.
Отв.: 1. расх.; 2. сх.; 3. сх.; 4. сх.; 5. сх.	Отв.: 1. сх.; 2. сх.; 3. сх.; 4. расх.; 5. сх.

1.4. Признак Лейбница сходимости знакочередующихся рядов. Абсолютная и условная сходимость знакопеременных рядов

Ряд, содержащий как положительные, так и отрицательные члены, называется <u>знакопеременным</u>:

$$\sum_{n=1}^{\infty}u_n\,, \tag{1.4.1}$$

где $u_n>0$ или $u_n<0$.

Пусть задан знакопеременный ряд (1.4.1), составим ряд из абсолютных величин членов ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|=|u_1|+|u_2|+\ldots+|u_n|+\ldots\,. \tag{1.4.2}$$

Если ряд (1.4.2) сходится, то сходится и ряд (1.4.1), причем сходимость ряда (1.4.1) называется <u>абсолютной.</u>

Если ряд (1.4.2) расходится, а ряд (1.4.1) сходится, тогда сходимость ряда (1.4.1) называется <u>условной.</u>

Ряд, у которого любые два соседних члена имеют разные знаки, называется <u>знакочередующимся</u>:

$$a_1-a_2+a_3-a_4+\ldots+(-1)^{n-1}a_n+\ldots=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n\,, \tag{1.4.3}$$

где $a_n>0$.

<u>Признак Лейбница.</u> Знакочередующийся ряд (1.4.3) сходится условно, если выполнены условия:

1) члены ряда убывают $a_1>a_2>a_3>\ldots>a_n>a_{n+1}>\ldots$,

2) $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$. При этом сумма ряда S удовлетворяет неравенству $0<S\le a_1$.

При замене суммы S сходящегося знакочередующегося ряда (1.4.3) его n-ой частичной суммой S_n ошибка R_n по абсолютной величине не превышает первого из отброшенных членов, т.е. $|S-S_n|=|R_n|\le a_{n+1}$.

Репозиторий БрГТУ

Задания для аудиторной работы

Исследовать на абсолютную и условную сходимости следующие ряды:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}n\cdot 2^{-n}$; 3. $\sum\limits_{n=4}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2-9}$;

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n+5}$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\cos 2\pi\alpha}{n^2+1}$; 6. $\sum\limits_{n=2}^{\infty}(-1)^{n}\frac{\ln n}{n}$

8. Найти сумму ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(0,7)^n}{(n+1)\,!}$, ограничившись тремя его первыми членами. Оценить абсолютную погрешность вычислений.

9. Убедиться в том, что признак Лейбница неприменим к следующим рядам:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{n+1}-1}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+1}\right)$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}-\frac{1}{3^{2n-1}}\right)$.

Выяснить их поведение.

Задания для индивидуальной работы

1.-2. Исследуйте на абсолютную и условную сходимость знакочередующиеся ряды.

3. Установите сходимость знакочередующегося ряда и вычислите его сумму с точностью $\varepsilon = 0,001$.

4. Оцените погрешность, возникающую при замене суммы ряда суммой его первых пяти членов.

I.	**II.**
$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+2}{n\sqrt{n}+1}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^2+2n+3}{4^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{4n+1}{6^n}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n\cdot 3^n}{(2n+1)\cdot 7^n}$; Отв.: 1. сх.усл.; 2. сх. абс.; 3. 0,633; 4. 0,003.	$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{2n+3}{n^4+5}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{6n^2+7}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3n+2}{n\,!}$; $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n^3+3}{7^n}$; Отв.: 1. сх. абс.; 2. сх. усл.; 3. 2,368; 4. 0,002.

Репозиторий БрГТУ

II. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ РЯДЫ

2.1. Область сходимости функциональных и степенных рядов. Действия над степенными рядами

Дан функциональный ряд

$$u_1(x)+u_2(x)+...+u_n(x)+...=\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x) \qquad (2.1.1)$$

Множество всех точек x, при которых ряд сходится, называется его областью сходимости, а функция

$$S(x)=\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}u_k(x) \qquad (2.1.2)$$

− суммой ряда.

В простейших случаях для определения области сходимости функционального ряда можно применять к нему известные признаки сходимости, считая x фиксированным.

Степенным называется функциональный ряд вида

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n=a_0+a_1(x-x_0)+a_2(x-x_0)^2+...+a_n(x-x_0)^n+..., \qquad (2.1.3)$$

где a_n $(n=0,1,2,...)$ − заданные постоянные числа, коэффициенты ряда.

Если $x_0=0$, ряд принимает вид

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=a_0+a_1x+a_2x^2+...+a_n x^n+... \qquad (2.1.4)$$

Радиусом сходимости ряда (2.1.4) является число R такое, что при $|x|<R$ ряд сходится, а при $|x|>R$ — расходится. Интервал $(-R;R)$ называется в этом случае интервалом сходимости ряда (2.1.4). При $x=\pm R$ ряд (2.1.4) может сходиться или расходиться.

Аналогично определяется радиус и интервал сходимости для ряда (2.1.3): если при $|x-x_0|<R$ ряд сходится, а при $|x-x_0|>R$ — расходится, то R — радиус его сходимости, $(x_0-R,\ x_0+R)$ — интервал сходимости ряда (2.1.3).

Радиус сходимости степенного ряда находится с помощью признака Даламбера или радикального признака Коши.

Степенной ряд внутри интервала сходимости можно почленно дифференцировать и интегрировать:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}(x-x_0)^n;$$

Репозиторий БрГТУ

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}(x-x_0)^{n+1}+C.$$

Эти ряды имеют тот же интервал сходимости, что и исходный ряд (2.1.3).

Задания для аудиторной работы

Найти область сходимости следующих рядов:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n n^{-x}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{x^n}$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nx}{e^{nx}}$;
4. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{ln^n x}{n}$;
5. $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{x-2}{1-2x}\right)^n$;
6. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n\cdot 3^n}{(x+2)^n}$;
7. $\sum_{n=1}^{\infty}e^{-n^2x}$;
8. $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4^n x^n}{3^n\sqrt{(n+1)^3}}$;
9. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^n}{(2n+1)\cdot 5^n}$.

10. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(0,2)^n}{(n+1)\cdot(4n+3)}$ с точностью до 0,01.

11. Оценить погрешность при замене $S\approx S_n$. Найти сумму ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n\cdot n^2}$ с точностью до 0,001.

Пример. Оценить погрешность при замене суммы ряда его частичной суммой. Найти сумму ряда:

а) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n^3}$ с точностью до 0,001.

б) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{3^n\cdot n^3}$ с точностью до 0,001.

Решение

а) Дан знакоположительный ряд.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n\cdot n^3}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3^2\cdot 2^3}+\frac{1}{3^3\cdot 3^3}+\frac{1}{3^4\cdot 4^3}+\ldots+\frac{1}{3^n\cdot n^3}+\frac{1}{3^{n+1}(n+1)^3}+\ldots$$

По признаку Даламбера легко проверить, что ряд сходится, т.е. имеет конечную сумму *S*. Чтобы вычислить эту сумму приближенно с точностью до $\varepsilon=0{,}001$, надо найти число *n* из условия $S-S_n=R_n<\varepsilon$, т.е. $R_n<0{,}001$.

Выпишем остаток ряда и оценим его.

Репозиторий БрГТУ

$$R_n = \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^3} + \frac{1}{3^{n+2}(n+2)^3} + \frac{1}{3^{n+3}(n+3)^3} + \ldots <$$

$$< \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^3} + \frac{1}{3^{n+2}(n+1)^3} + \frac{1}{3^{n+3}(n+1)^3} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{3^{n+1}} \cdot \frac{1}{(n+1)^3}\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{3^3} + \ldots\right) = \frac{1}{3^{n+1}(n+1)^3} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{3}} =$$

$$= \frac{1}{3^n \cdot 3(n+1)^3} \cdot \frac{3}{2} = \frac{1}{2 \cdot 3^n (n+1)^3}.$$

Подбором решаем неравенство:

$$\frac{1}{2 \cdot 3^n (n+1)^3} < \frac{1}{1000}.$$

$$3^n (n+1)^3 > 500.$$

Пусть $n = 2 \Rightarrow \ 3^2 \cdot 3^3 = 3^5 = 243 < 500;$

$n = 3 \Rightarrow \ 3^3 \cdot 4^3 = 12^3 = 1728 > 500.$

Каждое слагаемое считаем до 4-х знаков после запятой, затем сумму округляем до тысячных.

$$S = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n \cdot n^3} \approx S_3 = \frac{1}{3} + \frac{1}{9 \cdot 8} + \frac{1}{3^6} = 0{,}3333 + 0{,}0139 + 0{,}0014 = 0{,}3486.$$

$$S = 0{,}349.$$

б) В знакочередующемся ряду ошибка при замене $S \approx S_n$ не превосходит первого из отброшенных членов.

Вычислим сумму ряда с точностью до 0,001, каждое слагаемое берем с четырьмя знаками после запятой, после сложения округлим результат до 0,001.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3^n \cdot n^2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{72} + \frac{1}{729} - \frac{1}{81 \cdot 64} + \ldots \approx 0{,}3333 - 0{,}0139 + 0{,}0014 -$$

$$-0{,}0002 + 0{,}0000 = 0{,}3206.$$

$S = 0{,}321 \pm 0{,}001.$

Задания для индивидуальной работы

1-3. Найти область сходимости функционального (степенного) ряда.

4. Используя правила почленного дифференцирования и интегрирования степенных рядов, докажите следующие равенства, если $|x| < 1$.

5. С помощью полученных соотношений найдите суммы рядов.

I.	**II.**
1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \sin\frac{x}{3^n}$;	1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} e^{-n\sin x}$;

Репозиторий БрГТУ

2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n+1}{4^n}x^n$;	2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{3^n(n+1)}\cdot x^n$;
3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{(6n+1)^2}\cdot(x-3)^n$;	3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{4n^2-3}(x-2)^n$;
4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}nx^{n-1}=\frac{1}{(1-x)^2}$;	4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(n+1)\cdot nx^{n-1}=\frac{2}{(1-x)^3}$;
5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{5^{n-1}}$;	5. а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{7^{n-1}}$;
б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(n+1)\cdot n}{5^n}$;	б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{7^{n-1}}$;
в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{5^{n-1}}$.	в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)}{7^n}$.
Отв.: 1. $\lvert x\rvert<+\infty$; 2. $-4<x<4$; 3. $2\le x<4$.	Отв.: 1. $2k\pi<x<(2k+1)\pi$; 2. $-3<x<3$; 3. $1\le x<3$.

2.2. Разложение функций в степенные ряды Тейлора и Маклорена

Дана функция $f(x)$, бесконечно дифференцируемая в окрестности точки x_0. Рядом Тейлора функции $f(x)$ называется степенной ряд вида

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)\cdot(x-x_0)+\frac{f''(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\ldots \quad (2.2.1)$$

Ряд (2.2.1) сходится к функции $f(x)$ в интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$, если остаток ряда Тейлора $R_n(x)=\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k\,!}(x-x_0)^k$ стремится к 0 при $n\to\infty$ для всех $x\in(x_0-h,\ x_0+h)$.

Если $x_0=0$, то получаем ряд Маклорена для $f(x)$

$$f(x)=f(0)+f'(0)\cdot x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\ldots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\ldots\ . \quad (2.2.2)$$

Основные разложения в ряд Маклорена, интервалы сходимости рядов:

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}+\ldots,\qquad -\infty<x<\infty;$$

$$\sin x=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots,\qquad -\infty<x<\infty;$$

Репозиторий БрГТУ

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} + \ldots, \qquad -\infty < x < \infty;$$

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1} + \ldots, \quad -1 < x < 1;$$

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \ldots, \qquad -1 < x < 1;$$

$$(1+x)^{\alpha} = 1 + \alpha x + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}x^n + \ldots, \qquad -1 < x < 1.$$

Задания для аудиторной работы

1. Разложить функцию $f(x) = x^5 - 4x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x - 6$ по степеням бинома $x+1$.

2. Представить данные функции их рядом Маклорена, указать область сходимости полученных рядов:

а) e^{-x^2}; б) $x \cdot \cos 2x$; в) $\dfrac{3x+5}{x^2-3x+2}$; г) $\sqrt{1-x^2}\arcsin x$.

3. Разложить в ряд по степеням $x+2$ функцию $f(x) = \dfrac{1}{x^2+4x+7}$.

4. Разложить функцию $f(x) = \ln(x+2)$ в ряд по степеням а) x; б) $x+1$.

Задания для индивидуальной работы

1. Разложите заданные функции в ряд Маклорена, укажите интервал сходимости полученного ряда.

2. Разложите функцию $f(x)$ в ряд Тейлора в окрестности точки x_0, найдите область сходимости полученного ряда.

I.	II.
1. а) $f(x) = \dfrac{x^2}{1+x}$;	1. а) $f(x) = \dfrac{2}{1-3x^2}$;
б) $f(x) = \cos\dfrac{2x^3}{3}$.	б) $f(x) = e^{4x}$.
2. $f(x) = \ln\dfrac{1}{x^2-2x+2}$, $x_0 = 1$.	2. $f(x) = \ln\dfrac{1}{x^2-4x+3}$, $x_0 = -2$.
Отв.: 1. а) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{n+2}$, $\lvert x \rvert < 1$;	Отв.: 1. а) $2\sum\limits_{n=0}^{\infty}3^n x^{2n}$, $\lvert x \rvert < \dfrac{1}{\sqrt{3}}$;
б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n \cdot 2^{2n} x^{6n}}{3^{2n}(2n)!}$, $\lvert x \rvert < \infty$.	б) $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{4^n x^n}{n!}$, $\lvert x \rvert < \infty$.
2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n}(x-1)^{2n}$, $0 \le x \le 2$.	2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{1}{6\cdot 3^n} - \dfrac{1}{10\cdot 5^n}\right)(x+2)^n$, $-5 < x < 1$.

Репозиторий БрГТУ

2.3. Приложения степенных рядов

Степенные ряды применяются для:
а) вычисления значения функций;
б) вычисления определенных интегралов;
в) решения задачи Коши для дифференциальных уравнений.

Задачи для аудиторной работы

Вычислить определенные интегралы с точностью до 0,001

1. $\int\limits_0^1 \cos\sqrt{x}\,dx$; 2. $\int\limits_0^{0,5} \frac{dx}{1+x^6}$.

Найти неопределенные интегралы в виде степенного ряда, указать их область сходимости

3. $\int \frac{e^x-1}{x}dx$; 4. $\int \frac{\ln(1+x)}{x}dx$.

Записать пять ненулевых членов разложения в степенной ряд решения задачи Коши для дифференциальных уравнений:

5. $y' = e^y + xy, \quad y(0) = 0$;

6. $y'' = x^2 + y, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 1$;

7. $y'' + \frac{2}{x}y' + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$.

Задания для индивидуальной работы

1. Используя разложение подынтегральной функции в степенной ряд, вычислите определенный интеграл с точностью до 0,001.
2. Найдите неопределенный интеграл в виде ряда, укажите интервал его сходимости.
3. Запишите пять ненулевых членов ряда решения задачи Коши дифференциальных уравнений.

I.	**II.**
1. $\int\limits_0^{0,5} \sqrt{1+x^3}\,dx$; 2. $\int \frac{\cos x - 1}{x^2}dx$; 3. $y' = 1 + x + x^2 - 2y^2, \; y(1) = 1$. Отв.: 1. 0,508; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot x^{2n-1}}{(2n-1)(2n)!}, \; \lvert x \rvert < \infty$;	1. $\int\limits_0^{1/3} \sqrt{1+x^4}\,dx$; 2. $\int \frac{\sin x - x - x^3}{x^2}dx$; 3. $y' = 2x^2 + y^3, \; y(1) = 1$. Отв.: 1. 0,334; 2. $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cdot x^{2n}}{2n \cdot (2n-1)!} - \frac{7x^4}{24}, \; \lvert x \rvert < \infty$;

Репозиторий БрГТУ

3. $y = 1 + (x-1) - 0,5(x-1)^2 +$ $+0,333(x-1)^3 + 0,167(x-1)^4 -$ $-0,5(x-1)^5 + \ldots$	3. $y = 1 + 3(x-1) + 6,5(x-1)^2 +$ $+16,167(x-1)^3 + 48,125(x-1)^4 + \ldots$.

2.4. Ряды Фурье для 2π-периодических функций

Рядом Фурье 2π-периодической функции $f(x)$ называется тригонометрический ряд

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx), \qquad (2.4.1)$$

коэффициенты определяются по формулам:

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\, dx \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \qquad (2.4.2)$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\, dx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \qquad (2.4.3)$$

Теорема Дирихле. Если функция с периодом 2π кусочно-дифференцируема в промежутке $[-\pi;\pi]$, то ее ряд Фурье сходится в любой точке x_0, причем $S(x_0) = f(x_0)$, если x_0 − точка непрерывности $f(x)$ и $S(x_0) = \dfrac{f(x_0 - 0) + f(x_0 + 0)}{2}$ в точке разрыва функции.

Если $f(x)$ – четная, 2π периодическая функция, т.е.

$$f(-x) = f(x) \text{ и } f(x) = f(x + 2\pi),\ x \in (-\pi;\pi),$$

то ряд Фурье по косинусам кратных дуг имеет вид

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

где $a_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\cos nx\, dx$, $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Если $f(x)$ – нечетная, 2π периодическая функция, т.е.

$$f(-x) = -f(x) \text{ и } f(x) = f(x + 2\pi),\ x \in (-\pi;\pi),$$

то ряд Фурье по синусам кратных дуг имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx,$$

где $b_n = \dfrac{2}{\pi}\displaystyle\int_0^{\pi} f(x)\sin nx\, dx$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Репозиторий БрГТУ

Справедливы равенства:

$\sin \pi n = 0; \quad \cos \pi n = (-1)^n;$

$\int \sin nx\,dx = -\frac{1}{n}\cos nx; \quad \int \cos nx\,dx = \frac{1}{n}\sin nx;$

$\int (Ax+B)\cos nx\,dx = \frac{Ax+B}{n}\sin nx + \frac{A}{n^2}\cos nx;$

$\int (Ax+B)\sin nx\,dx = -\frac{Ax+B}{n}\cos nx + \frac{A}{n^2}\sin nx.$

Задания для аудиторной работы

Разложить в ряд Фурье 2π-периодические функции. Построить графики функции и суммы ряда

1. $f(x) = \begin{cases} ax, & \text{если } -\pi < x < 0, \\ bx, & \text{если } 0 \le x < \pi. \end{cases}$

Рассмотреть случаи: а) $a \ne b$; б) $a = b$; в) $b = -a$.

2. $f(x) = x^2, \quad x \in [-\pi; \pi]$. С помощью полученного разложения вычислить суммы числовых рядов:

а) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$; б) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}$.

3. Функцию $f(x) = 1 - \frac{x}{\pi}$, заданную на интервале $(0;\pi)$, разложить в ряд по: а) синусам кратных дуг; б) косинусам кратных дуг. Построить графики $y = f(x)$ и $y = S(x)$, $x \in R$.

Задания для индивидуальной работы

Разложить в ряд Фурье 2π-периодическую функцию $f(x)$. Постройте графики $y = f(x)$ и $y = S(x)$, $x \in R$.

I.	II.
$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } -\pi < x \le 0, \\ \frac{\pi x}{4}, & \text{если } 0 < x < \pi. \end{cases}$ Отв.: $\frac{\pi^2}{16} - \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2} + \frac{\pi}{4}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}\sin nx}{n}.$	$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{\pi}, & \text{если } -\pi \le x < 0, \\ 1 - \frac{x}{\pi}, & \text{если } 0 \le x < \pi. \end{cases}$ Отв.: $\frac{1}{2} + \frac{4}{\pi^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos(2n-1)x}{(2n-1)^2}.$

Репозиторий БрГТУ

2.5. Ряды Фурье для $2l$ -периодических функций

Если функция $f(x)$, и ее производная $f'(x)$ в промежутке $[-l;l]$ или непрерывна, или имеет конечное число точек разрыва первого рода, то во всех точках непрерывности справедливо разложение

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi x}{l}+b_n\sin\frac{n\pi x}{l}\right),$$

где $a_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=0,1,2,...)$, (2.5.1)

$$b_n=\frac{1}{l}\int\limits_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,3...). \qquad (2.5.2)$$

В точках разрыва $S(x_1)=\frac{f(x_1-0)+f(x_1+0)}{2}$.

В случае разложения функции $f(x)$ в ряд Фурье в произвольном промежутке $[a,a+2l]$ длиной $2l$ пределы интегрирования в формулах (2.5.1) и (2.5.2) следует заменить соответственно на a и $a+2l$.

Если $f(x)-$четная, $2l$ периодическая функция, т.е. $f(-x)=f(x)$ и $f(x)=f(x+2l)$, $x\in(-l;\,l)$, то ряд по косинусам имеет вид:

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\frac{n\pi x}{l},$$

где $a_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=0,1,2,...)$.

Если $f(x)-$нечетная, $2l$ периодическая функция, т.е. $f(-x)=-f(x)$ и $f(x)=f(x+2l)$, $x\in(-l;\,l)$, то ряд по синусам имеет вид:

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin\frac{n\pi x}{l},$$

где $b_n=\frac{2}{l}\int\limits_{0}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad(n=1,2,3...)$.

Задания для аудиторной работы

1. Разложить в ряд Фурье по синусам кратных дуг функцию $y=1-\frac{x}{2}$, заданную на отрезке $[0;2]$. Построить графики функции и суммы ряда для $x\in R$.

Репозиторий БрГТУ

2. Разложить в ряд Фурье по косинусам кратных дуг функцию

$$f(x)=\begin{cases} x, & если \quad 0<x\le 1, \\ 2-x, & если \quad 1<x<2, \ l=2. \end{cases}$$

Пользуясь полученным разложением, вычислить суммы числовых рядов:

а) $1+\dfrac{1}{3^2}+\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\ldots+\dfrac{1}{(2n-1)^2}+\ldots;$

б) $1-\dfrac{1}{3^2}-\dfrac{1}{5^2}+\dfrac{1}{7^2}+\dfrac{1}{9^2}-\dfrac{1}{11^2}\ldots+\dfrac{(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}}{(2n+1)^2}+\ldots.$

Задания для индивидуальной работы

Разложите в ряд Фурье $2l$ - периодическую функцию $f(x)$, заданную на интервале $(0;l)$: а) по синусам, б) по косинусам кратных дуг. Построить графики $y=f(x)$ и $y=S(x)$.

I. $f(x)=1-x,\ x\in(0;2),\ l=2.$ Отв.: а) $\dfrac{8}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2}}{(2n-1)^2};$ б) $\dfrac{2}{\pi}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin n\pi x}{n}.$	**II.** $f(x)=x(1-x),\ x\in(0;1),\ l=1.$ Отв.: а) $\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{\pi^2}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\cos 2\pi n x}{n^2};$ б) $\dfrac{16}{\pi^3}\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{\sin(2n-1)\pi x}{(2n-1)^3}.$

III. ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

3.1. Понятие области. Кривые на комплексной области

Комплексное число $z=x+iy$, где x и y — действительные числа, $i=\sqrt{-1}$ − мнимая единица, изображается точкой комплексной плоскости с координатами (x,y). $x=\operatorname{Re} z$ — действительная часть z, $y=\operatorname{Im} z$ — мнимая часть z.

Множество всех комплексных чисел обозначается $\mathbb{C}$, $z\in\mathbb{C}$. $\mathbb{C}+(z=-\infty)=\overline{\mathbb{C}}$.

Под областью D будем понимать открытое связное множество точек $z\in\mathbb{C}$.

Число $\bar z=x-iy$ называется сопряженным числу $z=x+iy$.

$|z|=\sqrt{x^2+y^2}$, $\arg z=\varphi$, $\cos\varphi=\dfrac{x}{|z|}$, $\sin\varphi=\dfrac{y}{|z|}$.

$z=x+iy$ — алгебраическая форма записи комплексного числа,

Репозиторий БрГТУ

$z = |z| \, (\cos\varphi + i\sin\varphi)$ — тригонометрическая форма,

$z = |z| \, e^{i\varphi}$ — показательная форма записи комплексного числа.

Уравнение $z = x(t) + i\,y(t)$, где $x(t)$ и $y(t)$ — непрерывные функции действительного аргумента t, определяет некоторую кривую на плоскости z. $x = x(t)$, $y = y(t)$ — параметрические уравнения этой линии.

Задания для аудиторной работы

1. Построить на комплексной плоскости область, заданную неравенствами:

а) $|z-1| \le 1, \ |z+1| > 2$;

б) $|z-2| + |z+2| \le 5$;

в) $z \cdot \bar{z} \le 2, \ \mathrm{Re}\, z < 1, \ \mathrm{Im}\, z > -1$;

г) $|z+i| > 1, \ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z < 0$;

д) $|z| - 3\,\mathrm{Im}\, z \le 6$;

е) $|z-i| \le 1, \ -\dfrac{\pi}{2} < \arg(z-i) < \dfrac{\pi}{4}$.

2. Определить вид кривой:

а) $z = 3e^{it} - \dfrac{1}{2e^{it}}$;

б) $z = t^2 + 4t + 20 - i\,(t^2 + 4t + 4)$;

в) $\mathrm{Im}\left(\overline{z^2 - \bar{z}}\right) = 2 - \mathrm{Im}\, z$;

г) $|z-2| = |1 - 2\bar{z}|$;

д) $z = \dfrac{1+i}{1-t} + \dfrac{t\,(2-4i)}{1-t}$.

Задания для индивидуальной работы

1. Построить область D, заданную неравенствами.
2. Определить вид кривой по заданному уравнению, $t \in \mathbb{R}$.

I.	II.
1. а) $\lvert z-1-i\rvert \le 1, \ \mathrm{Im}\, z > 1, \ \mathrm{Re}\, z \ge 1$;	1. а) $\lvert z-2-i\rvert \ge 1, \ 1 \le \mathrm{Re}\, z \le 3, \ 0 < \mathrm{Im}\, z \le 3$;
б) $3\lvert z\rvert - \mathrm{Re}\, z > 12$.	б) $\lvert z\rvert < 2, \ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg(z-1) \le \dfrac{\pi}{4}$.
2. а) $z = -2e^{it} + \dfrac{1}{e^{it}}$;	2. а) $z = \dfrac{1}{\cos t} + i\,2\,\mathrm{tg}\, t$;
б) $z = \dfrac{2+t}{2-t} + i\dfrac{1+t}{1-t}$.	б) $z = \dfrac{1+t}{1-t} + i\dfrac{2+t}{2-t}$.
Отв.: 2. а) $x = -\cos t, \ y = -3\sin t$;	Отв.: 2. а) $y^2 = 4(x^2 - 1)$;
б) $y = \dfrac{3x-1}{3-x}$.	б) $y = \dfrac{3x+1}{x+3}$.

Репозиторий БрГТУ

3.2. Основные элементарные функции комплексной переменной. Образ области *D* при отображении $w = f(z)$

Если каждой точке $z \in D$ по определенному правилу f поставлено в соответствие комплексное число $w = u + iv$, то говорят, что в области D определена функция комплексной переменной $z = x + iy$ и пишут $w = f(z)$.

Если $z = x + iy$, $w = u + iv$, то $w = f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

Основные элементарные функции.

1. *Степенная* $w = z^n = (x + iy)^n$, $n \in \mathbb{N}$;

2. *Показательная* $w = \mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + i\sin y)$. Обладает всеми свойствами действительной показательной функции, имеет период $T = 2\pi i$.

3. *Тригонометрические функции* $\sin z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz} - \mathrm{e}^{-iz}}{2i}$, $\cos z = \dfrac{\mathrm{e}^{iz} + \mathrm{e}^{-iz}}{2}$ периодические с $T = 2\pi$. Справедливы основные формулы для действительных тригонометрических функций. Функции не являются ограниченными, т.е. $|\sin z| \le 1$ или $|\sin z| > 1$, $|\cos z| \le 1$ или $|\cos z| > 1$.

4. *Гиперболические функции* $\mathrm{sh}\, z = \dfrac{\mathrm{e}^z - \mathrm{e}^{-z}}{2}$, $\mathrm{ch}\, z = \dfrac{\mathrm{e}^z + \mathrm{e}^{-z}}{2}$.

Справедливы соотношения

$$\mathrm{sh}\, z = -i\sin(iz),\ \mathrm{ch}\, z = \cos(iz),$$

$$\sin z = \sin x \cdot \mathrm{ch}\, y + i\cos x \cdot \mathrm{sh}\, y,\ \cos z = \cos x \cdot \mathrm{ch}\, y - i\sin x \cdot \mathrm{sh}\, y,$$

$$\mathrm{tg}\, z = \frac{\sin z}{\cos z},\ \mathrm{ctg}\, z = \frac{\cos z}{\sin z},\ \mathrm{th}\, z = \frac{\mathrm{sh}\, z}{\mathrm{ch}\, z},\ \mathrm{cth}\, z = \frac{\mathrm{ch}\, z}{\mathrm{sh}\, z}.$$

Функции z^n, e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\mathrm{sh}\, z$, $\mathrm{ch}\, z$ однозначные, непрерывные для $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$.

5. *Логарифмическая функция* $\mathrm{w} = \mathrm{Ln}\, z = \ln|z| + i\arg z + i2k\pi$, $k \in Z$.

Функция бесконечнозначная, определена и непрерывна для $\forall z \in \overline{\mathbb{C}}$, кроме $z = 0$.

6. *Общая степенная функция* $w = z^\alpha = \mathrm{e}^{\alpha \mathrm{Ln}\, z}$.

7. *Общая показательная функция* $w = a^z = \mathrm{e}^{z\mathrm{Ln} a}$.

8. *Обратные тригонометрические функции.*

$w = \mathrm{Arcsin}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(iz + \sqrt{1 - z^2}\right)$. $\qquad w = \mathrm{Arccos}\, z = -i\,\mathrm{Ln}\left(z + \sqrt{z^2 - 1}\right)$.

$w = \mathrm{Arctg}\, z = \dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\dfrac{1 + iz}{1 - iz}$. $\qquad w = \mathrm{Arcctg}\, z = -\dfrac{1}{2i}\mathrm{Ln}\,\dfrac{1 + iz}{iz - 1}$.

Функции 6-8 бесконечнозначные. Функция $\sqrt{1 - z^2}$ − двузначная.

Дана некоторая область D и функция $w = f(z)$, $z \in D$, $w \in E$.

Репозиторий БрГТУ

Область D ограничена некоторым контуром C, который обходится в направлении против часовой стрелки.

Зная уравнение границы $z = z(t)$, находим ее образ $w = f(z(t))$, получаем линию C'.

На кривой C выбираем три точки и находим их образы, таким способом установим направление на контуре C'. Область E будет оставаться слева при обходе контура C'. Для проверки возьмем внутреннюю точку $z_0 \in D$, тогда точка $w_0 = f(z_0)$ также должна быть внутри области E.

Пример 1. Найти

а) i^{1+i}; б) $\operatorname{Arcsin} 3$; в) $\operatorname{Ln}\left(12+5i\right)$.

Решение

$$i^{1+i} = \mathrm{e}^{(1+i)\operatorname{Ln} i} = \mathrm{e}^{(1+i)(\ln|i|+i\arg i+2k\pi i)} = \mathrm{e}^{(1+i)\left(i\frac{\pi}{2}+2k\pi i\right)} = \mathrm{e}^{(i-1)\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} =$$

$$= \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} \cdot \mathrm{e}^{i\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)} = \mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)}\left(\cos\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)\right) =$$

$$= i\,\mathrm{e}^{-\left(\frac{\pi}{2}+2k\pi\right)},\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{Arcsin} 3 = -i\operatorname{Ln}(3i \pm i\sqrt{8}) = -i\operatorname{Ln}\left(\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right)i\right) =$$

$$= -i\left(\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right) + i\frac{\pi}{2} + 2k\pi i\right) = \frac{\pi}{2} + 2k\pi - i\ln\left(3 \pm 2\sqrt{2}\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

$$\operatorname{Ln}(12+5i) = \ln|12+5i| + i\arg(12+5i) + i\,2k\pi =$$

$$= \left| \begin{array}{l} |12+5i| = \sqrt{144+25} = 13, \\ 12 > 0,\ 5 > 0,\ \arg(12+5i) = \operatorname{arctg}\dfrac{5}{12} \end{array} \right| = \ln 13 + i\left(\operatorname{arctg}\frac{5}{12} + 2k\pi\right),\ k \in \mathbb{Z}.$$

Пример 2. Найти образ области $D:\left(1<|z|<2\right)$ при отображении $w = \dfrac{2}{z-1}$.

Решение

Изобразим на комплексной плоскости z область D – круговое кольцо между окружностями $|z| = 1$ и $|z| = 2$, не включая самих окружностей.

В соответствии с принципом сохранения границ найдем образ линии $|z| = 1$ или $z = \mathrm{e}^{i\varphi}$, $0 \le \varphi \le 2\pi$.

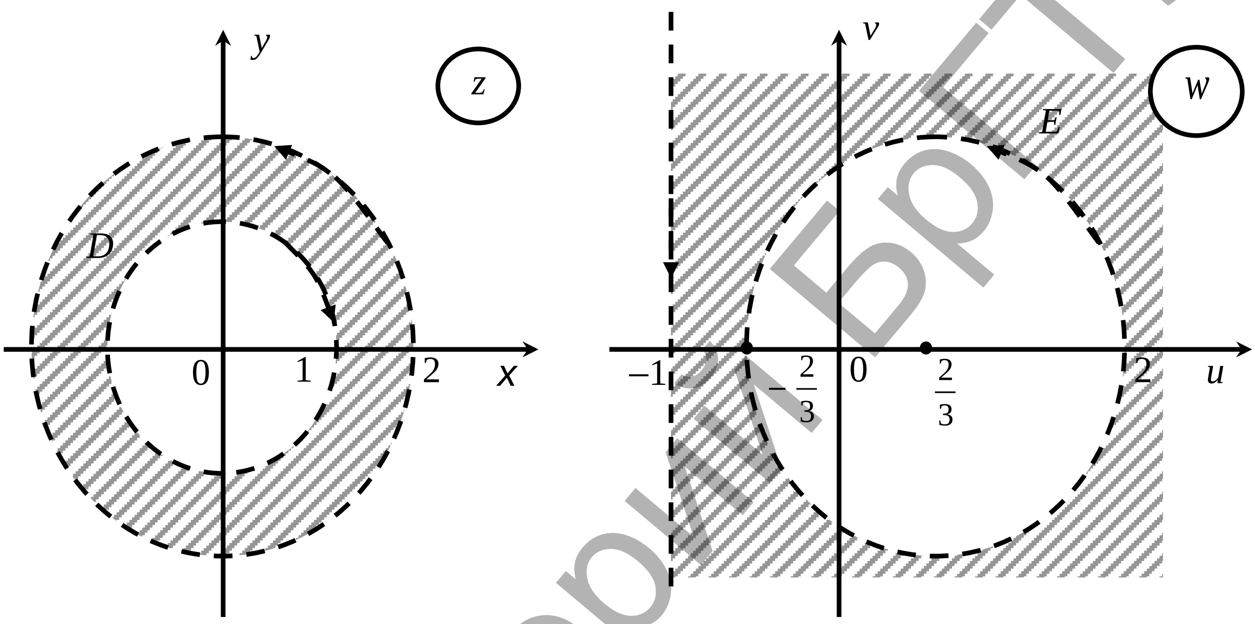
$$w = \frac{2}{\mathrm{e}^{i\varphi}-1} = \frac{2}{\cos\varphi + i\sin\varphi - 1} = \frac{2(\cos\varphi - 1 - i\sin\varphi)}{\left((\cos\varphi-1)+i\sin\varphi\right)(\cos\varphi - 1 - i\sin\varphi)} =$$

Репозиторий БрГТУ

$$=\frac{2(\cos\varphi-1-i\sin\varphi)}{\cos^2\varphi-2\cos\varphi+1+\sin^2\varphi}=\frac{2(\cos\varphi-1-i\sin\varphi)}{2\left(1-\cos\varphi\right)}=-1-i\,\frac{\sin\varphi}{1-\cos\varphi}=$$

$$=-1-i\,\frac{2\sin\frac{\varphi}{2}\cos\frac{\varphi}{2}}{2\sin^2\frac{\varphi}{2}}=-1-i\,\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2},$$

$$w=u+iv \;\Leftrightarrow\; u=-1,\quad v=-\mathrm{ctg}\frac{\varphi}{2},\quad \varphi\in[0;2\pi].$$



В плоскости w имеем прямую. Окружность единичного радиуса переходит в прямую. На окружности берем 3 точки. При обходе границы область D должна оставаться слева.

$z=1(\varphi=0)$	$z=-i\left(\varphi=-\frac{\pi}{2}\right)$	$z=-1(\varphi=-\pi)$
$v=+\infty$ $(\varphi\to 0-0)$	$v=1$	$v=0$

Находим образ окружности $z=2e^{i\varphi}$ $(0\le\varphi\le 2\pi)$.

$$w=\frac{2}{2e^{i\varphi}-1}=\frac{2}{\left(2\cos\varphi-1\right)+2i\cdot\sin\varphi}=\frac{2(2\cos\varphi-1-2i\sin\varphi)}{\left(2\cos\varphi-1\right)^2+4\sin^2\varphi}=$$

$$=\frac{4\cos\varphi-2}{5-4\cos\varphi}-i\,\frac{4\sin\varphi}{5-4\cos\varphi}.$$

Параметрические уравнения образа окружности радиуса 2:

$$\begin{cases} u=\dfrac{4\cos\varphi-2}{5-4\cos\varphi}, \\ v=-\dfrac{4\sin\varphi}{5-4\cos\varphi}, \end{cases}\qquad 0\le\varphi\le 2\pi.$$

Репозиторий БрГТУ

Избавимся от параметра φ.

$$\begin{cases}(5-4\cos\varphi)u = 4\cos\varphi - 2,\\ (5-4\cos\varphi)v = -4\sin\varphi,\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5u+2 = (4+4u)\cos\varphi,\\ \sin\varphi = -\dfrac{1}{4}(5-4\cos\varphi)\,v,\end{cases}$$

$$\cos\varphi = \frac{5u+2}{4(u+1)};\ \ \sin\varphi = -\frac{1}{4}\left(5-\frac{5u+2}{u+1}\right)v = -\frac{1}{4}\,\frac{5u+5-5u-2}{u+1}v = -\frac{3}{4}\,\frac{v}{u+1}.$$

$$\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{5u+2}{4(u+1)},\\ \sin\varphi = -\dfrac{3}{4}\dfrac{v}{u+1}.\end{cases} \qquad \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1, \qquad \frac{(5u+2)^2}{16(u+1)^2} + \frac{9v^2}{16(u+1)^2} = 1.$$

$$(5u+2)^2 + 9v^2 = 16\,(u+1)^2,$$

$$25u^2 + 20u + 4 + 9v^2 = 16u^2 + 32u + 16,$$

$$9u^2 - 12u + 9v^2 - 12 = 0, \quad 3u^2 - 4u + 3v^2 - 4 = 0,$$

$$3\cdot\left(u^2 - \frac{4}{3}u + \frac{4}{9} - \frac{4}{9}\right) + 3v^2 = 4, \quad 3\cdot\left(u - \frac{2}{3}\right)^2 + 3v^2 = 4 + \frac{4}{3}.$$

$\left(u - \dfrac{2}{3}\right)^2 + v^2 = \dfrac{16}{9}$ — окружность с центром в точке $\left(\dfrac{2}{3}, 0\right)$ радиуса $\dfrac{4}{3}$.

Берем точки на окружности $|z| = 2$. Находим их образы.

z	2	$2\,i$	-2	$-2\,i$
w	2	$-\dfrac{2}{5} - i\dfrac{4}{5}$	$-\dfrac{2}{3}$	$-\dfrac{2}{5} + i\dfrac{4}{5}$

$$w_2 = \frac{2}{2i-1} = \frac{-2(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)} = \frac{-2(1+2i)}{5} = -\frac{2}{5} - i\frac{4}{5}.$$

$$w_4 = \frac{2}{-2i-1} = \frac{-2(1+2i)}{(1+2i)(1-2i)} = -\frac{2}{5} + i\frac{4}{5}.$$

Отмечаем на плоскости w. Область E остается слева при обходе ее границ.

Задания для аудиторной работы

Представить в алгебраической форме следующие комплексные числа:

1. $\operatorname{ch}\left(2 + \dfrac{\pi}{4}i\right)$; 2. $\sin\left(\dfrac{3\pi}{4} + i\right)$; 3. $\operatorname{tg}\dfrac{\pi}{2}i$;

4. $\left(-\sqrt{3} + i\right)^{-6i}$; 5. $\operatorname{Ln}(-1-i)$; 6. $\operatorname{Arctg}\dfrac{12-5i}{13}$.

Репозиторий БрГТУ

Найти образ области D при отображении $w = f(z)$.

7. D – треугольник с вершинами $z_1 = 0$, $z_2 = 1$, $z_3 = i$, $w = (1+2i)(1-3z)$.

8. $D: (0 < \operatorname{Re} z < 1)$, $w = z^{-1}$.

9. $D: (1 \le \operatorname{Re} z \le 2,\ 0 \le \operatorname{Im} z \le 1{,}5\pi)$, $w = e^z$.

Задания для индивидуальной работы

1-3. Представьте в алгебраической форме следующие комплексные числа.

4. Найдите образ области D при отображении $w = f(z)$.

I.	**II.**
1. $\cos\left(\dfrac{\pi}{6} - i\right)$;	1. $\operatorname{sh}\left(1 - \dfrac{\pi}{2} i\right)$;
2. $\operatorname{Ln}\left(1 + \sqrt{3}\, i\right)$;	2. $\operatorname{Ln}\left(\sqrt{3} - i\right)$;
3. $\operatorname{Arccos} i$;	3. $(-1-i)^{4i}$;
4. D – треугольник с вершинами $z_1 = -i$, $z_2 = 2 + i$, $z_3 = -3$, $w = (2-i)z + 3i + 5$.	4. $D: \left(1 \le \lvert z \rvert \le 2,\ -\dfrac{\pi}{4} \le \arg z \le \dfrac{\pi}{4}\right)$, $w = z^2$.

3.3. Производная функции комплексной переменной. Условия Коши-Римана. Аналитические и гармонические функции

Пусть функция $w = f(z)$ однозначно определена для $\forall z \in D \subset \overline{\mathbb{C}}$. Если при $\forall \Delta z \to 0$ существует предел

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = f'(z),$$

то он называется производной функции $f(z)$ в точке z, а функция − дифференцируемой в точке z.

Для того, чтобы функция $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ в точке $z = x + i\,y$ была дифференцируемой, необходимо и достаточно, чтобы функции $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ были дифференцируемыми в точке (x,y) и удовлетворяли условиям Коши-Римана:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ и } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Тогда

$$f'(z) = u'_x + i\,v'_x = v'_y(x,y) - i\,u'_y(x,y).$$

Функция $f(z)$, дифференцируемая в точке z и некоторой ее окрестности, называется аналитической в этой точке. Если $f(z)$ − аналитическая для $\forall z \in D$, то она аналитическая в области D.

Репозиторий БрГТУ

Для аналитических функций справедливы основные правила и таблица производных, аналогичные правилам и таблице для действительных дифференцируемых функций.

Если $z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi$ и $f(z) = u(r\cos\varphi, r\sin\varphi) + i\,v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$, то условия Коши-Римана принимают вид

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial\varphi},$$

$$\frac{\partial u(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial\varphi} = -r\,\frac{\partial v(r\cos\varphi, r\sin\varphi)}{\partial r}.$$

Тогда $f'(z)$ записывается так

$$f'(z) = \frac{r}{z}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + i\frac{\partial v}{\partial r}\right) = \frac{1}{z}\left(\frac{\partial v}{\partial\varphi} - i\frac{\partial u}{\partial\varphi}\right).$$

Дана аналитическая функция $w = u(x,y) + i\,v(x,y)$, для нее выполнены условия Коши-Римана. Тогда функции $u = u(x,y)$, $v = v(x,y)$ будут гармоническими, т.е. они удовлетворяют уравнению Лапласа

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \ \text{ и } \ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0.$$

Гармонические функции u и v, удовлетворяющие условиям Коши-Римана, называются сопряженными.

Если функция $u = u(x,y)$ известна, то функцию $v(x,y)$ можно найти по формуле

$$v = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(-u'_y(x,y)\,dx + u'_x(x,y)\,dy\right).$$

Если известна функция $v = v(x,y)$, то функцию $u = u(x,y)$ определим по формуле

$$u = \int\limits_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} \left(v'_y(x,y)\,dx - v'_x(x,y)\,dy\right).$$

Геометрический смысл $\left|f'(z_0)\right|$ и $\arg f'(z_0)$

Пусть $f(z)$ − аналитическая в точке z_0, причем $f'(z_0) \neq 0$. Тогда $\left|f'(z_0)\right|$ равен коэффициенту «растяжения» в точке z_0 плоскости z на плоскость w при отображении $w = f(z)$: если $\left|f'(z_0)\right| > 1$, то имеет место растяжение, при $\left|f'(z_0)\right| < 1$ − сжатие.

Аргумент $f'(z_0)$ геометрически равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к гладкой кривой γ на плоскости z, проходящую через точку z_0, чтобы получить направление касательной в точке

Репозиторий БрГТУ

$w_0 = f(z_0)$ к образу Г этой кривой на плоскости w при отображении $w = f(z)$. Если $\varphi = \arg f'(z_0) > 0$, то поворот происходит против часовой стрелки, а при $\varphi < 0$ − по часовой стрелке.

Задачи для аудиторной работы

Выяснить, какие из следующих функций являются аналитическими хотя бы в одной точке. Найти $w' = f'(z)$.

1. $w = (2-3i)z^2 - iz - i$; 2. $w = i\cos z$; 3. $w = z^2 \cdot \bar{z}$;

4. $w = |z| \cdot \operatorname{Re} z$; 5. $w = \dfrac{z-i}{z+i}$; 6. $w = \bar{z} \cdot \operatorname{Im} z$.

Восстановить аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z)$, если

7. $v = x^2 - y^2 + 2x + 1, \quad f(0) = i$.

8. $u = \dfrac{x}{x^2 + y^2} + x, \quad f(1) = 2$.

9. $u = 1 - e^x \sin y, \quad f(0) = 1 + i$.

Найти коэффициент растяжения k и угол поворота φ в точке z_0 при отображении $w = u(x,y) + iv(x,y)$.

10. $u(x,y) = 3x^2y - y^3, \quad v(x,y) = 3xy^2 - x^3, \quad z_0 = 1 - i$.

11. $u(x,y) = e^{1+y}\cos x, \quad v(x,y) = -e^{1+y}\sin x, \quad z_0 = \dfrac{\pi}{4} + i$.

12. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x, \quad v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 3y - 1, \quad z_0 = -1 + i$.

Задания для индивидуальной работы

1-3. Выясните, какие функции являются аналитическими (найти $w' = f'(z)$), а какие нет.

4. Найдите коэффициент растяжения и угол поворота в точке z_0 при отображении $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$.

5. Восстановите аналитическую в окрестности точки z_0 функцию $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ по заданной действительной или мнимой части.

I.	**II.**
1. $w = (2+5i)z - iz^2 + 3i$;	1. $w = (3+4i)z^2 + 7iz + 6$;
2. $w = ze^z$;	2. $w = \sin 2z$;
3. $w = z \cdot \operatorname{Re}(z^2 - 2z)$;	3. $w = z \cdot \operatorname{Im}(3z - z^2)$;
4. $u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + x^2 - y^2$, $v(x,y) = 3x^2y - y^3 + 2xy$,	4. $u(x,y) = x^2 + 2x - y^2$, $v(x,y) = 2xy + 2y$,

Репозиторий БрГТУ

$z_0 = \dfrac{2i}{3}$. 5. $v = 3x^2y - y^3$, $f(0) = 1$. Отв.: 4. $k = \dfrac{4}{3}\sqrt{2}$; $\varphi = \dfrac{3\pi}{4}$. 5. $w = z^3 + 1$.	$z_0 = i$. 5. $u = e^{-y}\cos x + x$, $f(0) = 1$. Отв.: 4. $k = 2\sqrt{2}$; $\varphi = \dfrac{\pi}{4}$. 5. $w = z + e^{iz}$.

3.4. Интегралы от непрерывных и аналитических функций. Интегральная формула Коши. Формулы для производных

Справедливы следующие утверждения.

а) В односвязной области $D \subset \mathbb{C}$ заданы непрерывная функция $f(z)$ и гладкая ориентированная кривая γ.

$$\int_\gamma f(z)dz = \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\tilde{z}_k)\Delta z_k, \quad \lambda = \max_{1 \le k \le n} |\Delta z_k|. \qquad (3.4.1)$$

Вычисление интеграла от функции $f(z)$ по дуге γ сводится к вычислению двух криволинейных интегралов от действительных функций:

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_\gamma \big(u(x,y) + iv(x,y)\big)(dx + i\,dy) =$$

$$= \int_\gamma \big(u(x,y)dx - v(x,y)dy\big) + i\int_\gamma \big(v(x,y)dx + u(x,y)dy\big) = \left| \begin{matrix} \gamma : z = z(t) \\ \begin{cases} x = x(t), \\ y = y(t), \end{cases} \alpha \le t \le \beta \end{matrix} \right| =$$

$$= \int_\alpha^\beta \Big(u\big(x(t), y(t)\big)\cdot x'(t) - v\big(x(t), y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\,dt +$$

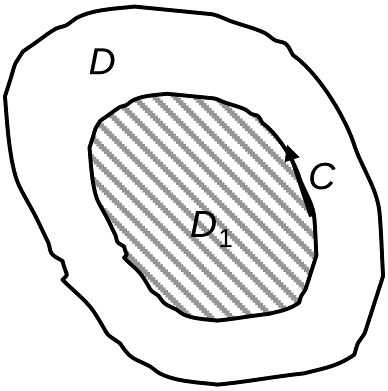
$$+ i\int_\alpha^\beta \Big(v\big(x(t), y(t)\big)\cdot x'(t) + u\big(x(t), y(t)\big)\cdot y'(t)\Big)\,dt = \int_\alpha^\beta f(z(t))\cdot z'(t)dt.$$

Интеграл (3.4.1) обладает свойствами криволинейного интеграла функции действительного аргумента.

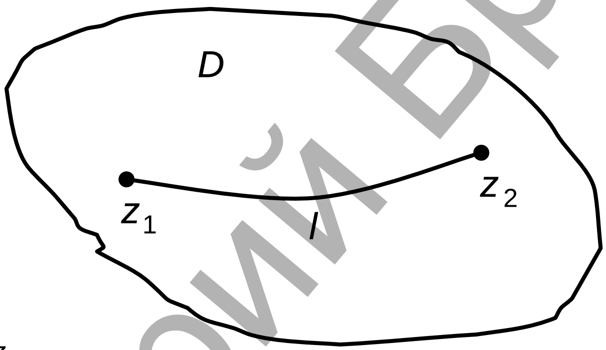
б) *Основная теорема Коши*. Если $f(z)$ − аналитическая в некоторой односвязной области D функция, то $\int f(z)dz$ по любому замкнутому контуру С, целиком лежащему в D, равен 0.

$$\oint_C f(z)dz = 0, \quad f(z) \text{ − аналитическая в } \overline{D}_1 = D_1 \cup C.$$

Репозиторий БрГТУ



в) Если $f(z)$ − *аналитическая функция* для $\forall z \in D$, контур l − разомкнутый, целиком лежит в D, то интеграл $\int\limits_l f(z)dz$ не зависит от пути l, соединяющего точки z_1 и z_2.



$$\int\limits_l f(z)dz = \int\limits_{z_1}^{z_2} f(z)dz = F(z)\Big|_{z_1}^{z_2} = F(z_2) - F(z_1).$$

$F(z)$ − первообразная для $f(z)$, $F'(z) = f(z)$.

г) Пусть $f(z)$ − аналитическая функция для $\forall z \in D, z = a \in D$. Тогда справедлива *интегральная формула Коши*:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(z)}{z-a}dz = f(a).$$

Обычно ее записывают так: заменим z на t, a на z

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(t)}{t-z}dt = \begin{cases} f(z), & z \in D, \\ 0, & z \notin D. \end{cases}$$

Доказано, что аналитическая в $\overline{D}$ функция $f(z)$ имеет в этой области производные всех порядков

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\oint\limits_C \frac{f(t)}{(t-z)^{n+1}}dt, \quad n \ge 1.$$

Репозиторий БрГТУ

Задания для аудиторной работы

Вычислить следующие интегралы от непрерывных или аналитических функций:

1. $\int\limits_{\gamma} \bar{z}^2\, dz$, $\gamma -$ отрезок прямой между точками $z_1 = 0$ и $z_2 = 1 + i$.

2. $\int\limits_{\gamma} z \cdot \bar{z}\, dz$, $\gamma : \left(|z| = 1,\ \operatorname{Im} z \le 0 \right)$.

3. $\int\limits_{\gamma} (\sin i z + z) dz$, $\gamma : \left(|z| = 1,\ \operatorname{Re} z \ge 0 \right)$.

4. $\int\limits_{\gamma} (3z^2 + 2z)\, dz$, $\gamma -$ дуга параболы $y = x^2$ между точками $z = 1 + i$ и $z = 0$.

5. $\int\limits_{0}^{i} z \cos z\, dz$.

6. $\int\limits_{1}^{i} \frac{\ln(z+1)}{z+1} dz$ по дуге окружности $|z| = 1$, $\operatorname{Im} z \ge 0$, $\operatorname{Re} z \ge 0$.

Вычислить интегралы с помощью интегральной формулы Коши или формул для производных:

7. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{2 + \sin z}{z(z + 2i)} dz$;

8. $\oint\limits_{|z-\pi|=1} \frac{(z^2 + \pi)^2}{i \sin z} dz$;

9. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{e^{iz} - 1}{z^3} dz$;

10. $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z+1|=3} \frac{3z^2 + 2z + 4}{\left(z^2 + 4\right) \cdot \sin \frac{z}{2}} dz$;

11. $\oint\limits_{|z|=1} \frac{3z^4 - 2z^3 + 5}{z^4} dz$;

12. $\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{|z-2|=3} \frac{\cos^2 z + 1}{z(z - \pi)} dz$;

13. $\oint\limits_{|z|=4} \frac{dz}{(z^2 + 9)(z + 9)}$;

14. $\oint\limits_{|z-3|=6} \frac{z\, dz}{(z-2)^3 (z+4)}$.

Задания для индивидуальной работы

1. Вычислите интеграл от непрерывной функции $f(z)$.

2-5. Вычислите интегралы с помощью основной теоремы Коши, интегральной формулы Коши, формулы Ньютона-Лейбница.

Репозиторий БрГТУ

I.	II.
1. $\int\limits_{\gamma} \frac{\overline{z}}{z}dz$, $\gamma -$ граница области $(1 \le \lvert z \rvert \le 2,\ \mathrm{Re}\, z \ge 0)$	1. $\int\limits_{\gamma} z \cdot \mathrm{Im}\, z^2 dz$, $\gamma -$дуга параболы $y = x^2$ между точками $z = 0$ и $z = 1 + i$.
2. $\int\limits_{\gamma} (z^3 + \cos z)dz$, $\gamma : (\lvert z \rvert = 1, \mathrm{Re}\, z \ge 0)$.	2. $\int\limits_{\gamma} (3 - 2z^2 + \sin z)dz$, $\gamma : (\lvert z \rvert = 2, \mathrm{Im}\, z \ge 0)$.
3. $\int\limits_{0}^{i} z \sin z\, dz$.	3. $\int\limits_{1+i}^{2i} \left(z^3 + z\right) \mathrm{e}^{\frac{z^2}{2}}\, dz$.
4. $\oint\limits_{\gamma} \frac{2dz}{z^2(z-1)}$, $\gamma : \left(\lvert z - 1 - i \rvert = \frac{5}{4} \right)$.	4. $\oint\limits_{\lvert z-3 \rvert = 1} \frac{\sin 3z + 2}{z^2(z - \pi)} dz$.
5. $\oint\limits_{\lvert z-1 \rvert = 1} \frac{\cos \frac{\pi}{4} z}{(z^2 - 1)^2} dz$.	5. $\oint\limits_{\lvert z-1 \rvert = 3} \frac{z}{z^2 - 2z + 3} dz$.
Отв.: 1. $4i$; 2. 0; 3. $-\frac{i}{e}$; 4. $4\pi i$; 5. $\frac{-\pi i \sqrt{2}}{16}(\pi + 4)$.	Отв.: 1. $-\frac{6}{35} + i$; 2. 0; 3. $2\sin 1 + \cos 1 - 5e^{-2} + i(\sin 1 - 2\cos 1)$; 4. $\frac{4i}{\pi}$; 5. $2\pi i$.

3.5. Числовые ряды в комплексной плоскости. Разложение функции $f(z)$ в ряды Тейлора и Лорана

Числовой комплексный ряд имеет вид

$$\sum_{n=1}^{\infty} C_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + i\, b_n). \tag{3.5.1}$$

Ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Re}\, C_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im}\, C_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ называются соответственно действительной и мнимой частью ряда (3.5.1).

Сходимость ряда (3.5.1) эквивалентна одновременной сходимости двух рядов с действительными членами: его действительной и мнимой части.

Ряд (3.5.1) называется абсолютно сходящимся, если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lvert C_n \rvert = \sum_{n=1}^{\infty} \lvert a_n + i\, b_n \rvert = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2}.$$

Репозиторий БрГТУ

Т.к. $\sqrt{a_n^{\,2}+b_n^{\,2}} \le |a_n|+|b_n|$, то ряд (3.5.1) сходится абсолютно тогда и только тогда, когда сходятся абсолютно ряды $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ и $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

При исследовании на сходимость ряда (3.5.1) применяются все достаточные признаки сходимости действительных рядов с положительными членами.

Степенной комплексный ряд имеет вид

$$C_0 + C_1(z-a) + C_2(z-a)^2 + \ldots + C_n(z-a)^n + \ldots = \sum_{n=0}^{+\infty} C_n (z-a)^n, \qquad (3.5.2)$$

$C_k - (k = 0,1,2,\ldots) \in \mathbb{C}$ − коэффициенты ряда, $a \in \mathbb{C}$.

Из теоремы Абеля следует, что существует круг абсолютной сходимости ряда (3.5.2): $|Z-a| < R$. К ряду из модулей применяют признак Даламбера или радикальный признак Коши и находят R − радиус сходимости.

Если $f(z)$ − аналитическая функция в точке $z = a$, то ее можно представить рядом Тейлора

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n,$$

абсолютно сходящимся при $|z-a| < R$.

Основные разложения и области их сходимости:

$e^z = 1 + z + \dfrac{z^2}{2!} + \dfrac{z^3}{3!} + \ldots + \dfrac{z^n}{n!} + \ldots = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$, сходится абсолютно при $|z| < \infty$;

$\sin z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ и $\cos z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ сходятся абсолютно при $|z| < \infty$;

$\operatorname{sh} z = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{z^{2n-1}}{(2n-1)!}$ и $\operatorname{ch} z = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^{2n}}{(2n)!}$ сходятся абсолютно при $|z| < \infty$;

$\dfrac{1}{1-z} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^n$, сходится абсолютно при $|z| < 1$;

$\ln(1+z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \dfrac{z^n}{n}, \qquad |z| < 1.$

Если $f(z)$ − функция, аналитическая в некоторой окрестности точки a, кроме самой точки, то ее можно представить рядом Лорана

Репозиторий БрГТУ

$$f(z)=\ldots+\frac{C_{-k}}{(z-a)^k}+\frac{C_{-k+1}}{(z-a)^{k-1}}+\ldots+\frac{C_{-1}}{z-a}+C_0+C_1(z-a)+\ldots+C_n(z-a)^n+\ldots,$$

абсолютно сходящимся при $r<\left|z-a\right|<R$.

$$C_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma f(t)(t-a)^{n-1}dt;\quad n\ge 1,\qquad C_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_\gamma \frac{f(t)}{(t-a)^{n+1}}dt;\quad n\ge 0,$$

где $\gamma:\left|z-a\right|=\rho$, где $r<\rho<R$.

$\sum\limits_{n=0}^{\infty}C_n(z-a)^n$ − правильная часть ряда Лорана;

$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{C_{-n}}{(z-a)^n}$ − главная часть разложения.

При разложении элементарных функций в ряд Лорана используют основные разложения.

Задания для аудиторной работы

Исследовать сходимость числовых комплексных рядов:

1. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{(-1)^n}{n}+i\,\dfrac{n}{3^n}\right)$; 2. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{\cos 3n}{n^3}+\dfrac{\sin 4n}{n^4}\cdot i\right)$; 3. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+i\,\dfrac{2n-1}{3n+1}\right)$.

Найти круг сходимости степенных комплексных рядов:

4. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{n+1}{2^n}(z-2+i)^n$; 5. $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{(n+1)!\,(4+3i)^n}{(2n+1)!}z^n$.

Найти комплексную форму ряда Фурье для $2l$ − периодических функций $f(x)$:

6. $f(x)=\begin{cases}0, & \text{если } -\pi\le x<0,\\ e^{-2x}, & \text{если } 0\le x\le\pi.\end{cases}$ 7. $f(x)=\begin{cases}-1, & \text{если } -2<x\le 0,\\ 1, & \text{если } 0<x\le 2.\end{cases}$

Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в кольце K:

8. $f(z)=\dfrac{1}{(z-2)(z-3)}$, $K:\ 2<\left|z\right|<3$.

9. $f(z)=\dfrac{2z-3}{z^2-3z+2}$, $K:\ 0<\left|z-2\right|<1$.

10. $f(z)=\dfrac{2}{(z-1)(z-3)}$, $K:\ 3<\left|z-1\right|<+\infty$.

Разложить в ряд Лорана функцию $f(z)$ в окрестности точки z_0:

11. $f(z)=e^{\frac{z}{z-3}}$, $z_0=3$; 12. $f(z)=\dfrac{1}{z}\sin^2\dfrac{2}{z}$, $z_0=0$;

Репозиторий БрГТУ

13. $f(z)=\ln\dfrac{z-1}{z-2}$, $z_0=\infty$;   14. $f(z)=\cos\dfrac{i}{z^2}+\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=0$.

Задания для индивидуальной работы

1. Найдите круг сходимости степенного ряда.
2. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в конце K.
3. Разложите функцию $f(z)$ в ряд Лорана в окрестности точки z_0.

I.	II.
1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{3n+2}{\left(1+i\sqrt{3}\right)^n}(z+2-i)^n$.	1. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(2n+1)}{(4+i)^n}(z-3+i)^n$.
2. $f(z)=\dfrac{z+2}{z^2+2z-8}$, $K:\ 2<\lvert z+2\rvert<4$.	2. $f(z)=\dfrac{2z+3}{z^2+3z+2}$, $K:\ 1<\lvert z\rvert<2$.
3. $f(z)=\sin\dfrac{z}{z-1}$, $z_0=1$.	3. $f(z)=\ln\dfrac{z-3}{z}$, $z_0=\infty$.
Отв.: 1. $\lvert z+2-i\rvert<2$;	Отв.: 1. $\lvert z-3+i\rvert<\sqrt{17}$.
2. $\dfrac{1}{3}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n2^n}{(z+2)^{n+1}}-\dfrac{1}{6}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(z+2)^n}{4^n}$;	2. $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{z^{n+1}}+\sum\limits_{n=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^nz^n}{2^{n+1}}$;
3. $\sin1+\dfrac{\cos1}{z-1}-\dfrac{\sin1}{2!(z-1)^2}-\dfrac{\cos1}{3!(z-1)^3}+\ldots$, $0<\lvert z-1\rvert<\infty$.	3. $-\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{3^n}{n\cdot z^n}$, $\lvert z\rvert>3$.

3.6. Классификация особых точек. Вычеты

Точка $z=a$, в которой нарушаются условия аналитичности функции $f(z)$, называется *особой* точкой этой функции.

Если в окрестности точки $z=a$ нет других особых точек, то $z=a$ − *изолированная* особая точка.

Изолированные особые точки бывают 3 видов:

1. $z=a$ − устранимая особая точка, если $f(a)=$ нет, $\lim\limits_{z\to a}f(z)=C_0$. В ряду Лорана отсутствуют отрицательные степени $z-a$.

2. $z=a$ − полюс k - го порядка, если $f(a)=$ нет, $\lim\limits_{z\to a}f(z)=\infty$. В ряду Лорана есть конечное число отрицательных степеней, младшая из которых $(z-a)^{-k}$.

3. $z=a$ − существенно особая точка, если $f(a)=$ нет, $\lim\limits_{z\to a}f(z)=$ нет. В ряду Лорана бесконечное множество отрицательных степеней $z-a$.

Репозиторий БрГТУ

Вычетом $f(z)$ в точке $z=a$ называется коэффициент C_{-1} при $(z-a)^{-1}$ в ряду Лорана, т.е.

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=C_{-1}.$$

Если $z=a$ − нуль k - го порядка, то

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=0.$$

Если $z=a$ − полюс k - го порядка, то

$$\operatorname*{Res}_{z=a} f(z)=\frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to a}\Big((z-a)^k f(z)\Big)^{(k-1)},\quad k\ge 1.$$

<u>*Основная теорема о вычетах:*</u>

Если $f(z)$ − аналитическая функция в односвязной области *D*, ограниченной контуром *C*, за исключением точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\oint_C f(z)dz=2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

<u>*Вторая теорема о вычетах:*</u>

Если $f(z)$ − функция, аналитическая в расширенной комплексной плоскости, за исключением конечного числа точек $z_1, z_2, ..., z_n$, то

$$\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)+\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=0.$$

Следовательно $\operatorname*{Res}_{z=\infty} f(z)=-\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),\quad z_k\in\mathbb{C},\quad k=\overline{1,n}$.

Задания для аудиторной работы

Исследовать характер особой точки z_0. Найти вычеты функции $f(z)$ в точке z_0:

1. $f(z)=\dfrac{e^z-1}{\sin\pi z},\ z_0=0$;
2. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4},\ z_0=0$;
3. $f(z)=\dfrac{z^2-1}{z^6+2z^5+z^4},\ z_0=-1$;
4. $f(z)=\cos\dfrac{1}{\pi+z},\ z_0=-\pi$;
5. $f(z)=\dfrac{\sin z}{z^3(1-\cos z)},\ z_0=2\pi$;
6. $f(z)=\dfrac{\sin 4z-4z}{e^z-1-z},\ z_0=0$.

Вычислить интегралы с помощью вычетов:

7. $\displaystyle\oint_{|z|=2}\frac{e^z}{z^2(z+1)}dz$;
8. $\displaystyle\oint_{\gamma}\frac{z\,dz}{(z-1)^2(z+2)},\quad \gamma: x^{2/3}+y^{2/3}=3^{2/3}$;

Репозиторий БрГТУ

9. $\oint\limits_{|z-i|=1} \dfrac{e^z}{z^4+2z^2+1}dz$; 10. $\oint\limits_{|z|=3} \dfrac{\sin z\,dz}{z^2(z^2-4)}$.

Задания для индивидуальной работы

1. Исследуйте характер особой точки z_0, найдите вычет функции $f(z)$ в этой точке.

2-3. Вычислите интегралы с помощью вычетов.

I.	II.
1. $f(z)=\dfrac{e^{z+i}}{z+i}$, $z_0=-i$.	1. $f(z)=\dfrac{1+\cos z}{z-\pi}$, $z_0=\pi$.
2. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=2} \dfrac{e^z\,dz}{z^2(z^2-9)}$.	2. $\oint\limits_{\lvert z\rvert=3} \dfrac{\sin\pi z\,dz}{(z^2-1)^2}$, $\gamma: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$.
3. $\oint\limits_{\lvert z-i\rvert=3} \dfrac{e^{z^2}-1}{z^3-iz^2}dz$.	3. $\oint\limits_{\lvert z-1\rvert=2} \dfrac{\cos\frac{z}{2}}{z^2-4}dz$.
Отв.: 1. 1; 2. $-\dfrac{2}{9}\pi i$; 3. $2\pi i(1-e^{-1})$.	Отв.: 1. 0; 2. $-\pi^2 i$; 3. $\dfrac{\pi i}{2}\cos 1$.

3.7. Вычисление определенных и несобственных интегралов с помощью вычетов

Основная теорема о вычетах позволяет свести вычисление $\oint\limits_C f(z)dz$ к вычислению вычетов подынтегральной функции $f(z)$ относительно изолированных особых точек, расположенных внутри контура C.

Этим методом можно вычислить определенный интеграл вида

$$\mathrm{I}=\int_0^{2\pi} R(\sin t, \cos t)dt,$$

где R – рациональная функция от $\sin t$ и $\cos t$.

Замена $z=e^{it}$ переводит отрезок $[0; 2\pi]$ изменения переменной t в окружность $|z|=1$. При этом

$$\cos t=\frac{e^{it}+e^{-it}}{2}=\frac{z^2+1}{2z}, \qquad \sin t=\frac{e^{it}-e^{-it}}{2i}=\frac{z^2-1}{2iz}, \qquad dt=\frac{dz}{iz},$$

и данный интеграл переходит в интеграл от комплексной переменной z по замкнутому контуру $|z|=1$.

Репозиторий БрГТУ

$$\mathrm{I} = \oint\limits_{|z|=1} R\left(\frac{z^2-1}{2iz};\frac{z^2+1}{2z}\right)\cdot\frac{dz}{iz} = \oint\limits_{|z|=1} f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где $z_k \in \left(|z|<1\right)$, $k = 1,2,3,...,n$.

Отметим два типа *несобственных интегралов* по бесконечному промежутку, к которым можно применить теорию вычетов.

1)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z),$$

где $z_k \in (\operatorname{Im} z > 0)$, $k=\overline{1,n}$. Если функция $f(z)$ удовлетворяет условиям:

1. она аналитическая на действительной оси $x \in \mathbb{R}$;
2. имеет конечное число изолированных особых точек z_k, $k=\overline{1,n}$, принадлежащих верхней полуплоскости $\operatorname{Im} z > 0$; на бесконечности имеет нуль второго и выше порядка.

2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx}F(x)dx = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} e^{itz}F(z),$$

где $t>0$, $z_k \in (\operatorname{Im} z > 0)$, $k=\overline{1,n}$. Если выполнены условия:

1. $F(z)$ − аналитическая на действительной оси функция;
2. имеет в верхней полуплоскости конечное число особых точек;
3. $\lim\limits_{z\to\infty} F(z) = 0$.

Задания для аудиторной работы

Вычислить интегралы:

1. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{13-5\cos t}$;
2. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(3+\sin t)^3}$;
3. $\displaystyle\int_0^{2\pi}\frac{dt}{(5-4\cos t)^2}$;
4. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2+2}{x^4+x^2+12}dx$;
5. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x-1}{(x^2+4)^2}dx$;
6. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)^3}$;
7. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x e^{ix}}{x^2-8x+20}dx$;
8. $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^2 e^{2ix}}{x^4+10x^2+9}dx$.

Репозиторий БРГТУ

Задания для индивидуальной работы

1. Вычислить определенный интеграл с помощью вычетов.

2-3. Вычислить несобственные интегралы с помощью вычетов.

I.	**II.**
1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{5-3\cos t}$.	1. $\int\limits_0^{2\pi} \frac{dt}{4+\sin t}$.
2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+4)^2(x^2+16)}$.	2. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^2(x^2+4)}$.
3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x\,\mathrm{e}^{2ix}}{x^2-10x+26}dx$.	3. $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2\,\mathrm{e}^{2ix}}{x^4+13x^2+36}dx$.
Отв.: 1. $\frac{4\pi}{5}$; 2. $\frac{\pi}{288}$; 3. $\pi e^{-2}\left(5\cos 5-\sin 5+ +i\left(\cos 5-5\sin 5\right)\right)$.	Отв.: 1. $\frac{2\pi}{\sqrt{15}}$; 2. $\frac{2\pi}{27}$; 3. $0{,}2\pi\left(3e^{-3}-2e^{-2}\right)$.

IV. ЭЛЕМЕНТЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

4.1. Преобразование Лапласа. Теоремы линейности и подобия. Теорема запаздывания в оригинале

Функция действительного аргумента $f(t)$ называется *оригиналом*, если она удовлетворяет условиям:

1. $f(t)=0$, при $t<0$;

2. при $t>0$, $f(t)$ − непрерывна, за исключением, быть может, конечного числа точек разрыва первого рода;

3. при возрастании t выполняется неравенство $\left|f(t)\right| \le M\,\mathrm{e}^{\alpha t}$, где M и $\alpha = const$.

Преобразованием Лапласа функции $f(t)$ действительного аргумента называется функция $F(p)$ комплексной переменной, определяемая формулой

$$F(p)=\int\limits_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{e}^{-pt}\,dt\ . \qquad (4.1.1)$$

Функцию $F(p)$, найденную по формуле (4.1.1), будем называть *изображением*.

Соответствие между оригиналом и изображением будем записывать следующим образом:

$$F(p)=L(f(t)).$$

Репозиторий БрГТУ

Изображения некоторых основных функций-оригиналов приведены в таблице:

$f(t)$	1	e^{at}	t^n	$\cos(wt)$	$\sin(wt)$	$\mathrm{ch}(wt)$	$\mathrm{sh}(wt)$
$F(p)$	$\dfrac{1}{p}$	$\dfrac{1}{p-a}$	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$	$\dfrac{p}{p^2+w^2}$	$\dfrac{w}{p^2+w^2}$	$\dfrac{p}{p^2-w^2}$	$\dfrac{w}{p^2-w^2}$

Теорема линейности. Для любых постоянных A и B справедливо равенство:

$$L\big(Af(t)+B\varphi(t)\big)=AL\big(f(t)\big)+BL\big(\varphi(t)\big)=AF(p)+B\Phi(p).$$

Теорема подобия. Если $L(f(t))=F(p)$ и λ — некоторая положительная постоянная, то

$$L(f(\lambda t))=\frac{1}{\lambda}F\left(\frac{p}{\lambda}\right).$$

Теорема запаздывания в оригинале. Если $L\big(f(t)\big)=F(p)$ и τ — любое положительное число, то

$$L(f(t-\tau)\eta(t-\tau))=e^{-p\tau}F(p),$$

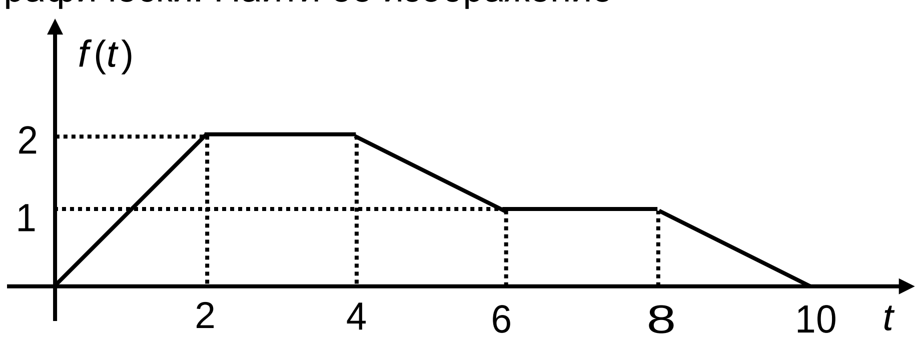
т.е. включение оригинала с запаздыванием на τ соответствует умножению изображения на $e^{-p\tau}$.

Задания для аудиторной работы

Найти изображения для следующих оригиналов:

1. $f(t)=(3t^4-2t^3+t^2-7)\,\eta(t)$;
2. $f(t)=(5\cos t-3\sin t)\,\eta(t)$;
3. $f(t)=(e^{-7t}+4\,\mathrm{sh}\,7t-2\,\mathrm{ch}\,7t)\eta(t)$;
4. $f(t)=\cos^2 8t\cdot\eta(t)$;
5. $f(t)=\mathrm{sh}^3 t\cdot\eta(t)$;
6. $f(t)=((t-1)^2+4(t-1)+6))\cdot\eta(t-1)$;
7. $f(t)=(t^2-4t)\cdot\eta(t-2)$;
8. $f(t)=\sin 2(t-3)\cdot\eta(t-3)$;
9. $f(t)=(t^3-6t^2+4t-8)\cdot\eta(t-1)$.

10. Записать единым аналитическим выражением функцию $f(t)$, заданную графически. Найти ее изображение



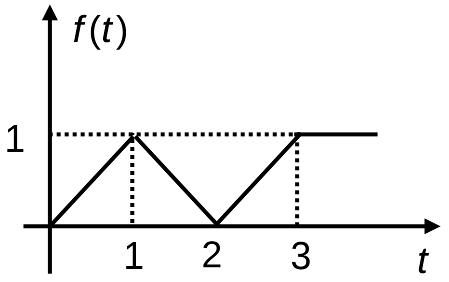
Репозиторий БрГТУ

Задания для индивидуальной работы

Найдите изображения для следующих оригиналов.

I.

1. $f(t) = (3e^{it} - 4\sin t + 7\cos t)\cdot\eta(t)$.
2. $f(t) = \sin 6t\cdot\cos 4t\cdot\eta(t)$.
3. $f(t) = (t^2 - t + 2)\cdot\eta(t-1)$.
4. $f(t) = (2t^2 - 6t)\cdot\eta(t-3)$.
5.



Отв.: 1. $\dfrac{10p - 4 + 3i}{p^2+1}$;

2. $\dfrac{6p^2+120}{(p^2+100)(p^2+4)}$;

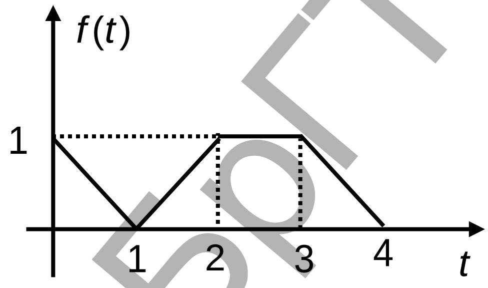
3. $\dfrac{2p^2+p+2}{p^3}e^{-p}$;

4. $\dfrac{6p+4}{p^3}e^{-3p}$;

5. $\dfrac{1}{p^2}(1-e^{-p})(1-e^{-p}+e^{-2p})$.

II.

1. $f(t) = (4e^{3t} + 2\operatorname{sh}3t - 6\operatorname{sh}3t)\cdot\eta(t)$.
2. $f(t) = \sin 8t\cdot\sin 2t\cdot\eta(t)$.
3. $f(t) = (t^2 + 2t + 5)\cdot\eta(t-3)$.
4. $f(t) = (t^2 + 1)\cdot\eta(t-1)$.
5.



Отв.: 1. $\dfrac{18-2p}{p^2-9}$;

2. $\dfrac{32p}{(p^2+100)(p^2+36)}$;

3. $\dfrac{20p^2+8p+2}{p^3}e^{-3p}$;

4. $\dfrac{2(p^2+p+1)}{p^3}e^{-p}$;

5. $\dfrac{1}{p} - \dfrac{1}{p^2}(1-e^{-p})(1-e^{-p}+e^{-3p})$.

4.2. Теорема смещения в изображении. Дифференцирование оригинала и изображения

Теорема смещения в изображении. Если $L(f(t)) = F(p)$ и $\lambda = \text{const}$, то

$$L(e^{\lambda t} f(t)) = F(p-\lambda).$$

Отсюда следуют справедливость формул:

$$L(e^{\lambda t}\cos wt) = \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2+w^2};\qquad L(e^{\lambda t}\sin wt) = \frac{w}{(p-\lambda)^2+w^2};$$

$$L(e^{\lambda t}\operatorname{ch} wt) = \frac{p-\lambda}{(p-\lambda)^2-w^2};\qquad L(e^{\lambda t}\operatorname{sh} wt) = \frac{w}{(p-\lambda)^2-w^2};$$

$$L(e^{\lambda t}\cdot t^n) = \frac{n!}{(p-\lambda)^{n+1}},\quad n \ge 1.$$

Репозиторий БрГТУ

Теорема о дифференцировании оригинала. Пусть функция $f(t)$ n раз непрерывно дифференцируема на промежутке $(0;+\infty)$ и функция $f^{(n)}(t)$ является оригиналом. Тогда:

а) функции $f(t)$, $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(n-1)}(t)$ также оригиналы;

б) существуют пределы:

$$\lim_{t\to 0+0} f(t) = f(+0),$$

$$\lim_{t\to 0+0} f'(t) = f'(+0),$$

...

$$\lim_{t\to 0+0} f^{(n-1)}(t) = f^{(n-1)}(+0);$$

в) если $L(f(t)) = F(p)$, то

$$L\left(f^{(n)}(t)\right) = p^n F(p) - p^{n-1} f(+0) - p^{n-2} f'(+0) - \ldots - f^{(n-1)}(+0).$$

Таким образом, из теоремы следует:

1) при $n = 1 \Rightarrow L\left(f'(t)\right) = pF(p) - f(+0)$,

2) при $n = 2 \Rightarrow L\left(f''(t)\right) = p^2 F(p) - pf(+0) - f'(+0)$.

Если $f(t)$ и ее любые производные непрерывны при t = 0, то

$$L(f^{(n)}(t)) = p^n F(p),$$

т.е. операция дифференцирования оригинала заменяется операцией умножения изображения на p.

Теорема о дифференцировании изображения.

$$L((-t)f(t) = F'(p), \quad L((-t)^2 f(t) = F''(p), \quad \ldots, \quad L((-t)^n f(t) = F^{(n)}(p),$$

так как известно, что $F(p)$ в области существования является функцией аналитической.

Задания для аудиторной работы

Найти изображения для следующих оригиналов:

1. $f(t) = \mathrm{ch}\,t \cdot \sin t$; 2. $f(t) = \mathrm{ch}\,t \cdot \mathrm{sh}\,t$; 3. $f(t) = -t\cos wt$;

4. $f(t) = \mathrm{e}^{4t}\cos t$; 5. $f(t) = t \cdot \mathrm{e}^{-at}$; 6. $f(t) = t^2\,\mathrm{e}^{5t}$;

7. $f(t) = \mathrm{e}^{2(t-1)}\cos 3(t-1) \cdot \eta(t-1)$.

Найти изображения для функций $f(t)$ и $f'(t)$:

8. $f(t) = t \cdot \sin t + \cos t$;

9. $f(t) = \mathrm{e}^{-t}\sin^2 t$;

10. $f(t) = \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{ch}\,t \cdot \sin t + \mathrm{sh}\,t \cdot \cos t\right)$.

Репозиторий БрГТУ

4.3. Обратное преобразование Лапласа. Свертка оригиналов. Теорема Бореля

Сверткой оригиналов $f(t)$ и $\varphi(t)$ называется интеграл вида

$$\int_0^t f(u)\varphi(t-u)du = f*\varphi \tag{4.3.1}$$

Свойства свертки:

1. переместительность $f*\varphi = \varphi * f$;
2. ассоциативность $(f*\varphi)*\psi = f*(\varphi*\psi)$;
3. линейность $\left(\alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2\right)*\varphi = \alpha_1\left(f_1*\varphi\right)+\alpha_2\left(f_2*\varphi\right)$, где $\alpha_1, \alpha_2 = \text{const}$.

Теорема Бореля об умножении изображений.

Если $L(f(t)) = F(p)$ и $L(\varphi(t)) = \Phi(p)$, то свертке оригиналов соответствует произведение изображений

$$L(f(t)*\varphi(t)) = F(p)\cdot\Phi(p) \tag{4.3.2}$$

Обратное преобразование Лапласа

$$f(t) = L^{-1}F(p) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} F(p)\mathrm{e}^{pt}\,dp$$ - формула Меллина.

С учетом формулы Меллина и леммы Жордана получают формулу для нахождения оригинала с помощью вычетов

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{p=p_k} F(p)\mathrm{e}^{pt}. \tag{4.3.3}$$

Если $F(p)$ - рациональная функция, т.е. $F(p) = \dfrac{\Phi(p)}{\Psi(p)}$, где $\Phi(p)$ и $\Psi(p)$ – известные многочлены и $p = p_k$ – простые полюсы, то

$$f(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\Phi(p_k)}{\Psi'(p_k)}\mathrm{e}^{p_k t} \tag{4.3.4}$$

Задания для аудиторной работы

По известному изображению $F(p)$ найдите оригинал $f(t)$:

1. $F(p) = \dfrac{1}{p^{10}}$; 2. $F(p) = \dfrac{1}{(p-3)^5}$; 3. $F(p) = \dfrac{3}{(p-2)^2+9}$;

4. $F(p) = \dfrac{p}{p^2-25}$; 5. $F(p) = \dfrac{p+1}{p^2+2p}$; 6. $F(p) = \dfrac{p-2}{p^2-4p-5}$;

7. $F(p) = \dfrac{\mathrm{e}^{-2p}}{(p+1)^3}$; 8. $F(p) = \dfrac{p+2}{(p+1)(p-2)(p^2+1)}$;

9. $F(p) = \dfrac{5p+8}{p^4-13p^2+36}$; 10. $F(p) = \dfrac{4p}{(p^2+16)(p^2+25)}$.

Репозиторий БрГТУ

Задания для индивидуальной работы

Найдите оригинал по данному изображению:
1. с помощью теоремы Бореля (4.3.2);
2-3. с помощью вычетов (формул (4.3.3)-(4.3.4)).

I.	II.
1. $F(p)=\dfrac{4}{p^2(p^2+16)}$.	1. $F(p)=\dfrac{p^2}{(p^2+4)(p^2+9)}$.
2. $F(p)=\dfrac{4p+5}{(p-2)(p^2+4p+5)}$.	2. $F(p)=\dfrac{p}{(p+1)(p^2+4p+5)}$.
3. $F(p)=\dfrac{p}{p^4+5p^2+4}$.	3. $F(p)=\dfrac{p+3}{p^3+2p^2+3p}$.
Отв.: 1. $\dfrac{t}{4}-\dfrac{1}{16}\sin 4t$.	Отв.: 1. $0{,}2(3\sin 3t-2\sin 2t)$.
2. $\dfrac{13}{17}e^{2t}-e^{-2t}\left(\dfrac{13}{17}\cos t-\dfrac{16}{17}\sin t\right)$.	2. $-0{,}5e^{-t}+0{,}5e^{-2t}\left(\cos t+3\sin t\right)$.
3. $\dfrac{1}{3}(\cos t-\cos 2t)$.	3. $1-e^{-t}\cdot\cos\sqrt{2}\,t$.

4.4. Интегрирование линейных дифференциальных уравнений и систем линейных дифференциальных уравнений операционным методом

Требуется найти решение $y(t)$ линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

$$y^{(n)}+a_1y^{(n-1)}+\ldots+a_{n-2}y''+a_{n-1}y'+a_ny=f(t), \tag{4.4.1}$$

где $f(t)$ — оригинал, удовлетворяющий начальным условиям:

$$y(0)=y_0,\ \ y'(0)=y_0',\ \ y''(0)=y_0'',\ldots,\quad y^{(n-1)}(0)=y_0^{(n-1)}\ . \tag{4.4.2}$$

К обеим частям уравнения (4.4.1) применяем преобразование Лапласа, учитывая, что

$$L(y(t))=Y(p),$$
$$L(y'(t))=pY(p)-y_0,$$
$$L(y''(t))=p^2Y(p)-py_0-y_0',$$
$$\ldots$$
$$L\left(y^{(n)}(t)\right)=p^nY(p)-p^{n-1}y_0-p^{n-2}y_0'-\ldots-p\,y_0^{(n-2)}-y_0^{(n-1)},$$
$$L(f(t))=F(p),$$

получим операторное уравнение вида

$$(p^n+a_1p^{n-1}+\ldots+a_{n-2}p^2+a_{n-1}p+a_n)\,Y(p)+Q(p)=F(p), \tag{4.4.3}$$

где $Q(p)$ – некоторый многочлен, коэффициенты которого зависят от начальных условий (4.4.2).

Репозиторий БрГТУ

Из уравнения (4.4.3) находим операторное решение

$$Y(p) = \frac{F(p) - Q(p)}{Z(p)},$$

где $Z(p) = p^n + a_1 p^{n-1} + ... + a_{n-1} p + a_n$.

Переходя от изображений к оригиналам, получаем решение задачи Коши уравнения (4.4.1) с условиями (4.4.2)

$$y(t) = L^{-1} Y(p) .$$

Аналогично решаются системы ЛДУ с постоянными коэффициентами. После преобразования системы по Лапласу получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно изображений искомых функций, решаем ее. Затем переходим от изображений к оригиналам.

Задания для аудиторной работы

Найти решение задачи Коши для дифференциальных уравнений и систем дифференциальных уравнений:

1. $y'' + y' - 2y = -2(t+1), \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1;$
2. $y'' + y' - 2y = \mathrm{e}^{-t}, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 0;$
3. $y'' + 4y = \sin 2t, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1;$
4. $\ddot{x} + x = f(t), \; x(0) = \dot{x}(0) = 0$, где $f(t) = \begin{cases} \cos t, & \text{если } 0 \le t \le \pi, \\ 0, & \text{если } t > \pi. \end{cases}$
5. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2y + 2, \\ \dot{y} = 4y + 1, \end{cases} \qquad x(0) = 2, \; y(0) = 1.$
6. $\begin{cases} \dot{x} = 2x + 5y, \\ \dot{y} = x - 2y + 2, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \; y(0) = 1.$
7. $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{y} = \mathrm{e}^{t}, \\ \dot{x} + \ddot{y} - y = 0, \end{cases} \qquad x(0) = 1, \; y(0) = -1, \; \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0.$
8. $\begin{cases} \ddot{x} - \dot{y} = f_1(t), \\ x + \dot{y} = f_2(t), \end{cases} \qquad x(0) = y(0) = 0, \; \dot{x}(0) = \dot{y}(0) = 0$, где

$$f_1(t) = \begin{cases} 1, & \text{при } 0 \le t < \pi, \\ 0, & \text{при } t \ge \pi, \end{cases} \qquad f_2(t) = \begin{cases} t, & \text{при } 0 \le t < \dfrac{\pi}{2}, \\ \pi - t, & \text{при } \dfrac{\pi}{2} \le t \le \pi, \\ 0, & \text{при } t \ge \pi. \end{cases}$$

Репозиторий БрГТУ

Задания для индивидуальной работы

Найдите решения задачи Коши:

1. дифференциального уравнения;
2. системы линейных ДУ.

I.	II.
1. $y'' + 2y' + 10y = 2e^{-t}\cos 3t$, $y(0) = 5, \; y'(0) = 1.$	1. $y'' - 9y = \sin t - \cos t$, $y(0) = -3, \; y'(0) = 2.$
2. $\begin{cases} x' = -2x + 5y + 1, \\ y' = x + 2y + 1, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 0, \\ y(0) = 2. \end{cases}$	2. $\begin{cases} x' = x + 4y, \\ y' = 2x - y + 9, \end{cases}$ $\begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0. \end{cases}$
Отв.: 1. $y = e^{-t}\left(5\cos 3t + \left(2 + \frac{t}{3}\right)\sin 3t\right).$ 2. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(6e^{3t} - 5e^{-3t} - 1\right), \\ y = \frac{1}{3}\left(6e^{3t} + e^{-3t} - 1\right). \end{cases}$	Отв.: 1. $y = 0{,}1(\cos t - \sin t - 12e^{3t} - 13e^{-3t})$; 2. $\begin{cases} x = \frac{1}{3}\left(8e^{3t} + 7e^{-3t} - 12\right), \\ y = \frac{1}{3}\left(e^{3t} - 7e^{-3t} + 3\right). \end{cases}$

V. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

5.1. Конечные разности решетчатых функций. Решение линейных однородных разностных уравнений *k* -го порядка с постоянными коэффициентами

Разностные уравнения описывают процессы, происходящие в дискретные моменты времени. Поэтому они широко используются в теории автоматического регулирования и управления при анализе работы дискретных динамических систем.

Для решетчатых функций $f(n)$, $n \geq 0$ определим *конечные разности:*

$$\begin{aligned} &\textit{первого порядка} \; - \; \Delta f(n) = f(n+1) - f(n), \\ &\textit{второго порядка} \; - \; \Delta^2 f(n) = \Delta f(n+1) - \Delta f(n), \\ &\qquad\qquad \ldots \\ &k\textit{-го порядка} \; - \; \Delta^k f(n) = \Delta^{k-1} f(n+1) - \Delta^{k-1} f(n). \end{aligned} \qquad (5.1.1)$$

Из соотношений (5.1.1) можно получить формулу:

$$\begin{aligned} \Delta^k f(n) = f(n+k) - C_k^1\, f(n+k-1) + C_k^2 f(n+k-2) - \ldots + \\ + (-1)^m C_k^m f(n+1-m) + \ldots + (-1)^k f(n), \end{aligned} \qquad (5.1.2)$$

где C_k^m – биномиальные коэффициенты,

$$C_k^m = \frac{k(k-1)\ldots(k-m+1)}{m!} = \frac{k!}{m!(k-m)!}.$$

Значения решетчатой функции в целых точках вычисляют по формуле

$$f(n+k) = f(n) + C_k^1 \cdot \Delta f(n) + C_k^2 \cdot \Delta^2 f(n) + \ldots + C_k^m \cdot \Delta^m f(n) + \ldots + \Delta^k f(n). \qquad (5.1.3)$$

Репозиторий БрГТУ

Линейное разностное уравнение (ЛРУ) имеет вид

$$a_0 x(n+k)+a_1 x(n+k+1)+...+a_{k-1}x(n+1)+a_k x(n)=f(n), \qquad (5.1.4)$$

где $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$, $a_0, a_1,...,a_k = \text{const} \in R$, $f(n)$ – заданная решетчатая функция. Если $f(n) \neq 0$, уравнение (5.1.4.) неоднородное (ЛНРУ); если $f(n)=0$, то (5.1.4) – однородное (ЛОРУ).

Порядок ЛРУ (5.1.4) равен разности наибольшего и наименьшего аргументов искомой функции $x(n)$: $(n+k)-n=k$.

Если воспользоваться формулами (5.1.3), то уравнение (5.1.4) примет вид

$$b_0\Delta^k x(n)+b_1\Delta^{k-1}x(n)+b_2\Delta^{k-2}x(n)+...+b_k x(n)=f(n). \qquad (5.1.5)$$

Порядок разностного уравнения может не совпадать с порядком наивысшей конечной разности, входящей в уравнение (5.1.5).

Пример 1. Определить порядок разностного уравнения

$$\Delta^3 x(n)+4\cdot\Delta^2 x(n)+5\Delta x(n)+2x(n)=0.$$

Решение

Используем соотношения:

$$\Delta x(n)=x(n+1)-x(n),$$

$$\Delta^2 x(n)=x(n+2)-2x(n+1)+x(n),$$

$$\Delta^3 x(n)=x(n+3)-3x(n+2)+3x(n+1)-x(n).$$

Подставляем в уравнение выражения для конечных разностей.

$$x(n+3)+x(n+2)\cdot(-3+4)+x(n+1)\cdot(3-8+5)+x(n)\cdot(-1+4-5+2)=0.$$

$$x(n+3)+x(n+2)=0.$$

Порядок этого разностного уравнения: $k=\left(n+3\right)-\left(n+2\right)=1.$

Ответ. Первый порядок.

Общее решение ЛОРУ k-го порядка

$$a_0 x(n+k)+a_1 x(n+k-1)+...+a_k x(n)=0 \qquad (5.1.6)$$

имеет вид

$$x(n)=\sum_{i=1}^{k} c_i x_i(n),$$

где c_i – любые const $\in R$, $x_i(n)$ – частные линейно независимые решения уравнения (5.1.6) $(i=\overline{1,k})$. Их ищем в виде функции $x(n)=\lambda^n$, в результате приходим к характеристическому уравнению

$$a_0\lambda^k+a_1\lambda^{k-1}+...+a_k=0. \qquad (5.1.7)$$

Решения $x_i(n)$ выписываем по принципу:

а) каждому однократному действительному λ_i соответствует решение разностного уравнения $x_i=\lambda_i^n$;

б) действительному корню λ_i кратности r соответствует r линейно независимых решетчатых функций

Репозиторий БрГТУ

$$x_1(n)=\lambda_i^n;\quad x_2(n)=n\cdot\lambda_i^n;\quad x_3(n)=n^2\cdot\lambda_i^n;\ldots\ ;x_r(n)=n^{r-1}\lambda_i^n;$$

в) каждой паре комплексного сопряженных чисел $\lambda=\alpha\pm i\beta$ соответствует пара действительных решетчатых функций $x_1(n)$ и $x_2(n)$. $\lambda=\alpha+i\beta$ записываем в тригонометрической форме

$\lambda=|\lambda|(\cos(\arg\lambda)+i\sin(\arg\lambda))$, тогда $\lambda^n=|\lambda|^n(\cos(n\arg\lambda)+i\sin(n\arg\lambda))$,

$$x_1(n)=|\lambda|^n\cos(n\arg\lambda) \text{ и } x_2(n)=|\lambda|^n\sin(n\arg\lambda);$$

г) если $\lambda=\alpha+i\beta$ и $\lambda=\alpha-i\beta$ – корни кратности m, то им соответствует $2m$ частных линейно независимых решений уравнения (5.1.6) вида

$$|\lambda|^n\cos(n\arg\lambda);\quad |\lambda|^n\cdot n\cos(n\arg\lambda);\ldots\ldots;\quad |\lambda|^n\cdot n^{m-1}\cos(n\arg\lambda);$$

$$|\lambda|^n\sin(n\arg\lambda);\quad |\lambda|^n\cdot n\sin(n\arg\lambda);\ldots\ldots;\quad |\lambda|^n\cdot n^{m-1}\sin(n\arg\lambda).$$

Пример 2. Найти общее решение уравнения

$$x(n+2)+4x(n+1)+x(n)=0.$$

Решение

Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2+4\lambda+1=0,$$

$$(\lambda+2)^2-3=0,\quad \lambda+2=\pm\sqrt{3},\quad \lambda_1=-2-\sqrt{3};\quad \lambda_2=-2+\sqrt{3}.$$

Общее решение

$$x(n)=c_1(-2-\sqrt{3})^n+c_2(-2+\sqrt{3})^n.$$

Ответ. $x(n)=c_1(-2-\sqrt{3})^n+c_2(-2+\sqrt{3})^n$.

Пример 3. Найти общее решение уравнения

$$x(n+4)-4x(n+3)+6x(n+2)-4x(n+1)+x(n)=0.$$

Решение

Характеристическое уравнение

$$\lambda^4+4\lambda^3+6\lambda^2+4\lambda+1=0,$$

$$(\lambda+1)^4=0,\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=-1.$$

Общее решение имеет вид

$$x(n)=c_1(-1)^n+c_2n(-1)^n+c_3n^2(-1)^n+c_4n^3(-1)^n.$$

$$x(n)=(-1)^n\cdot(c_1+c_2n+c_3n^2+c_4n^3).$$

Ответ. $x(n)=(-1)^n\cdot(c_1+c_2n+c_3n^2+c_4n^3)$.

Пример 4. Найти общее решение уравнения

$$x(n+2)-2x(n+1)+4x(n)=0.$$

Решение

Характеристическое уравнение

$$\lambda^2-2\lambda-4=0.$$

$$(\lambda-1)^2+3=0,\quad \lambda-1=\pm\sqrt{3}i,\quad \lambda_1=1+\sqrt{3}i,\quad \lambda_2=1-\sqrt{3}i.$$

Репозиторий БрГТУ

Запишем λ_1 в тригонометрической форме

$$|\lambda_1| = \sqrt{1+3} = 2,$$

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{\sqrt{3}}{1}, \quad \varphi = \arg\lambda_1 = \frac{\pi}{3},$$

$$\lambda_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$$

Тогда

$$\lambda^n = 2^n\left(\cos\frac{n\pi}{3} + i\sin\frac{n\pi}{3}\right).$$

Соответствующие частные линейно независимые решения разностного уравнения имеют вид

$$x_1(n) = 2^n\cos\frac{n\pi}{3} \text{ и } x_2(n) = 2^n\sin\frac{n\pi}{3}.$$

Общее решение: $x(n) = 2^n\left(c_1\cos\frac{n\pi}{3} + c_2\sin\frac{n\pi}{3}\right)$.

Ответ. $x(n) = 2^n\left(c_1\cos\frac{n\pi}{3} + c_2\sin\frac{n\pi}{3}\right)$.

Пример 5. Найти частное решение ЛОРУ

$$x(n+4) - x(n+2) + 2x(n+1) + 2x(n) = 0,$$

удовлетворяющее условиям $x(0) = 3$, $x(1) = -3$, $x(2) = 2$, $x(3) = -9$.

Решение

Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^4 - \lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0,$$

$$\lambda^2\left(\lambda^2 - 1\right) + 2\left(\lambda + 1\right) = 0, \quad (\lambda+1)(\lambda^2(\lambda-1)+2) = 0.$$

$$\lambda_1 = -1 \text{ или } \lambda^3 - \lambda^2 + 2 = 0.$$

$\lambda_2 = -1$ (подбором определяем).

$$\begin{array}{r|l}
-\ \lambda^3 - \lambda^2 + 2 & \lambda + 1 \\
\underline{\lambda^3 + \lambda^2} \phantom{{}+2} & \overline{\lambda^2 - 2\lambda + 2} \\
-\ -2\lambda^2 + 2 & \\
\underline{-2\lambda^2 - 2\lambda} & \\
-\ 2\lambda + 2 & \\
\underline{2\lambda + 2} & \\
0 &
\end{array}$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

$$(\lambda - 1)^2 + 1 = 0,$$

$$\lambda_{3,4} = 1 \pm i.$$

Репозиторий БрГТУ

Тогда

$$\lambda_1 = -1 \Rightarrow x_1(n) = (-1)^n; \qquad \lambda_2 = -1 \Rightarrow x_2(n) = n \cdot (-1)^n;$$

$$\lambda_3 = 1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad \lambda_3^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} + i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$\lambda_4 = 1 - i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}\right), \qquad \lambda_4^n = \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{n\pi}{4} - i\sin\frac{n\pi}{4}\right),$$

$$\lambda_{3,4} \Rightarrow x_3(n) = \sqrt{2}^n\cos\frac{n\pi}{4}, \qquad x_4(n) = \sqrt{2}^n\sin\frac{n\pi}{4}.$$

Общее решение

$$x(n) = (-1)^n(c_1 + c_2 n) + \sqrt{2}^n\left(c_3\cos\frac{n\pi}{4} + c_4\sin\frac{n\pi}{4}\right).$$

Подберем c_1, c_2, c_3, c_4 так, чтобы выполнялись начальные условия:

$$\begin{cases} x(0) = 3, \\ x(1) = -3, \\ x(2) = 2, \\ x(3) = -9. \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = c_1 + c_3, \\ -3 = -(c_1 + c_2) + \sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)(c_3 + c_4), \\ 2 = c_1 + 2c_2 + 2\left(c_3 \cdot \cos\dfrac{\pi}{2} + c_4\sin\dfrac{\pi}{2}\right), \\ -9 = -(c_1 + 3c_2) + 2\sqrt{2}\left(c_3 \cdot \left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right) + c_4 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right); \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} c_1 + c_3 = 3 \\ c_1 + c_2 - c_3 - c_4 = 3, \\ c_1 + 2c_2 + 2c_4 = 2, \\ c_1 + 3c_2 + 2c_3 - 2c_4 = 9. \end{cases}$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -2 & 9 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & -2 & 6 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 7 & 1 & 6 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 25 & -25 \end{array}\right) \sim \begin{cases} c_1 + c_3 = 2, \\ c_2 - 2c_3 - c_4 = 0, \\ 3c_3 + 4c_4 = -1, \\ c_4 = -1; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = 2, \\ c_2 = 1, \\ c_3 = 1, \\ c_4 = -1. \end{cases}$$

Частное решение имеет вид:

$$x(n) = (-1)^n(n + 2) + \sqrt{2}^n\left(\cos\frac{\pi n}{4} - \sin\frac{\pi n}{4}\right).$$

Репозиторий БрГТУ

Задания для аудиторной работы

Определить порядок следующих разностных уравнений:

1. $\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 6\Delta^2 f(n) + 5\Delta f(n) + 2f(n) = \sin\dfrac{n\pi}{6}$;

2. $\Delta^3 f(n) + 3\Delta^2 f(n) + 3\Delta f(x) + f(n) = n^3 + 1$;

3. $\Delta^3 f(n) + 2\Delta^2 f(n) + \Delta f(n) = 2^n$.

Составить уравнения в конечных разностях:

4. $f(n+4) - f(n) = 2n + 3$;

5. $f(n+3) + 5f(n+2) - 6f(n+1) = 2^n$.

Найти общее (или частное) решение ЛОРУ:

6. $3x(n+2) - 2x(n+1) - 8x(n) = 0$;
7. $x(n+2) + 2x(n+1) + x(n) = 0$, $x(0) = 1$, $x(1) = 0$;
8. $x(n+3) - 3x(n+2) + 4x(n+1) - 2x(n) = 0$;
9. $x(n+3) - 8x(n) = 0$;
10. $x(n+4) + x(n) = 0$, $x(0) = 0$, $x(1) = 1$, $x(2) = 0$, $x(3) = 0$

Задания для индивидуальной работы

1. Определите порядок разностного уравнения.

2-4. Найдите общее или частное решение ЛОР уравнений.

I.

1. $\Delta^4 f(n) + 4\Delta^3 f(n) + 4\Delta^2 f(n) - f(n) = 0$.
2. $x(n+2) - x(n+1) - 2x(n) = 0$, $x(0) = 1$, $x(1) = 2$.
3. $x(n+3) + 2x(n+2) - 16x(n) = 0$.
4. $x(n+4) - 81x(n) = 0$.

Отв. 1. $k = 2$; 2. 2^{n+1};

3. $c_1 \cdot 2^n + \sqrt{8}^n\left(c_2\cos\dfrac{3n\pi}{4} + c_3\sin\dfrac{3n\pi}{4}\right)$;

4. $3^n\left(c_1 + c_2(-1)^n + c_3\cos\dfrac{n\pi}{2} + c_4\sin\dfrac{n\pi}{2}\right)$.

II.

1. $\Delta^3 f(n) + 3\Delta^2 f(n) - 4\Delta f(n) + 5f(n) = n^2 + 1$.
2. $x(n+2) - 3x(n+1) - 10x(n) = 0$, $x(0) = 3$, $x(1) = -1$.
3. $x(n+3) + 3x(n+2) + 9x(n+1) + 27x(n) = 0$.
4. $x(n+4) - 16x(n) = 0$.

Отв. 1. $k = 3$; 2. $\dfrac{1}{7}\left(5^{n+1} + (-1)^n 2^{n+4}\right)$;

Репозиторий БрГТУ

$$3.\ c_1 \cdot (-3)^n + 3^n \left(c_2 \cos\frac{n\pi}{2} + c_3 \sin\frac{n\pi}{2} \right);$$

$$4.\ 2^n \left(c_1 + c_2 (-1)^n + c_3 \cos\frac{n\pi}{2} + c_4 \sin\frac{n\pi}{2} \right).$$

5.2. Решение ЛНРУ с постоянными коэффициентами

Дано ЛНРУ k -го порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0 x(n+k) + a_1 x(n+k-1) + a_2 x\left(n+k-2\right) + ... + a_k x(n) = f(n), \qquad (5.2.1)$$

где $a_0 \neq 0$, $a_k \neq 0$, a_0, a_1, …, $a_k = const \in R$, $f(n)$ – известная решетчатая функция.

Общее решение уравнения (5.2.1) представляет собой сумму общего решения $\overline{x}(n)$ соответствующего однородного уравнения и некоторого частного решения $x^*(n)$ уравнения (5.2.1):

$$x(n) = \overline{x}(n) + x^*(n). \qquad (5.2.2)$$

Если функция $f(n)$ имеет специальный вид, то $x^*(n)$ отыскивается *методом неопределенных коэффициентов*.

а) Пусть

$$f(n) = \mu^n Q_m(n),$$

где $Q_m(n)$ – известный многочлен степени m (решетчатая функция), μ – действительное число.

Частное решение уравнения (5.2.1) будем искать в виде

$$x^*(n) = \mu^n \cdot n^r R_m(n), \qquad (5.2.3)$$

где $r =$кратности числа μ по отношению к корням характеристического уравнения для уравнения (5.2.1). $R_m(n)$ – многочлен степени m с пока неизвестными коэффициентами. Их определим при подстановке (5.2.3) в уравнение (5.2.1).

б) Пусть правая часть $f(n)$ имеет вид

$$f(n) = Q_{m_1}(n)\cos\alpha n + R_{m_2}(n)\sin\alpha n.$$

Тогда

$$x^*(n) = \left(M(n)\cos\alpha n + N(n)\sin\alpha n\right)n^r,$$

где степень многочленов $M(n)$ и $N(n)$ равна $\max\left(m_1, m_2\right)$, число r совпадает с кратностью функций $\cos\alpha n$ и $\sin\alpha n$ в формуле общего решения $\overline{x}(n)$ соответствующего (5.2.1) однородного уравнения.

Пример 1. Найти общее решение ЛНРУ

$$x(n+2) - x(n+1) - 12x(n) = (5n+1) \cdot 2^n.$$

Решение

$$x(n) = \overline{x}(n) + x^*(n).$$

$\overline{x}(n)$ – найдем из соответствующего однородного разностного уравнеия

$$x(n+2)-x(n+1)-12x(n)=0.$$

Составляем характеристическое уравнение

$$\lambda^2-\lambda-12=0,$$

его корни $\lambda_1=-3$, $\lambda_2=4$.

Общее решение однородного разностного уравнения имеет вид

$$\overline{x}(n)=c_1\cdot(-3)^n+c_2\cdot 4^n.$$

Ищем частное решение данного уравнения $x^*(n)$. Правая часть

$$f(n)=(5n+1)\cdot 2^n,$$

причем 2 не является корнем характеристического уравнения, $r=0$.

Значит,

$$x^*(n)=(an+b)\cdot 2^n,$$

a и b – пока неопределенные коэффициенты.

$$x^*(n+1)=(an+b+a)\cdot 2^{n+1}=(2a\cdot n+2b+2a)\cdot 2^n,$$

$$x^*(n+2)=\left(a(n+2)+b\right)\cdot 2^{n+2}=(an+2a+b)\cdot 4\cdot 2^n=(4an+8a+4b)\cdot 2^n.$$

Подставим $x^*(n)$, $x^*(n+1)$ и $x^*(n+2)$ в исходное уравнение:

$$(4an+8a+4b)\cdot 2^n-(2an+2b+2a)\cdot 2^n-12(an+b)\cdot 2^n=(5n+1)\cdot 2^n.$$

$$\underline{4an}+8a+4b-\underline{2an}-2b-2a-\underline{12an}-12b=5n+1.$$

$$-10an+6a-10b=5n+1.$$

Приравняем коэффициенты при одинаковых степенях n:

$$\begin{array}{c|l} n^1 & -10a=5, \\ n^0 & 6a-10b=1, \end{array} \qquad \begin{cases} a=-\dfrac{1}{2}=-0{,}5, \\ 10b=6a-1=-3-1=-4, \end{cases} \qquad \begin{cases} a=-0{,}5, \\ b=-0{,}4. \end{cases}$$

Тогда

$$x^*(n)=-(0{,}5n+0{,}4)\cdot 2^n.$$

Значит, общее решение ЛНРУ принимает вид

$$x(n)=c_1\cdot(-3)^n+c_2\cdot 4^n-(0{,}5n+0{,}4)\cdot 2^n.$$

Ответ. $x(n)=c_1\cdot(-3)^n+c_2\cdot 4^n-(0{,}5n+0{,}4)\cdot 2^n$.

Пример 2. Найти частное решение ЛНРУ

$$x(n+2)+x(n)=\sin 2n,\ x(0)=0,\ x(1)=1.$$

Решение

$$x(n)=\overline{x}(n)+x^*(n).$$

$\overline{x}(n)=?$ $\quad x(n+2)+x(n)=0$, $\quad \lambda^2+1=0$, $\quad \lambda_{1,2}=\pm i$.

$$\lambda_1=i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right),\quad \lambda_2=-i=1\cdot\left(\cos\frac{\pi}{2}-i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

Репозиторий БрГТУ

$$\left(\lambda_{1,2}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{2} \pm i\sin\frac{n\pi}{2}, \quad x_1(n) = \cos\frac{n\pi}{2}; \quad x_2(n) = \sin\frac{n\pi}{2}.$$

Общее решение однородного уравнения $\overline{x}(n) = c_1 \cdot \cos\frac{n\pi}{2} + c_2 \cdot \sin\frac{n\pi}{2}$.

Ищем частное решение $x^*(n)$ данного уравнения. Так как $f(n) = \sin 2n$ и такой функции в $\overline{x}(n)$ нет, то

$$x^*(n) = a\sin 2n + b\cos 2n,$$
$$x^*(n+1) = a\sin 2(n+1) + b\cos 2(n+1),$$
$$x^*(n+2) = a\sin 2(n+2) + b\cos 2(n+2).$$

Подставляем в исходное уравнение $x^*(n)$ и $x^*(n+2)$:

$a\sin(2n+4) + b\cos(2n+4) + a\sin 2n + b\cos 2n = \sin 2n$,

$a\left(\sin(2n+4) + \sin 2n\right) + b\left(\cos(2n+4) + \cos 2n\right) = \sin 2n$,

$2a\sin(2n+2)\cos 2 + 2b\cos(2n+2)\cos 2 = \sin 2n$,

$2a\cos 2\left(\sin 2n \cdot \cos 2 + \cos 2n \cdot \sin 2\right) + 2b\cos 2\left(\cos 2n \cdot \cos 2 - \sin 2n \cdot \sin 2\right) =$
$= \sin 2n$,

$2a\left(\sin 2n \cdot \cos^2 2 + \cos 2n \cdot \sin 2 \cdot \cos 2\right) + 2b\left(\cos 2n \cdot \cos^2 2 - \sin 2n \cdot \sin 2\cos 2\right) =$
$= \sin 2n$.

$$\begin{array}{r|l} \sin 2n & 2a\cos^2 2 - 2b\sin 2\cos 2 = 1, \\ \cos 2n & 2a\sin 2\cos 2 + 2b\cos^2 2 = 0. \end{array}$$

$$\begin{cases} 2a\cos^2 2 - 2b\sin 2\cos 2 = 1, \\ a\sin 2 + b\cos 2 = 0, \end{cases} \quad \begin{cases} -2b\dfrac{\cos^2 2 \cdot \cos 2}{\sin 2} - 2b\sin 2\cos 2 = 1, \\ a = -b\dfrac{\cos 2}{\sin 2}. \end{cases}$$

$$-2b\frac{\cos^3 2 + \sin^2 2\cos 2}{\sin 2} = 1, \quad b = -\frac{\sin 2}{2\cos 2} = -\frac{1}{2}\operatorname{tg} 2; \quad a = \frac{1}{2}.$$

Частное решение данного уравнения получено

$$x^*(n) = \frac{1}{2}\sin 2n - \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2 \cdot \cos 2n.$$

Общее решение

$$x(n) = c_1\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\sin\frac{n\pi}{2} + \frac{1}{2}\sin 2n - \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2\cos 2n.$$

Находим c_1 и c_2, используя начальные условия $x(0) = 0$, $x(1) = 1$.

$x(0) = c_1 - \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2 = 0$, $\qquad c_1 = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2$.

$x(1) = c_1 + \frac{1}{2}\sin 2 - \frac{1}{2}\operatorname{tg} 2 \cdot \cos 2 = 1$, $\qquad c_2 = -\frac{1}{2}\sin 2 + \frac{1}{2}\frac{\sin 2}{\cos 2} \cdot \cos 2 + 1 = 1$.

Репозиторий БрГТУ

Частное решение имеет вид

$$x(n)=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{2}\sin 2n-\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\cdot\cos 2n=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{1}{2\cos 2}\left(\sin 2n\cdot\cos 2-\cos 2n\cdot\sin 2\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\operatorname{tg}2\cdot\cos\frac{n\pi}{2}+\sin\frac{n\pi}{2}+\frac{\sin 2\left(n-1\right)}{2\cos 2}.$$

Если правая часть уравнения (5.2.1) не имеет специального вида, то $x^*(n)$ отыскивают по <u>методу вариации произвольных постоянных</u>.

Пусть дано ЛНРУ второго порядка с постоянными коэффициентами

$$a_0x(n+2)+a_1x(n+1)+a_2x(n)=f(n), \qquad (5.2.4)$$

где a_0, a_1, $a_2=\text{const}\in R$, $a_0\neq 0$, $a_2\neq 0$, f(n) – известная решетчатая функция общего вида.

Находим общее решение однородного уравнения $\left(f(n)=0\right)$

$$\overline{x}(n)=c_1\cdot x_1(n)+c_2\cdot x_2(n),$$

где c_1 и $c_2-\forall\text{const}$, $x_{1,2}(n)$ — частные линейно независимые решения однородного уравнения.

Частное решение $x^*(n)$ уравнения (4) будем искать в виде

$$x^*(n)=c_1(n)\cdot x_1(n)+c_2(n)\cdot x_2(n),$$

Обозначим

$$\begin{cases}c_1(n+1)-c_1(n)=\Delta c_1(n)=\alpha_n,\\ c_2(n+1)-c_2(n)=\Delta c_2(n)=\beta_n.\end{cases} \qquad (5.2.5)$$

Последовательности α_n и β_n определим из системы

$$\begin{cases}\alpha_n\cdot x_1\left(n+1\right)+\beta_n\cdot x_2(n+1)=0,\\ \alpha_n\cdot x_1(n+2)+\beta_n\cdot x_2(n+2)=\dfrac{f(n)}{a_0}.\end{cases} \qquad (5.2.6)$$

Зная α_n и β_n, из (5.2.5) находим $c_1(n)$ и $c_2(n)$ и составляем общее решение исходного уравнения.

Пример 3. Найти частное решение ЛНРУ по методу вариации произвольных постоянных

$$x(n+2)-3x(n+1)+2x(n)=n.$$

Решение

$$x(n)=\overline{x}(n)+x^*(n),$$

$\overline{x}(n)=?$

$$x(n+2)-3x(n+1)+2x(n)=0,$$

$$\lambda^2-3\lambda+2=0,$$

$$\lambda_1=1 \text{ и } \lambda_2=2.$$

$$x_1(n)=1 \text{ и } x_2(n)=2^n.$$

Репозиторий БрГТУ

Общее решение однородного разностного уравнения

$$\overline{x}(n) = c_1 \cdot 1^n + c_2 \cdot 2^n .$$

Будем искать частное решение неоднородного разностного уравнения в виде

$$x^*(n) = c_1(n) \cdot 1^n + c_2(n) \cdot 2^n$$

Найдем $c_1(n)$ и $c_2(n)$ по условиям (5.2.5). Для этого определим по формуле (5.2.6) последовательности α_n и β_n

$$\begin{cases} \alpha_n \cdot 1 + \beta_n \cdot 2^{n+1} = 0, \\ \alpha_n \cdot 1 + \beta_n \cdot 2^{n+2} = n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = -\beta_n \cdot 2^{n+1}, \\ \beta_n \left(2^{n+2} - 2^{n+1}\right) = n, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha_n = -n, \\ \beta_n = \dfrac{n}{2^{n+1}}. \end{cases}$$

Таким образом, получили систему

$$\begin{cases} c_1(n+1) - c_1(n) = -n, \\ c_2(n+1) - c_2(n) = \dfrac{n}{2^{n+1}}. \end{cases}$$

Для решения этих ЛРУ первого порядка не будем использовать метод неопределенных коэффициентов.

Рассмотрим первое разностное уравнение первого порядка

$$c_1(n+1) = c_1(n) - n .$$

Пусть $c_1(0) = c_1$, тогда

$c_1(1) = c_1(0) - 0 = c_1;$

$c_1(2) = c_1(1) - 1 = c_1 - 1;$

$c_1(3) = c_1(2) - 2 = c_1 - 1 - 2 = c_1 - 3;$

$c_1(4) = c_1 - 3 - 3 = c_1 - 6;$

$c_1(5) = c_1 - 10;$

…

$$c_1(n) = c_1 - 1 - 2 - 3 - 4 - \ldots - (n-1) = c_1 - \frac{1 + (n-1)}{2} \cdot (n-1) = c_1 - \frac{n(n-1)}{2}.$$

Решаем уравнение $c_2(n+1) = c_2(n) + \dfrac{n}{2^{n+1}}$.

$c_2(0) = c_2;$

$c_2(1) = c_2 + 0;$

$c_2(2) = c_2 + \dfrac{1}{2^2};$

$c_2(3) = c_2 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{2^3};$

$c_2(4) = c_2 + \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{2}{2^3} + \dfrac{3}{2^4};$

Репозиторий БрГТУ

$$c_2(5)=c_2+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5};$$

…

$$c_2(n)=c_2+\frac{1}{2^2}+\frac{2}{2^3}+\frac{3}{2^4}+\frac{4}{2^5}+...+\frac{n-1}{2^n}=$$

$$=c_2+\frac{1}{2^2}\left(1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+...+(n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-2}}\right)=c_2+\frac{1}{2^n}\cdot c_3\left(n,\frac{1}{2}\right),$$

где $c_3\left(n,\frac{1}{2}\right)=1+2\cdot\frac{1}{2}+3\cdot\frac{1}{2^2}+...+(n-1)\cdot\frac{1}{2^{n-2}}$.

Обозначим $x=\frac{1}{2}$, тогда

$$c_3(n,x)=1+2x+3x^2+...+(n-1)x^{n-2};$$

$$\int c_3(n,x)dx=x+x^2+x^3+...+x^{n-1}=\frac{x-x\cdot x^{n-1}}{1-x}=\frac{x-x^n}{1-x}.$$

Тогда

$$c_3(n,x)=\left(\frac{x-x^n}{1-x}\right)'_x=\frac{\left(1-nx^{n-1}\right)(1-x)+x-x^n}{(1-x)^2}=$$

$$=\frac{1-nx^{n-1}-x+nx^n+x-x^n}{(1-x)^2}=\frac{1-nx^{n-1}+(n-1)x^n}{(1-x)^2}.$$

Подставим $x=\frac{1}{2}$, тогда

$$c_3\left(n,\frac{1}{2}\right)=4\left(1-\frac{n}{2^{n-1}}+\frac{n-1}{2^n}\right)=\frac{2^n-2n+n-1}{2^{n-2}}=\frac{2^n-n-1}{2^{n-2}}.$$

Таким образом,

$$c_2(n)=c_2+\frac{1}{2^2}\cdot\frac{2^n-n-1}{2^{n-2}}=c_2+1-\frac{n+1}{2^n}.$$

Общее решение исходного уравнения

$$x(n)=c_1(n)\cdot 1^n+c_2(n)\cdot 2^n,$$

$$x(n)=c_1-\frac{n(n-1)}{2}+\left(c_2+1-\frac{n+1}{2^n}\right)\cdot 2^n;$$

$$x(n)=c_1+c_2\cdot 2^n+2^n-(n+1)-\frac{n(n-1)}{2};$$

$$x(n)=c_1+c_2\cdot 2^n+2^n-\frac{n^2+n+2}{2}.$$

Ответ. $x(n)=c_1+c_2\cdot 2^n+2^n-\frac{n^2+n+2}{2}$.

Репозиторий БрГТУ

Задания для аудиторной работы

Решить ЛНРУ методом неопределенных коэффициентов.

1. $x(n+2)-4x(n)=4^n$.
2. $x(n+2)-6x(n+1)+9x(n)=n\cdot 3^n, \quad x(0)=0,\ x(1)=0.$
3. $x(n+3)-3x(n+2)+3x(n+1)-x(n)=n^2$.
4. $x(n+3)+3x(n+2)+3x(n+1)+x(n)=\cos n\pi, \quad x(0)=x(1)=x(2)=0.$
5. $x(n+3)+8x(n)=2^n$.

Найти решение ЛНР уравнений методом вариации произвольных постоянных

6. $x(n+2)+4(n+1)+4x(n)=3^n$.
7. $x(n+2)-x(n+1)-2x(n)=n$.

Задания для индивидуальной работы

Решите следующие линейные неоднородные разностные уравнения

I.	**II.**
1. $x(n+2)-6x(n+1)-7x(n)=8n\cdot 3^n$.	1. $x(n+2)-10x(n+1)+25x(n)=$ $=(2n-6)\cdot 3^n$.
2. $x(n+2)-2x(n+1)+x(n)=3n+5$.	2. $x(n+2)-5x(n+1)+6x(n)=24\cdot 3^n$.
3. $x(n+3)+8x(n)=(-2)^n\cdot 48$.	3. $x(n+2)+2x(n+1)+x(n)=\cos n\pi$.
Отв. 1. $c_1\cdot 7^n+c_2(-1)^n-0{,}5n\cdot 3^n$. 2. $c_1+c_2n+0{,}5n^3+n^2$. 3. $(-2)^n(c_1-2n)+$ $+2^n\left(c_2\cos\dfrac{n\pi}{3}+c_3\sin\dfrac{n\pi}{3}\right)$.	Отв. 1. $(c_1+c_2n)\cdot 5^n+0{,}5n\cdot 3^n$. 2. $c_1\cdot 3^n+c_2\cdot 2^n+8n\cdot 3^n$. 3. $(-1)^n(c_1+c_2n-0{,}5n^2)$.

5.3 Решение систем ЛРУ с постоянными коэффициентами

Система двух линейных неоднородных разностных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами имеет вид

$$\begin{cases} x(n+1)=a_{11}x(n)+a_{12}y(n)+f_1(n), \\ y(n+1)=a_{21}x(n)+a_{22}y(n)+f_2(n), \end{cases} \tag{5.3.1}$$

где $a_{ij}=\mathrm{const}\in R$, $i,j=1,2$; $f_i(n)$ $(i=1,2)$ – заданные решетчатые функции.

Требуется найти решетчатые функции $x(n)$ и $y(n)$, удовлетворяющие системе (5.3.1) и начальным условиям $x(n_0)=x_0$, $y(n_0)=y_0$, если они заданы.

Репозиторий БрГТУ

Систему (5.3.1) можно свести к одному разностному уравнению второго порядка относительно одной из искомых функций (метод исключения неизвестных).

$$\begin{cases} x(n+2) = a_{11}x(n+1) + a_{12}y(n+1) + f_1(n+1), \\ y(n+1) = a_{21}x(n) + a_{22}y(n) + f_2(n). \end{cases} \tag{5.3.2}$$

Подставляем $y(n+1)$ в первое уравнение системы (5.3.2)

$$\begin{cases} x(n+2) = a_{11}x(n+1) + a_{12}(a_{21}x(n) + a_{22}y(n) + f_2(n)) + f_1(n+1), \\ y(n) = \dfrac{1}{a_{12}}\left(x\left(n+1\right) - a_{11}x(n) - f_1(n)\right). \end{cases} \tag{5.3.3}$$

После подстановки $y(n)$, взятого из первого уравнения системы (5.3.1), в первое уравнение системы (5.3.3), получим ЛНРУ второго порядка относительно функции $x(n)$. Решив это уравнение, находим $y(n)$ и выписываем общее решение системы (5.3.1).

Пример 1. Найти общее решение системы РУ

$$\begin{cases} x(n+1) = -x(n) + 5y(n), \\ y(n+1) = -x(n) + y(n). \end{cases}$$

Решение

$$\begin{cases} x(n+2) = -x(n+1) + 5y(n+1), \\ y(n+1) = -x(n) + y(n). \end{cases}$$

$$\begin{cases} x(n+2) = -x(n+1) + 5(-x(n) + y(n)), \\ 5y(n) = x(n+1) + x(n). \end{cases}$$

$$x(n+2) = -x(n+1) - 5x(n) + x(n+1) + x(n).$$

Получили ЛОРУ второго порядка относительно функции $x(n)$:

$$x(n+2) + 4x(n) = 0.$$

$$\lambda^2 + 4 = 0,$$

$$\lambda = \pm 2i, \qquad \lambda = 2i = 2\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$$

$$\lambda^n = 2^n\cos\frac{n\pi}{2} + i2^n\sin\frac{n\pi}{2}.$$

$$x(n) = c_1\cdot 2^n\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\cdot 2^n\sin\frac{n\pi}{2}.$$

Найдем функцию $y(n)$:

$$5y(n) = x(n+1) + x(n) = c_1\cdot 2^{n+1}\cos\frac{\left(n+1\right)\pi}{2} + c_2\cdot 2^{n+1}\sin\frac{\left(n+1\right)\pi}{2} +$$

$$+c_1\cdot 2^n\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\cdot 2^n\sin\frac{n\pi}{2} = 2c_1\cdot 2^n\left(-\sin\frac{n\pi}{2}\right) + 2c_2\cdot 2^n\cos\frac{n\pi}{2} +$$

$$+c_1\cdot 2^n\cos\frac{n\pi}{2} + c_2\cdot 2^n\sin\frac{n\pi}{2} = 2^n\left(-2c_1 + c_2\right)\sin\frac{n\pi}{2} + \left(c_1 + 2c_2\right)\cdot 2^n\cos\frac{n\pi}{2}.$$

Репозиторий БрГТУ

Общее решение системы

$$\begin{cases} x(n) = 2^n\left(c_1\cos\dfrac{n\pi}{2} + c_2\sin\dfrac{n\pi}{2}\right), \\ y(n) = \dfrac{2^n}{5}\left((c_1+2c_2)\cos\dfrac{n\pi}{2} - (2c_1 - c_2)\sin\dfrac{n\pi}{2}\right). \end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases} x(n) = 2^n\left(c_1\cos\dfrac{n\pi}{2} + c_2\sin\dfrac{n\pi}{2}\right), \\ y(n) = \dfrac{2^n}{5}\left((c_1+2c_2)\cos\dfrac{n\pi}{2} - (2c_1 - c_2)\sin\dfrac{n\pi}{2}\right). \end{cases}$

Рассмотрим случай системы ЛОРУ с постоянными коэффициентами:

$$\begin{cases} x_1(n+1) = a_{11}x_1(n) + a_{12}x_2(n) + \ldots + a_{1m}x(n), \\ x_2(n+1) = a_{21}x_1(n) + a_{22}x_2(n) + \ldots + a_{2m}x_m(n), \\ \ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots \quad \ldots\ldots \\ x_m(n+1) = a_{m1}x_1(n) + a_{m2}x_2(n) + \ldots + a_{mm}x_m(n), \end{cases} \tag{5.3.4}$$

где $a_{ij} = \mathrm{const} \in R \ \left(i, j = \overline{1,m}\right)$.

Будем искать нетривиальные решения системы (5.3.4) в виде

$$x_i(n) = \alpha_i \cdot \lambda^n \tag{5.3.5}$$

где α_1, $\alpha_2, \ldots, \alpha_m$, λ пока неизвестные числа.

Подставим (5.3.5) в систему (5.3.4), после сокращения на λ^n и группировки слагаемых получим систему (5.3.6):

$$\begin{cases} (a_{11}-\lambda)\alpha_1 + a_{12}\alpha_2 + \ldots + a_{1m}\alpha_m = 0, \\ a_{21}\alpha_1 + (a_{22}-\lambda)\alpha_2 + \ldots + a_{2m}\alpha_m = 0, \\ \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}\alpha_1 + a_{m2}\alpha_2 + \ldots - +(a_{mm}-\lambda)\alpha_m = 0. \end{cases} \tag{5.3.6}$$

Относительно α_1, α_2, …, α_m (5.3.6) – линейная однородная алгебраическая система.

Она имеет нетривиальные решения, если ее определитель равен 0.

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \ldots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \ldots & a_{2m} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mm}-\lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{5.3.7}$$

Уравнение (5.3.7) называется характеристическим уравнением системы (5.3.4).

Репозиторий БрГТУ

Из уравнения (5.3.7) находим все его решения λ_1, λ_2, …, λ_m, для каждого λ_i составляем систему (5.3.6), определяем соответствующие значения $\alpha_1^{(i)}$, $\alpha_2^{(i)}$,…, $\alpha_m^{(i)}$ $\left(i=\overline{1,m}\right)$.

Выписываем m частных линейно независимых решений системы (5.3.4)

$$\begin{matrix} x_1^{(1)}(n), & x_1^{(2)}(n), & \ldots, & x_1^{(m)}(n), \\ x_2^{(1)}(n), & x_2^{(2)}(n), & \ldots, & x_2^{(m)}(n), \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_m^{(1)}(n), & x_m^{(2)}(n), & \ldots, & x_m^{(m)}(n) \end{matrix}$$

и составляем общее решение системы (5.3.4)

$$\begin{cases} x_1(n)=\sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_1^{(j)}(n), \\ x_2(n)=\sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_2^{(j)}(n), \\ \ldots \\ x_m(n)=\sum\limits_{j=1}^{m} c_j x_m^{(j)}(n), \end{cases}$$

где c_1, c_2, …, c_m — $\forall$ const $\in R$.

Пример 2. Найти общее решение системы ЛОРУ с помощью характеристического уравнения.

$$\begin{cases} x(n+1)=3x(n)-y(n)+z(n), \\ y(n+1)=-x(n)+5y(n)-z(n), \\ z(n+1)=x(n)-y(n)+3z(n). \end{cases}$$

Решение

Ищем решение в виде $x(n)=\alpha\cdot\lambda^n$, $y(n)=\beta\lambda^n$, $z(n)=\gamma\lambda^n$, где α, β, γ и λ пока неизвестные числа.

Составляем систему вида (5.3.6)

$$\begin{cases} (3-\lambda)\alpha-\beta+\gamma=0, \\ -\alpha+\left(5-\lambda\right)\beta-\gamma=0, \\ \alpha-\beta+\left(3-\lambda\right)\gamma=0, \end{cases} \tag{5.3.8}$$

и характеристическое уравнение данной системы

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 5-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 3-\lambda \end{vmatrix}=0.$$

$$\left(3-\lambda\right)^2\left(5-\lambda\right)+1+1-\left(5-\lambda\right)-\left(3-\lambda\right)-\left(3-\lambda\right)=0.$$

Репозиторий БрГТУ

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda)+2-11+3\lambda=0.$$

$$(3-\lambda)^2(5-\lambda)-3(3-\lambda)=0.$$

$$3-\lambda=0 \text{ или } (3-\lambda)(5-\lambda)-3=0.$$

$$\lambda^2-8\lambda+12=0, \quad (\lambda-2)(\lambda-6)=0.$$

Корни характеристического уравнения $\lambda_1=2$, $\lambda_2=3$, $\lambda_3=6$.

Для $\lambda_1=2$ составляем систему (5.3.8):

$$\begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0,\\ -\alpha+3\beta-\gamma=0,\\ \alpha-\beta+\gamma=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha-\beta+\gamma=0,\\ -\alpha+3\beta-\gamma=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}2\beta=0,\\ \alpha+\gamma=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=0,\\ \alpha=-\gamma.\end{cases}$$

Пусть $\alpha_1=1$, $\beta_1=0$, $\gamma_1=-1$, тогда $x_1(n)=1\cdot 2^n$, $y_1(n)=0\cdot 2^n$, $z_1(n)=-1\cdot 2^n$.

Для $\lambda_2=3$ система (5.3.8) имеет вид

$$\begin{cases}-\beta+\gamma=0,\\ -\alpha+2\beta-\gamma=0,\\ \alpha-\beta=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\beta=\gamma,\\ \alpha=\beta,\end{cases}$$

Если $\alpha_2=1$, $\beta_2=1$, $\gamma_2=1$, то $x_2(n)=3^n$, $y_2(n)=3^n$, $z_2(n)=3^n$.

Для $\lambda_3=6$ система (5.3.8) имеет вид

$$\begin{cases}-3\alpha-\beta+\gamma=0,\\ -\alpha-\beta-\gamma=0,\\ \alpha-\beta-3\gamma=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}-2\alpha+2\gamma=0,\\ -2\beta-4\gamma=0,\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\alpha=\gamma,\\ \beta=-2\gamma,\end{cases}$$

Если $\alpha_3=1$, $\beta_3=-2$, $\gamma_3=1$, то $x_3(n)=6^n$, $y_3(n)=-2\cdot 6^n$, $z_3(n)=6^n$.

Общее решение системы ЛОРУ

$$\begin{cases}x(n)=c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 3^n+c_3\cdot 6^n,\\ y(n)=c_1\cdot 0+c_2\cdot 3^n-2c_3\cdot 6^n,\\ z(n)=-c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 3^n+c_3\cdot 6^n.\end{cases}$$

Ответ. $\begin{cases}x(n)=c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 3^n+c_3\cdot 6^n,\\ y(n)=c_1\cdot 0+c_2\cdot 3^n-2c_3\cdot 6^n,\\ z(n)=-c_1\cdot 2^n+c_2\cdot 3^n+c_3\cdot 6^n.\end{cases}$

Репозиторий БрГТУ

Задания для аудиторной работы

Решить следующие системы ЛРУ методом исключения неизвестных.

1. $\begin{cases} x(n+1) = -x(n) - 2y(n), \\ y(n+1) = 3x(n) + 4y(n). \end{cases}$

2. $\begin{cases} x(n+1) - x(n) + y(n) = 3^n, \\ y(n+1) + 2x(n) = -3^n, \end{cases}$ $x(0) = 3$, $y(0) = 0$

3. $\begin{cases} x(n+1) = -5x(n) + 2y(n) + 1, \\ y(n+1) = x(n) - 6y(n) + (-2)^n. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x(n+1) = x(n) - 3y(n), \\ y(n+1) = 3x(n) + y(n). \end{cases}$

5. $\begin{cases} x(n+1) = 3x(n) - y(n) + z(n), \\ y(n+1) = x(n) + y(n) + z(n), \\ z(n+1) = 4x(n) - y(n) + 4z(n), \end{cases}$ $x(0) = 9$, $y(0) = 0$, $z(0) = 1$.

Задания для индивидуальной работы

Решить системы линейных разностных уравнений

<table>
<tr><td>

I.

1. $\begin{cases} x(n+1) = 4x(n) - y(n), \\ y(n+1) = x(n) + 2y(n), \end{cases}$ $x(0) = 1$, $y(0) = 0$.

2. $\begin{cases} x(n+1) = 5x(n) + y(n) + 30n \cdot 2^n, \\ y(n+1) = 12x(n) + y(n) - 2^{n+1}. \end{cases}$

Отв. 1. $\begin{cases} x(n) = 3^{n-1}(n+3), \\ y(n) = n \cdot 3^{n-1}. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(n) = c_1 \cdot 7^n + c_2(-1)^n - \left(2n + \frac{10}{3}\right) \cdot 2^n, \\ y(n) = 2c_1 7^n - 6c_2(-1)^n + (-24n + 6) \cdot 2^n. \end{cases}$

</td></tr>
<tr><td>

II.

1. $\begin{cases} x(n+1) = 3x(n) + 4y(n), \\ y(n+1) = x(n) + 3y(n), \end{cases}$ $x(0) = 2$, $y(0) = 1$.

2. $\begin{cases} x(n+1) = 2x(n) - y(n) + 12n + 3, \\ y(n+1) = x(n) + 4y(n) + 1. \end{cases}$

Отв. 1. $\begin{cases} x(n) = 2 \cdot 5^n, \\ y(n) = 5^n. \end{cases}$ 2. $\begin{cases} x(n) = 3^n(c_1 + c_2 n) - 9n - 8{,}5; \\ y(n) = 3^n(-c_1 - (n+3)c_2) + 3n + 3{,}5. \end{cases}$

</td></tr>
</table>

Репозиторий БрГТУ

ЛИТЕРАТУРА

1. Ершова, В.В. Импульсные функции. Функции комплексной переменной. Операционное исчисление / В.В. Ершова. − Мн.: Выш. шк., 1976.

2. Жевняк, Р.М. Высшая математика / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук. − Мн.: Выш. шк., 1996. – Ч.IV.

3. Индивидуальные задания по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко. − Мн.: Выш. шк., 2008. – Ч.3 и Ч.4.

4. Краснов, М.А. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости / М.А. Краснов, А.И. Киселев, Г.И. Макаренко. − М.: Наука, 1981.

5. Методические указания по разделу «Элементы теории функций комплексного переменного и операционного исчисления» курса «Высшая математика» для студентов технических специальностей / И.И. Гладкий, М.П. Сидоревич, Т.А. Тузик. − Брест: Изд-во БрГТУ, 2000.

6. Пантелеев, А.В. Теория функций комплексного переменного и операционное исчисление в примерах и задачах. − М.: Высш. шк., 2001.

7. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. − М.: АйрисПресс, 2004. – Ч.2.

8. Ряды. Теория функций комплексной переменной. Преобразование Лапласа. Задачи и упражнения для студентов технических специальностей / Т.А. Тузик, М.Г. Журавель. − Брест: Изд-во БрГТУ, 2004.

9. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. − М.: Айрис-Пресс, 2003.

10. Тузик, А.И. Высшая математика. Ряды / А.И. Тузик. − Брест: Изд-во БрГТУ, 2003.

Репозиторий БрГТУ

Содержание

Репозиторий БрГТУ

Учебное издание

Составители: Гладкий Иван Иванович,
Дерачиц Наталия Александровна,
Дудкин Александр Арсентьевич,
Журавель Мария Григорьевна,
Лебедь Светлана Федоровна.

РЯДЫ. ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ЛАПЛАСА. ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Задачи и упражнения
для студентов специальностей
факультета электронно-информационных систем

Ответственный за выпуск: Гладкий И.И.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Горун Л.Н.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 29.05.2012 г. Бумага «Снегурочка». Формат 60х84 $^1/_{16}$.
Усл. печ. л. 3,72. Уч. изд. л. 4,0. Заказ № 706. Тираж 70 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет»
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Репозиторий БрГТУ