МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы
по разделам «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии»,
«Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функций
одной переменной» общего курса дисциплины «Математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения (сокращенной)

Брест 2012

УДК 51(075.8)

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделам «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», «Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» общего курса дисциплины «Математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения (сокращенной). Даны методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольной работы.

Составители: Гладкий И.И., доцент
Дворниченко А.В., старший преподаватель
Каримова Т.И., доцент, к.ф.-м.н.
Лебедь С.Ф., доцент, к.ф.-м.н.
Махнист Л.П. , доцент, к.т.н.

Рецензент: Будько А.Е., декан математического факультета учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент

Организационно-методические указания

В контрольную работу по разделам «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», «Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» общего курса дисциплины «Математика» включено восемь заданий. В нумерации задач первое число – номер задания (задачи), второе (после точки) – номер варианта.

Контрольная работа должна выполняться студентом в соответствии со своим вариантом. **Номер варианта определяется по двум последним цифрам шифра (номера зачетной книжки студента).**

При выполнении контрольной работы условия задач нужно записывать полностью. В случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписывать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта.

Решение всех задач приводить подробно и аккуратно, давать достаточные пояснения и делать необходимые рисунки и таблицы.

В конце каждой задачи должен быть ответ.

Контрольные вопросы курса «Высшая математика»
I семестр

1. Определители, их свойства и вычисление.
2. Решение систем линейных алгебраических уравнений по формулам Крамера.
3. Матрицы. Операции над матрицами.
4. Обратная матрица. Матричный метод решения систем линейных алгебраических уравнений.
5. Ранг матрицы. Метод Гаусса решения систем линейных алгебраических уравнений.
6. Системы линейных однородных уравнений.
7. Векторы, линейные операции над ними.
8. Линейная зависимость и независимость векторов. Базис.
9. Декартова система координат. Координаты вектора. Условие коллинеарности векторов.
10. Скалярное произведение векторов, его свойства, вычисление, приложения. Условия ортогональности векторов.
11. Векторное произведение вектора, его свойства, нахождение, приложения.
12. Смешанное произведение векторов, его вычисление, приложения. Условия компланарности векторов.
13. Радиус вектор. Полярная система координат.
14. Линейный оператор. Матрица линейного оператора.
15. Собственные значения и собственные векторы линейного оператора.
16. Прямая на плоскости.
17. Кривая второго порядка. Её характеристики.
18. Плоскость.
19. Прямая в пространстве. Взаимное расположение двух прямых.

20. Взаимное расположение прямой и плоскости.
21. Поверхности второго порядка.
22. Понятие функции одной переменной. Элементарные функции. Алгебраические функции.
23. Предел числовой последовательности. Свойства сходящихся последовательностей.
24. Число e.
25. Первый и второй замечательные пределы.
26. Бесконечно малые и бесконечно большие функции и их свойства.
27. Эквивалентные бесконечно малые функции, их приложения к нахождению пределов.
28. Непрерывность функции. Точки разрыва.
29. Свойства функций непрерывных в точке и непрерывных на отрезке.
30. Производная функции. Ее геометрический и механический смыслы.
31. Правила дифференцирования и таблица производных.
32. Производные обратной функции и неявно заданной. Логарифмическая производная.
33. Дифференциал функции, его геометрический смысл. Инвариантность формы дифференциала.
34. Производные и дифференциалы высших порядков.
35. Дифференцирование параметрически заданной функции.
36. Теорема Ферма. Теорема Ролля.
37. Теорема Коши. Теорема Лагранжа.
38. Правило Лопиталя.
39. Формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано и Лагранжа.
40. Разложение по формуле Тейлора функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\ln(1+x)$, $(1+x)^\alpha$.
41. Условия монотонности функции.
42. Необходимое и достаточные условия экстремума.
43. Выпуклость функции. Точки перегиба. Необходимые и достаточные условия существования точки перегиба.
44. Асимптоты графика функции.
45. Вектор-функция скалярного аргумента. Касательная и нормальная плоскость к годографу. Кривизна кривой.

Задания контрольной работы

Задание 1*.* В задачах 1.1.-1.30. проверьте совместность системы линейных уравнений и в случае совместности решите ее тремя способами:

1. по формулам Крамера;
2. матричным методом (с помощью обратной матрицы);
3. методом Гаусса.

1.1. $\begin{cases} 2x-3y-5z=1, \\ 3x+y-2z=-4, \\ x-2y+z=5. \end{cases}$ 1.2. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x-y+3z=-4, \\ 3x+5y=4. \end{cases}$ 1.3. $\begin{cases} 5x-2y+z=-1, \\ 2x+y+2z=6, \\ x-3y-z=-5. \end{cases}$

1.4. $\begin{cases} 2x-y+3z=1, \\ x+2y+z=8, \\ 4x-3y-2z=-1. \end{cases}$ 1.5. $\begin{cases} 2x-y+3z=3, \\ x+2y+z=2, \\ x-3y+4z=-1. \end{cases}$ 1.6. $\begin{cases} x-3y-z=1, \\ 2x+y+z=-7, \\ 2x-y-3z=5. \end{cases}$

1.7. $\begin{cases} x-3y+z=2, \\ 2x+y+3z=3, \\ 2x-y-2z=8. \end{cases}$ 1.8. $\begin{cases} 4x+3y-2z=-1, \\ 3x+y+z=3, \\ x-2y-3z=8. \end{cases}$ 1.9. $\begin{cases} 3x+3y+2z=-1, \\ 2x+y-z=3, \\ x-2y-3z=4. \end{cases}$

1.10. $\begin{cases} x-2y+z=4, \\ 2x+y+3z=5, \\ 3x+4y+z=-2. \end{cases}$ 1.11. $\begin{cases} 3x+y-2z=1, \\ x-2y+3z=5, \\ 2x+3y-z=-4. \end{cases}$ 1.12. $\begin{cases} 3x+y+2z=-4, \\ x-2y-z=-1, \\ 2x+3y+2z=0. \end{cases}$

1.13. $\begin{cases} 2x+3y-z=2, \\ x+2y+3z=0, \\ x-y-2z=6. \end{cases}$ 1.14. $\begin{cases} x+5y-z=-1, \\ 2x+y-2z=7, \\ x-4y+z=0. \end{cases}$ 1.15. $\begin{cases} 3x+2y-z=3, \\ x-y+2z=-4, \\ 2x+2y+z=4. \end{cases}$

1.16. $\begin{cases} 2x-3y+z=3, \\ x+y-2z=4, \\ 3x-2y+6z=0. \end{cases}$ 1.17. $\begin{cases} 3x-2y+2z=3, \\ 2x+y-z=-5, \\ 5x-y+3z=4. \end{cases}$ 1.18. $\begin{cases} 2x-3y+3z=0, \\ x+y-2z=-7, \\ x-2y+3z=3. \end{cases}$

1.19. $\begin{cases} x+y-2z=1, \\ 2x+3y+z=0, \\ x-2y-z=7. \end{cases}$ 1.20. $\begin{cases} x+2y-4z=0, \\ 3x+y-3z=-1, \\ 2x-y+5z=3. \end{cases}$ 1.21. $\begin{cases} x+2y-z=2, \\ 2x-y-3z=-1, \\ 3x+3y+z=3. \end{cases}$

1.22. $\begin{cases} x+y+2z=-1, \\ 2x-y+2z=-4, \\ 4x+y+4z=-2. \end{cases}$ 1.23. $\begin{cases} 3x+4y+2z=-1, \\ 2x-y-3z=-5, \\ x+5y+z=0. \end{cases}$ 1.24. $\begin{cases} x-4y-2z=-5, \\ 3x+y+z=5, \\ 3x-5y-6z=-8. \end{cases}$

1.25. $\begin{cases} x+y-z=1, \\ 8x+3y-6z=2, \\ 4x+y-3z=3. \end{cases}$ 1.26. $\begin{cases} 2x-y+5z=1, \\ x-3y+z=-2, \\ 2x+y-z=3. \end{cases}$ 1.27. $\begin{cases} x+y-2z=0, \\ 3x-y-z=1, \\ 5x-3y+z=5. \end{cases}$

1.28. $\begin{cases} 3x - y + 2z = 1, \\ 2x + y + 3z = 4, \\ x - 2y + 5z = 3. \end{cases}$ 1.29. $\begin{cases} 4x - 3y - 2z = 2, \\ 3x + y - z = 2, \\ 2x + 5y + 3z = 5. \end{cases}$ 1.30. $\begin{cases} 3x + y + z = 4, \\ 2x + 3y - 2z = 5, \\ x - 4y - 2z = -3. \end{cases}$

Задание 2. В задачах 2.1.-2.30. найдите собственные значения и собственные векторы матрицы A.

2.1. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. 2.2. $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 23 \\ 0 & 5 & 7 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$. 2.3. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

2.4. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 7 & -2 & 9 \\ 3 & 0 & 6 \end{bmatrix}$. 2.5. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 16 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$. 2.6. $A = \begin{bmatrix} 2 & 19 & 30 \\ 0 & -5 & -12 \\ 0 & 2 & 5 \end{bmatrix}$.

2.7. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 15 & -7 & 4 \end{bmatrix}$. 2.8. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 12 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{bmatrix}$. 2.9. $A = \begin{bmatrix} 5 & -7 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 12 & 6 & -3 \end{bmatrix}$.

2.10. $A = \begin{bmatrix} -3 & 11 & 7 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$. 2.11. $A = \begin{bmatrix} 5 & 9 & 7 \\ 0 & 4 & -5 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}$. 2.12. $A = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 21 \\ 21 & 2 & 16 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

2.13. $A = \begin{bmatrix} 5 & -3 & 2 \\ 6 & -4 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}$. 2.14. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 0 & 5 & 0 \\ 6 & 7 & -4 \end{bmatrix}$. 2.15. $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

2.16. $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 2.17. $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. 2.18. $A = \begin{bmatrix} 3 & -4 & -5 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{bmatrix}$.

2.19. $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & -7 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix}$. 2.20. $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 & 21 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$. 2.21. $A = \begin{bmatrix} 9 & -8 & 0 \\ 10 & -9 & 0 \\ -12 & 12 & 3 \end{bmatrix}$.

2.22. $A = \begin{bmatrix} -1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 3 \end{bmatrix}$. 2.23. $A = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 4 \\ 0 & 3 & 0 \\ -12 & -12 & -7 \end{bmatrix}$ 2.24. $A = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

2.25. $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 0 \\ -8 & -4 & 1 \end{bmatrix}$. 2.26. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$. 2.27. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 8 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

2.28. $A=\begin{bmatrix} 2 & 0 & -6 \\ 1 & 3 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. 2.29. $A=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 6 & 4 & -1 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$. 2.30. $A=\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}$.

Задание 3. В задачах 3.1.-3.30. даны вершины треугольника *ABC*: $A(x_1,y_1)$, $B(x_2,y_2)$, $C(x_3,y_3)$. Найти:

1) длину стороны *AC*;
2) длину высоты *BH*, проведенной из вершины *B*;
3) уравнение высоты *BH*;
4) уравнение медианы, проведенной из вершины *C*;
5) сделать чертеж.

	A	*B*	*C*		*A*	*B*	*C*
3.1.	(-8;2)	(3;6)	(-3;2)	3.2.	(-8;-2)	(4;5)	(-3;-2)
3.3.	(-7;1)	(-1;5)	(-4;1)	3.4.	(-7;-1)	(3;6)	(-4;-1)
3.5.	(3;1)	(0;5)	(9;1)	3.6.	(3;-2)	(9;-2)	(0;5)
3.7.	(-3;-4)	(3;-3)	(-6;-6)	3.8.	(-2;4)	(3;4)	(-6;-6)
3.9.	(-4;3)	(2;1)	(-4;8)	3.10.	(-3;3)	(3;1)	(-3;9)
3.11.	(-6;2)	(5;6)	(-1;2)	3.12.	(-6;-2)	(4;2)	(-1;-2)
3.13.	(-5;1)	(1;5)	(-2;1)	3.14.	(-5;-1)	(3;5)	(-2;-1)
3.15.	(1;1)	(7;1)	(-2;5)	3.16.	(1;-1)	(7;-1)	(-2;3)
3.17.	(-1;-4)	(4;-3)	(-5;-8)	3.18.	(1;-4)	(9;-3)	(6;-3)
3.19.	(-6;3)	(0;1)	(-6;8)	3.20.	(-6;2)	(2;7)	(0;0)
3.21.	(-8;3)	(4;7)	(-3;3)	3.22.	(-8;-3)	(0;0)	(-3;-3)
3.23.	(-7;2)	(-1;6)	(-4;2)	3.24.	(-7;-2)	(0;3)	(-4;-2)
3.25.	(3;-1)	(9;-1)	(0;-3)	3.26.	(0;-1)	(-3;-3)	(6;-1)
3.27.	(-3;0)	(3;7)	(3;1)	3.28.	(-3;1)	(3;8)	(3;2)
3.29.	(-4;4)	(2;2)	(-4;9)	3.30.	(-4;2)	(2;0)	(-4;7)

Задание 4. В задачах 4.1.-4.30. даны четыре точки $A(x_1,y_1,z_1)$, $B(x_2,y_2,z_2)$, $C(x_3,y_3,z_3)$, $S(x_4,y_4,z_4)$. Найти:

1) угол между ребрами *AB* и *AS*;
2) площадь грани *ABC*;
3) объем пирамиды *SABC*;
4) уравнение плоскости *ABC*;
5) расстояние от точки *S* до грани *ABC*;
6) уравнение высоты пирамиды, проведенной из вершины *S*.

	A	*B*	*C*	*S*
3.1.	(5;-1;-4),	(9;3;-6),	(7;10;-14),	(5;1;-3).
3.2.	(1;-4;0),	(5;0;-2),	(3;7;-10),	(1;-2;1)
3.3.	(-3;-6;2),	(1;-2;0),	(-1;5;-8),	(-3;-4;3).
3.4.	(-1;1;-5),	(3;5;-7),	(1;12;-15),	(-1;3;-4).

	A	B	C	S
3.5.	(-4;2;-1),	(0;6;-3),	(-2;13;-11),	(-4;-4;0).
3.6.	(0;4;3),	(4;8;1),	(2;15;-7),	(0;6;4).
3.7.	(-2;0;-2),	(2;4;-4),	(0;11;-12),	(-2;2;-1).
3.8.	(3;3;-3),	(7;7;-5),	(5;14;-13),	(3;5;-2).
3.9.	(4;-2;5),	(8;2;3),	(6;9;-5),	(4;0;6).
3.10.	(-5;0;1),	(-4;-2;3),	(6;2;11),	(3;4;9).
3.11.	(1;-4;0),	(2;-6;2),	(12;-2;10),	(9;0;8).
3.12.	(-1;-2;-8),	(0;-4;-6),	(10;0;2),	(7;2;0).
3.13.	(0;2;-10),	(1;0;-8),	(11;4;0),	(8;6;-2).
3.14.	(3;1;-2),	(4;-1;0),	(14;3;8),	(11;5;6).
3.15.	(-8;3;-1),	(-7;1;1),	(3;5;9),	(0;7;7).
3.16.	(2;-1;-4),	(3;-3;-2),	(13;1;6),	(10;3;4).
3.17.	(-4;5;-5),	(-3;3;-3),	(7;7;5),	(4;9;3).
3.18.	(-2;-3;2),	(-1;-5;4),	(9;-1;12),	(6;1;10).
3.19.	(-3;4;-3),	(-2;2;-1),	(8;6;7),	(5;8;5).
3.20.	(-3;-2;4),	(-4;2;-7),	(5;0;3),	(-1;3;0).
3.21.	(2;-2;1),	(-3;0;-5),	(0;-2;-1),	(-3;4;2).
3.22.	(5;4;1),	(-1;-2;-2),	(3;-2;2),	(-5;5;4).
3.23.	(3;6;-2),	(0;2;-3),	(1;-2;0),	(-7;6;6).
3.24.	(1;-4;1),	(4;4;0),	(-1;2;-4),	(-9;7;8).
3.25.	(4;6;-1),	(7;2;4),	(-2;0;-4),	(3;1;-4).
3.26.	(0;6;-5),	(8;2;5),	(2;6;-3),	(5;0;-6).
3.27.	(-2;4;-6),	(0;-6;1),	(4;2;1),	(7;-1;-8).
3.28.	(-4;-2;-5),	(1;8;-5),	(0;4;-4),	(9;-2;-10).
3.29.	(3;4;-1),	(2;-4;2),	(5;6;0),	(11;-3;-12).
3.30.	(2;0;1),	(3;-3;1),	(4;2;5),	(-3;7;4).

Задание 5. В задачах 5.1.-5.30. найти пределы функций.

5.1. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+1}{x^3+x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{2-x}-1}{2x^2+x-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 3x}{3x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^{x-1}$;

5.2. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-2x+1}{x^3-5x^2+2}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{3-x}-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 6x}{3x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+3}\right)^{4-x}$;

5.3. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x^2+1}{3x^4-5x^3+x}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-2x-3}{\sqrt{3x}-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}3x}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+2}{3x+1}\right)^{5-9x}$;

5.4. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+6x+1}{2x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x^2+6x-8}{\sqrt{x}-2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}8x}{2x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x-5}\right)^{4x+3}$;

5.5. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3-1}{x^3+x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sqrt{x+4}-3}{5+4x-x^2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 10x}{\operatorname{tg}2x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+12}{5x+7}\right)^{6-5x}$;

5.6. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+9x-4}{2x^2+7x}$, б) $\lim\limits_{x\to 6}\dfrac{x^2+6x-72}{5-\sqrt{x+19}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{12x}{\arcsin 3x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+5}{6x-7}\right)^{3x+5}$;

5.7. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^5-1}{2x^4+x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 7}\dfrac{1-\sqrt{x-6}}{x^2-5x-14}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{14x}{\sin 2x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x-2}{7x-9}\right)^{7x+11}$;

5.8. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^6-x^3+1}{2x^6+x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{x^2-9x+8}{2-\sqrt{x-4}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16x}{\operatorname{tg}2x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-11}{8x-7}\right)^{16x-5}$;

5.9. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^7+1}{2x+x^7}$, б) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{x^2+x-90}{2-\sqrt{x-5}}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{9x}{\operatorname{arctg}x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x+21}{9x+3}\right)^{5x+3}$;

5.10. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3-4x^2+1}{2x^3+5x}$, б) $\lim\limits_{x\to 10}\dfrac{\sqrt{10x}-10}{x^2-11x+10}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}10x}{\sin x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-11}{10x+9}\right)^{4-5x}$;

5.11. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4-2x^3+1}{2x^3+x+7}$, б) $\lim\limits_{x\to 11}\dfrac{x^2-121}{\sqrt{x+5}-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{11\arcsin x}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-2}{x+9}\right)^{x-1}$;

5.12. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x-8}{2x^2-x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 12}\dfrac{\sqrt{x-8}-2}{x-12}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 24x}{2x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-9}{2x+3}\right)^{4-2x}$;

5.13. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+1}{x^4+x^3+4x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 13}\dfrac{14x-x^2+13}{\sqrt{14-x}-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{13\operatorname{tg}3x}{3x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-14}{3x-1}\right)^{5-3x}$;

5.14. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-1}{2x^2+x}$, б) $\lim\limits_{x\to 14}\dfrac{\sqrt{x+2}-4}{x^2-15x+14}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{7\operatorname{arctg}2x}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+13}\right)^{4x+3}$;

5.15. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x+5}{x^3+2x^2+8}$, б) $\lim\limits_{x\to 15}\dfrac{4-\sqrt{x+1}}{x^2-16x+15}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3\sin 5x}{\operatorname{tg}x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x+12}{5x-3}\right)^{6-5x}$;

5.16. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^3+5x+1}{2x^3+x^2+10}$, б) $\lim\limits_{x\to 16}\dfrac{x^2-14x-32}{\sqrt{x-12}-2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{16x}{\arcsin x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{6x+12}{6x-4}\right)^{6x+5}$;

5.17. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-3x+1}{10x-x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to 17}\dfrac{\sqrt{18-x}-1}{18x-x^2-17}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{5x^2}{1-\cos x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{7x+8}{7x-9}\right)^{7x+11}$;

5.18. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+8}{x^2-11x^3}$, б) $\lim\limits_{x\to 18}\dfrac{324-x^2}{\sqrt{x-2}-4}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{18x}{\operatorname{tg}x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{8x-5}{8x+4}\right)^{16x-5}$;

5.19. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+12x}{12x^2+x+14}$, б) $\lim\limits_{x\to19}\dfrac{x^2-21x+38}{\sqrt{x-18}-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{19x}{\operatorname{arctg}x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{9x-22}{9x+35}\right)^{3x+3}$;

5.20. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x+1}{5-3x+4x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to20}\dfrac{x^2-18x-40}{\sqrt{5+x}-5}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{4\operatorname{tg}5x}{\sin x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{10x-21}{10x+19}\right)^{4-5x}$;

5.21. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-7x+10}{5x+x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to21}\dfrac{\sqrt{25-x}-2}{24x-x^2-63}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{7\arcsin 3x}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-11}{x-10}\right)^{x-1}$;

5.22. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{12x^3+6x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to22}\dfrac{x^2-24x+44}{3-\sqrt{x-13}}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{11\sin 2x}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-8}{2x+3}\right)^{6-4x}$;

5.23. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^4+2x-1}{x^3-7x^2+18}$, б) $\lim\limits_{x\to23}\dfrac{\sqrt{24-x}-1}{22x-x^2+23}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\cdot\operatorname{tg}^2 x}{1-\cos x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+24}{3x+1}\right)^{5-3x}$;

5.24. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2+3x+5}{5x^2-4x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to24}\dfrac{\sqrt{x+1}-5}{x^2-23x-24}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{8\operatorname{arctg}3x}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-5}\right)^{6x-4}$;

5.25. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-4x-21}{7x-3x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to25}\dfrac{625-x^2}{\sqrt{2x-1}-7}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{5\sin 5x}{\operatorname{tg}x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{5x-12}{5x-7}\right)^{2-5x}$;

5.26. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^3+x+1}{x^3+x^2}$, б) $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{2x^2+x-3}{\sqrt{2-x}-1}$,

в) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^2 3x}{3x^2}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{2x-1}{2x+1}\right)^{x-1}$;

5.27. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^2-x+1}{2x^3+5x^2-2}$, б) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x-2}-1}{x^2-3x+2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin 6x}{3x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x-1}{x+3}\right)^{4-x}$;

5.28. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{2x^4+x^2+1}{x^4+x}$, б) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{6+x}-3}{x^2-2x-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{arctg 3x}{x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2}{x+1}\right)^{5-x}$;

5.29. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x^2+6x-1}{2x+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{-x^2+6x-8}{\sqrt{x+5}-3}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} 8x}{2x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x-5}\right)^{x+3}$;

5.30. а) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3+x-1}{3x^3+x^2+1}$, б) $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{5+4x-x^2}{\sqrt{x-1}-2}$,

в) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{\operatorname{tg} 5x}$, г) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x+12}{3x+7}\right)^{6-x}$;

Задание 6. В задачах 6.1.-6.30. найти производные y'_x функций:

6.1. а) $y=2x^6-\dfrac{1}{x^5}+x^2\sqrt{x^3}$, б) $y=\operatorname{ctg}^5 2x\cdot\arccos x^2$,

в) $x=\dfrac{t}{t-2}$, $y=\ln(t-2)$, г) $x-y+e^y\operatorname{arctg}x=0$;

6.2. а) $y=x\sqrt{x^3}-\dfrac{1}{3}x^6+\dfrac{1}{\sqrt{x}}$, б) $y=\dfrac{\operatorname{arctg}^3 2^{-x}}{x^2+x}$,

в) $x=\sqrt{t-1}$, $y=\dfrac{1}{\sqrt{t}}$, г) $y^2x=e^{\frac{y}{x}}$;

6.3. а) $y=4x^2-\dfrac{1}{x^5}+x^5\sqrt{x}$, б) $y=\left(\sin x^2+1\right)\cdot arctg^2 2x$

в) $x=\dfrac{\cos t}{1+2\cos t}$, $y=\dfrac{\sin t}{1+2\sin t}$, г) $x^4+y^4=x^2y^2$;

6.4. а) $y=x^7-\dfrac{x^2}{\sqrt[3]{x}}+\dfrac{4}{x^2}$, б) $y=\cos^3(3x)\cdot\operatorname{arctg}(x^3)$,

в) $x=tgt$, $y=\dfrac{1}{\sin 2t}$, г) $x-y^2+\operatorname{tg}(x^2y)=0$;

6.5. а) $y=\dfrac{1}{x^2}-2x\sqrt{x^3}+4x^3$, б) $y=\sqrt[3]{\dfrac{x-3}{x+3}}$,

в) $x=2(t-\sin t),\;\; y=4(2+\cos t)$, б) $e^{xy}+x^2+y^3=2$;

6.6. а) $y=x^6-\dfrac{1}{x^6}+2\sqrt[6]{x^5}$, б) $y=\sin^2(3x)-\cos x^3$,

в) $x=t+\sin t,\;\; y=2+\cos t$, г) $e^x+e^y-2e^{xy}=1$;

6.7. а) $y=4x^3-\dfrac{2}{x}+x\sqrt[3]{x^2}$, б) $y=2^{\ln(1+x^2)}\cdot x^2$,

в) $x=\cos t,\;\; y=\ln\sin t$, г) $xe^{-\frac{1}{2}y}+ye^{-\frac{1}{2}x}=2$;

6.8. а) $y=2x^3-\dfrac{1}{x^3}+2x^3\sqrt{x}$, б) $y=\dfrac{\operatorname{tg}x^2}{\ln(x^2-2x+4)}$,

в) $x=4-\sin\dfrac{\pi t}{6},\;\; y=-4\cos^2\dfrac{\pi t}{6}$, г) $x^4-x^2y^2+y^4-5x^2+5y^2-1=0$;

6.9. а) $y=4x^3-\dfrac{\sqrt[7]{x}}{x}+\dfrac{3}{x^5}-5x$, б) $y=\sqrt{x^4-3x^2}\cdot\sin 5x$,

в) $x=8\sin\dfrac{\pi t}{6},\;\; y=-6\cos\dfrac{\pi t}{3}$, г) $\dfrac{y}{x}-\sqrt[3]{\dfrac{x}{y}}=x$;

6.10. а) $y=x^4-\dfrac{3}{x^9}+x^5\sqrt{x}$, б) $y=\ln\sin 2x\cdot\operatorname{tg}(x+2)$,

в) $x=6-\cos\dfrac{\pi t}{6},\;\; y=\sin\dfrac{\pi t}{6}-2$, г) $\sin^2(2x-y^2)=3x+2$;

6.11. а) $y=7-\dfrac{1}{x^2}+x\sqrt[3]{x^4}+x^9$, б) $y=2^{x^2}\cdot\sin\ln\left(x+4\right)$;

в) $x=2-\cos\dfrac{\pi t}{6},\;\; y=4-6\cos\dfrac{\pi t}{3}$, г) $x^2-3xy+y^2+x-5y=0$;

6.12. а) $y=x^2-\dfrac{2x}{\sqrt[3]{x^4}}+\dfrac{1}{x^2}+5x$, б) $y=\dfrac{x^3}{2^{\sin x}+1}$;

в) $x=\cos t+t\sin t,\;\; y=\sin t-t\cos t$, г) $y^2\cos x=\sin(3x^2)+y$;

6.13. а) $y=\sqrt[3]{x^2}+12x\sqrt[6]{x}-4x^3$, б) $y=\arcsin\sqrt{x\cdot e^x}$;

в) $x=\cos 2t,\;\; y=\dfrac{2}{\cos^2 t}$, г) $x^3+3xy^2+2y^2-5x=1$;

6.14. а) $y=x^5+x^3\sqrt{x^2}-\dfrac{1}{\sqrt[5]{x}}$, б) $y=\sin(\ln x)\cdot\sqrt{2x-x^2}$,

в) $x=\sqrt{1-t^2},\;\; y=\dfrac{1}{t}$, г) $\dfrac{x}{y}=\operatorname{tg}(x^2-y)$;

6.15. а) $y=\frac{1}{x^2}-\frac{4}{\sqrt{x}}+x\sqrt{x^6}$, б) $y=\ln(\cos x)\cdot\cos\operatorname{tg}x$,

в) $x=-2\cos\frac{\pi t}{3},\ \ y=4-4\sin^2\frac{\pi t}{6}$, г) $(\mathrm{x}-\mathrm{y})^2+\cos\mathrm{y}^2=4$;

6.16. а) $y=x^8+\frac{2}{x^3}-x^4\sqrt{x^3}$, б) $y=\frac{e^{tgx}}{2x+1}$,

в) $x=sht,\ \ y=th^2t$, г) $\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{y}}+\mathrm{y}^3\cos\mathrm{x}=3$;

6.17. а) $y=x^3\sqrt{x}-\frac{2}{x\sqrt{x}}+3$, б) $y=e^{x^2-3x}\left(x^2-x\right)$,

в) $x=t^2+t,\ \ y=\sqrt[3]{t-1}$, г) $\mathrm{y}^2=\mathrm{x}^2-\mathrm{x}\ln\mathrm{y}+3$;

6.18. а) $y=\frac{6}{x^4}-3x^3+2x\sqrt{x^7}$, б) $y=\frac{ctg(3x^2+2x)}{\ln x}$,

в) $x=\sqrt{t^3-1},\ \ y=\ln t$, г) $\mathrm{x}^2\ln\mathrm{y}-\mathrm{y}^2\ln\mathrm{x}=1$;

6.19. а) $y=\sqrt{x^5}+\frac{4}{x^3\sqrt{x}}-x^3$, б) $y=\frac{e^{\arcsin x}}{x^2+1}$,

в) $x=\sqrt{t-1},\ \ y=\frac{1}{\sqrt{t-1}}$, г) $\mathrm{y}^2=\frac{\mathrm{y}-\mathrm{x}}{\mathrm{x}+\mathrm{y}}$;

6.20. а) $y=x^2-\frac{2}{x\sqrt[5]{x}}+14\sqrt[7]{x}$, б) $y=\frac{8\operatorname{arctg}(x+1)}{x^2-4x+4}$,

в) $x=e^t,\ \ y=\arcsin t$, г) $\mathrm{y}^2\sin\mathrm{x}=\cos(\mathrm{x}-\mathrm{y})$;

6.21. а) $y=\frac{1}{2\sqrt{x^3}}-3x^5+6x\sqrt[3]{x}$, б) $y=\frac{e^{-\cos x}}{\operatorname{ctg}(2x)}$,

в) $x=\sin t,\ \ y=\frac{1}{\cos t}$, г) $\ln\mathrm{y}=\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$;

6.22. а) $y=x^2-\frac{1}{2x^3}+\frac{x^2}{\sqrt{x^3}}-4$, б) $y=\ln\frac{x^2-3x+1}{x^2+3x+1}$,

в) $x=\cos t+\sin t,\ \ y=\sin 2t$, г) $\sqrt{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}=\operatorname{arctg}\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}$;

6.23. а) $y=4-x\sqrt[3]{x^2}+x^2-\frac{1}{x^4}$, б) $y=\sin x^2\cdot(\sin^2 2x-1)$,

в) $x=\cos t,\ \ y=\sin^2\frac{t}{2}$, г) $\mathrm{y}^2+\mathrm{x}^2-\cos(\mathrm{x}^2\cdot\mathrm{y}^2)=2$;

6.24. а) $y=3\sqrt[3]{x^2}-\frac{2}{\sqrt{x}}+x^{-3}$, б) $y=(\sin 6x-3x)\cdot\sqrt{x^3-x}$,

в) $x=\cos^2 t,\ \ y=tg^2t$, г) $\operatorname{tg}\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)=5\mathrm{x}+1$;

6.25. а) $y = x^5 - \frac{5}{x^2} - x\sqrt{x^5}$, б) $y = \frac{\ln(x^2+1)}{\sqrt{6x^3 - 2x}}$,

в) $x = -4 - \cos\frac{\pi t}{3},\ \ y = -3\sin^2\frac{\pi t}{6}$, г) $x^2 + e^y - x \cdot \ln y = 0$;

6.26. а) $y = x^2 - \frac{8}{x} + x^3 \cdot \sqrt[3]{x^2}$, б) $y = 2^{\ln(1+x^2)} \cdot \sin x$,

в) $x = \sqrt{t},\ y = \frac{1}{\sqrt{1-t}}$, г) $xy = \operatorname{arctg}\frac{x}{y}$;

6.27. а) $y = \frac{3}{x^2} - \frac{3}{\sqrt[3]{x^4}} + \sqrt[7]{x}$, б) $y = \operatorname{arcctg}(x^2+1) \cdot e^x$,

в) $x = 4\cos\frac{\pi t}{6},\ \ y = 9\sin\frac{\pi t}{6} - 4$, г) $x^4 - xy^2 + y^3 - 4y + 5 = 0$;

6.28. а) $y = 3x^2 - \frac{4}{x^2} + x\sqrt[4]{x^5}$, б) $y = \frac{\operatorname{ctg}(x^3+x)}{2x+1}$;

в) $x = 2 - 3\cos\frac{\pi t}{6},\ \ y = 9\cos\frac{\pi t}{3}$, г) $\frac{y}{x} = \operatorname{arctg}\frac{y}{x}$;

6.29. а) $y = \frac{3}{x^4} - x^2\sqrt{x} - \frac{1}{4}x^3$, б) $y = \frac{\ln(2x-5)}{2x^2 - 3x - 5}$;

в) $x = arcgt,\ \ y = \frac{t^2}{2}$, г) $e^x \sin y - e^y \cos x = 1$;

6.30. а) $y = 8x^{12} - x\sqrt[5]{x^2} - \frac{4}{x^2} + x^6$, б) $y = \frac{\operatorname{arctg} x^2}{x^2 + 4x}$,

в) $x = cht,\ \ y = sh^2 t$, г) $\ln x + e^{-\frac{y}{x}} = 1$.

Задание 7. В задачах 7.1.-7.30. найти уравнения касательной и нормальной плоскости.

7.1. $\vec{r} = (t - \sin t) \cdot \vec{i} + (1 - \cos t) \cdot \vec{j} + 2\sin t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

7.2. $\vec{r} = 6t \cdot \vec{i} + 3t^2 \cdot \vec{j} + t^3 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

7.3. $\vec{r} = 2\sin t \cdot \vec{i} + 3\operatorname{tg} t \cdot \vec{j} + 2\cos t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

7.4. $\vec{r} = 3cht \cdot \vec{i} + 3sht \cdot \vec{j} + 3at \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

7.5. $\vec{r} = e^t \cdot \vec{i} + e^{-t} \cdot \vec{j} + \sqrt{2} \cdot t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

7.6. $\vec{r} = 2\sin^2 t \cdot \vec{i} + 2\cos^2 t \cdot \vec{j} + \sin 2t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

7.7. $\vec{r} = \ln(t-3) \cdot \vec{i} - t \cdot \vec{j} + (t^2 - 16) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 4$.

7.8. $\vec{r} = (2-t) \cdot \vec{i} + \sqrt{25 - t^2} \cdot \vec{j} + t^2 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 4$.

7.9. $\vec{r} = e^t \cdot \vec{i} + (1+t^2) \cdot \vec{j} + \operatorname{arctg} t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

7.10. $\vec{r} = e^t \cos t \cdot \vec{i} + e^t \sin t \cdot \vec{j} + e^t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

7.11. $\vec{r} = (t - \sin t) \cdot \vec{i} + (1 - \cos t) \cdot \vec{j} + 4\sin\frac{t}{2} \cdot \vec{k}$, $t_0 = \pi$.

7.12. $\vec{r} = (t^3 - 3) \cdot \vec{i} + (t^2 + 2) \cdot \vec{j} + \ln t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

7.13. $\vec{r} = (t^3 + 8t) \cdot \vec{i} + t^2 \cdot \vec{j} + (5t^5 + 3t) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

7.14. $\vec{r} = 2t \cdot \vec{i} - 3t \cdot \vec{j} + \ln \operatorname{tg} t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

7.15. $\vec{r} = 4t \cdot \vec{i} + \ln t \cdot \vec{j} + t^2 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

7.16. $\vec{r} = \ln\cos t \cdot \vec{i} + \ln\sin t \cdot \vec{j} + \sqrt{2} \cdot t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

7.17. $\vec{r} = (\cos t + t\sin t) \cdot \vec{i} + (\sin t - t\cos) \cdot \vec{j} + t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

7.18. $\vec{r} = (t^2 + 1) \cdot \vec{i} + \cos t \cdot \vec{j} + e^t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

7.19. $\vec{r} = (t + 1)^2 \cdot \vec{i} + t^3 \cdot \vec{j} + \sqrt{t^2 + 1} \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

7.20. $\vec{r} = (3t - t^3) \cdot \vec{i} + 3t^2 \cdot \vec{j} + (3t + t^2) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

7.21. $\vec{r} = \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \vec{i} + \frac{t}{\sqrt{2}} \cdot \vec{j} + \ln\sin t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{2}$.

7.22. $\vec{r} = \operatorname{ch}^2 t \cdot \vec{i} + \operatorname{sh} t \cdot \operatorname{ch} t \cdot \vec{j} + \operatorname{sh}^2 t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

7.23. $\vec{r} = e^t \sin t \cdot \vec{i} + \vec{j} + e^t \cos t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

7.24. $\vec{r} = (1 + 3t + 2t^2) \cdot \vec{i} + (2 - 2t + 5t^2) \cdot \vec{j} + (1 - t^2) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

7.25. $\vec{r} = \cos t \cdot \vec{i} + \sin t \cdot \vec{j} + \operatorname{ch} t \cdot \vec{k}$, $t_0 = 0$.

7.26. $\vec{r} = \sqrt{5 - t^2} \cdot \vec{i} - \left(2t - t^2\right) \cdot \vec{j} + \left(5 - 2t^2\right) \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

7.27. $\vec{r} = t^2 \cdot \vec{i} + (t^3 - 2) \cdot \vec{j} + t^6 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

7.28. $\vec{r} = \sqrt{t^3 + 3} \cdot \vec{i} - \ln(2t - 1) \cdot \vec{j} + t^3 \cdot \vec{k}$, $t_0 = 1$.

7.29. $\vec{r} = 2\operatorname{tg} t \cdot \vec{i} + 3\cos t \cdot \vec{j} + 3\sin t \cdot \vec{k}$, $t_0 = \frac{\pi}{4}$.

7.30. $\vec{r} = e^{t+1} \cdot \vec{i} - (t^2 - 3t + 1) \cdot \vec{j} + \sqrt{2t + 6} \cdot \vec{k}$, $t_0 = -1$.

Задание 8. В задачах 8.1.-8.30. провести полное исследование указанных функций и построить их графики.

8.1. $y = \frac{x^2 + 1}{x}$; 8.2. $y = \frac{-x^2 - 1}{x}$; 8.3. $y = \frac{x^2}{x - 1}$;

8.4. $y = \frac{x^2}{x + 1}$; 8.5. $y = \frac{x^2}{1 - x}$; 8.6. $y = \frac{x^2}{-x - 1}$;

8.7. $y=\dfrac{x^2+2}{x}$; 8.8. $y=\dfrac{-x^2-2}{x}$; 8.9. $y=\dfrac{x^2}{x-2}$;

8.10. $y=\dfrac{x^2}{2-x}$; 8.11. $y=\dfrac{x^2}{x+2}$; 8.12. $y=\dfrac{x^2}{-x-2}$;

8.13. $y=\dfrac{x^2+3}{x}$; 8.14. $y=\dfrac{-x^2-3}{x}$; 8.15. $y=\dfrac{x^2}{x+3}$;

8.16. $y=\dfrac{x^2}{x-3}$; 8.17. $y=\dfrac{x^2}{3-x}$; 8.18. $y=\dfrac{x^2}{-x-3}$;

8.19. $y=\dfrac{x^2+4}{x}$; 8.20. $y=\dfrac{-x^2-4}{x}$; 8.21. $y=\dfrac{x^2}{x+4}$;

8.22. $y=\dfrac{x^2}{x-4}$; 8.23. $y=\dfrac{x^2}{4-x}$; 8.24. $y=\dfrac{x^2}{-x-4}$;

8.25. $y=\dfrac{2x^2+1}{x}$; 8.26. $y=\dfrac{-2x^2-1}{x}$; 8.27. $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$;

8.28. $y=\dfrac{x^2}{-2x-1}$; 8.29. $y=\dfrac{x^2}{1-2x}$; 8.30. $y=\dfrac{x^2}{2x-1}$.

Рекомендации к выполнению заданий контрольной работы

Основы линейной алгебры

1. Матрицы и операции над ними.

Прямоугольная таблица, состоящая из $m\times n$ элементов произвольной природы, называется *матрицей.*

Матрицы обычно обозначают прописными буквами латинского алфавита: A, B, C, … и записывают в виде

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \text{ или } A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}, \text{ или сокращенно}$$

$$A=\left(a_{ij}\right),\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}.$$

a_{ij} называют *элементами матрицы*. Если элементы матрицы числа, то матрицу называют числовой, если векторы – векторной, функции – функциональной и т.д. В дальнейшем будем рассматривать только числовые матрицы.

Элементы матрицы нумеруются двумя индексами: номер строки и номер столбца, в которых стоит элемент.

Количество строк и столбцов матрицы определяют ее размерность, т.е. если у матрицы *m* строк и *n* столбцов, то говорят, что матрица размерности *m* на *n* и записывают: $A_{m\times n}$.

Говорят, что две *матрицы равны*, если равны их размерности и соответствующие элементы этих матриц.

Матрица, все элементы которой равны нулю, называется *нулевой* и обозначается *O*.

Матрица, состоящая из одной строки, называется *матрицей строкой* или *вектор-строкой*, из одного столбца – *матрицей столбцом* или *вектор-столбцом*.

Матрица, у которой число строк и столбцов одинаковое, называется *квадратной* матрицей. Квадратную матрицу, у которой *n* строк называют матрицей порядка *n*. У квадратных матриц выделяют главную и побочную диагонали. Элементы $a_{11}, a_{22}, a_{33}, ..., a_{nn}$ образуют главную диагональ, элементы $a_{1n}, a_{2\,n-1}, ..., a_{n1}$ – побочную диагональ.

Квадратная матрица, у которой все элементы, кроме элементов главной диагонали равны нулю, *называется диагональной*.

Диагональная матрица, у которой каждый элемент главной диагонали равен единице, называется *единичной матрицей* и обозначается *E*.

Квадратная матрица *называется треугольной*, если все элементы по одну сторону от главной диагонали равны нулю. Различают верхнюю и нижнюю треугольные матрицы.

Действия над матрицами:

Транспонирование.

Замена строк матрицы соответствующими столбцами называется *транспонированием*. Транспонированную матрицу обозначают A^T.

Например, если $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 4 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}$, то $A^T=\begin{pmatrix}1 & 4 & -1\\ 0 & -2 & 3\end{pmatrix}$

Сложение матриц.

Суммой матриц *A* и *B* называется матрица *C*, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов матриц *A* и *B*, т.е. $c_{ij}=a_{ij}+b_{ij},\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Например: $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & -3\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 7\end{pmatrix}$.

Заметим, что **с**ложение может быть выполнено только для матриц с одинаковой размерностью.

Умножение матрицы на число.

Произведением матрицы *A* и действительного числа λ называется матрица *B*, каждый элемент которой равен произведению соответствующего элемента матрицы *A* на число λ, т.е. $b_{ij}=a_{ij}\cdot\lambda,\ i=\overline{1,m},\ j=\overline{1,n}$.

Например: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 6 & 0 \end{pmatrix} \cdot 3 = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 & 3 \\ -3 & 6 & 18 & 0 \end{pmatrix}$.

Произведение матриц.

Матрица A называется *согласованной* с матрицей B, если число столбцов матрицы A равно числу строк матрицы B. Например, матрица $A_{m\times n}$ согласована с матрицей $B_{n\times k}$.

Умножение матрицы A на матрицу B может быть выполнено только тогда, когда матрица A согласована с матрицей B.

Произведением матрицы $A_{m\times n}$ на матрицу $B_{n\times k}$ называется матрица $C_{m\times k}$, каждый элемент которой c_{ij} равен сумме произведений элементов i-ой строки матрицы A на соответствующие элементы j-го столбца матрицы B, т.е. $c_{ij} = \sum\limits_{s=1}^{n} a_{is} \cdot b_{sj}$, $i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,k}$.

Пример 1. Найти произведение матриц $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Решение.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -3 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + (-1)\cdot 3 & 1\cdot 2 + (-1)\cdot 4 \\ 0\cdot 1 + (-3)\cdot 3 & 0\cdot 2 + (-3)\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + (-2)\cdot 3 & 3\cdot 2 + (-2)\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -9 & -12 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Ответ: $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -9 & -12 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$.

Из существования произведения $A \cdot B$ вообще говоря не следует существование произведения $B \cdot A$. В случае если $AB = BA$, матрицы A и B называют *перестановочными*.

Возведение в степень.

Операция возведения в степень может быть выполнена только для квадратных матриц $\underbrace{A^n = A \cdot A \cdot \ldots \cdot A}_{n\ раз}$.

Например, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot 1 + 2\cdot 3 & 1\cdot 2 + 2\cdot 4 \\ 3\cdot 1 + 4\cdot 3 & 3\cdot 2 + 4\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 10 \\ 15 & 22 \end{pmatrix}$

2. Определители.

Основной числовой характеристикой квадратной матрицы является определитель (детерминант). Определитель квадратной матрицы A_{nxn} обозначают: Δ, $\det A$, $|A|$.

Для матрицы A первого порядка определитель $\det A$, равен ее элементу a_{11}.

Для матрицы A второго порядка определитель $\det A$, записывают в виде $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ и вычисляют по правилу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Например, $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = 4 - 6 = -2$.

Для матрицы A третьего порядка определитель $\det A$ записывают в виде $\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$ и вычисляют по правилу:

$$\det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13} -$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{32}a_{23}a_{11}.$$

Правило вычисления определителя третьего порядка называют *правилом треугольника* или *правилом Саррюса*. Это правило можно записать с помощью схемы (рис.1): со знаком «плюс» берут произведения элементов, стоящих на главной диагонали и в вершинах треугольников, основания которых параллельны главной диагонали; со знаком «минус» – произведения элементов, стоящих на побочной диагонали и в вершинах треугольников, основания которых параллельны побочной диагонали.

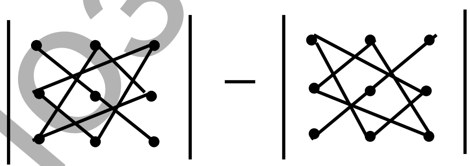


рис. 1

Пример 2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся правилом Саррюса.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1) \cdot 4 + 2 \cdot 2 \cdot (-3) + 0 \cdot 1 \cdot 4 - 4(-1)(-3) - 0 \cdot 2 \cdot 4 - 1 \cdot 2 \cdot 1 =$$

$$= -4 - 12 + 0 - 12 - 0 - 2 = -30.$$

Ответ: –30.

Минором элемента a_{ij} определителя третьего порядка называется определитель второго порядка, полученный из данного вычеркиванием i-ой строки и j-го столбца.

Минор элемента a_{ij} обозначают M_{ij}.

Пример 3. Для определителя $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ записать M_{12}, M_{22}, M_{31}.

Решение.

$M_{12} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -3$; $M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$; $M_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$.

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} называется число

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}.$$

Например, для определителя из примера 3:

$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot M_{12} = -1 \cdot (-3) = 3$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot M_{22} = 1 \cdot (-9) = -9$;

$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot M_{33} = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 4$.

Теорема Лапласа (теорема разложения). Значение определителя равно сумме произведений элементов некоторой строки (столбца) на их алгебраические дополнения.

Пример 4. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение. Воспользуемся теоремой Лапласа. Разложим определитель, например, по элементам третьего столбца.

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33},$$

$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2$, $A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -(-1-6) = 7$, тогда:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 3 \cdot A_{13} + 1 \cdot A_{23} + 0 \cdot A_{33} = 3 \cdot 2 + 1 \cdot 7 = 13.$$

Ответ: 13.

3. Обратные матрицы

Рассмотрим квадратную матрицу A порядка n.

Матрица A называется *невырожденной*, если $\det A \neq 0$. Если $\det A = 0$, то матрицу A называют *вырожденной*.

Матрицу A^{-1} называют обратной матрице A, если $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E$.

Теорема. Матрица A^{-1} существует и единственна тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная.

Обратную матрицу A^{-1} находят по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot \tilde{A}, \tag{1}$$

где матрица $\tilde{A}$ называется *присоединенной* или *союзной* матрицей. $\tilde{A}$ состоит из алгебраических дополнений элементов транспонированной матрицы A:

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

Пример 5. Найти матрицу, обратную матрице $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Обратная матрица существует тогда и только тогда, когда матрица A невырожденная. Найдем определитель матрицы A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot (-1) + 1 \cdot (-2) \cdot 1 -$$

$$-1 \cdot 1 \cdot (-1) - 0 \cdot (-2) \cdot 2 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = 2 - 2 + 1 - 3 = -2 \neq 0.$$

Т.к. определитель матрицы A отличен от нуля, то матрица A^{-1} существует и единственна. Используя формулу (1), найдем матрицу A^{-1}.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & +1 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -5; \qquad A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3; \qquad A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{32} = (-1)^{3+2} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{33} = (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -1.$$

Обратная матрица A^{-1} будет иметь вид:

$$A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Выполним проверку. По определению для матрицы A^{-1} должно выполняться равенство: $A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = E$.

Найдем $A^{-1} \cdot A$

$$A^{-1} \cdot A = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2-3-1 & 1-1+0 & -1+2-1 \\ -10+9+1 & -5+3+0 & 5-6+1 \\ -2+3-1 & -1+1+0 & 1-2-1 \end{pmatrix} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = E.$$

Аналогично можно показать, что $A \cdot A^{-1} = E$.

Ответ: $A^{-1} = -\frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -5 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4. Системы линейных алгебраических уравнений

Система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = b_2; \\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ . \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \qquad (2)$$

называется системой линейных алгебраических уравнений (СЛАУ). Числа a_{ij}, $i = \overline{1,m}, j = \overline{1,n}$ называют коэффициентами системы, числа b_i – свободными членами.

Систему (2) можно записать в виде матричного уравнения $AX = B$, где матрица $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix}$ состоит из коэффициентов системы и называется основной матрицей системы, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец неизвестных и $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$ – матрица-столбец свободных членов.

Матрица A, дополненная столбцом свободных членов называется *расширенной матрицей* системы и обозначается $\bar{A}$:

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array} \right).$$

Решением системы (2) называется набор из n значений неизвестных, при подстановке которых в систему, каждое уравнение системы обращается в тождество.

Система называется *совместной*, если она имеет хотя бы одно решение Если система не имеет решений, то ее называют *несовместной*.

Система, имеющая единственное решение называется *определенной*. Если решений больше одного, то система называется *неопределенной*.

Каждое конкретное решение системы называется *частным решением*. Совокупность всех частных решений называют *общим решением*.

Две системы называют *эквивалентными*, если они имеют одно и то же общее решение.

Система (2) называется *однородной*, если все ее свободные члены равны нулю. Однородная система всегда совместна т.к. набор $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, …, $x_n = 0$ является решением этой системы. Это решение называется *нулевым* или *тривиальным* решением.

5. Методы решения систем линейных алгебраических уравнений.

Рассмотрим систему, состоящую из трех уравнений и содержащую три неизвестных:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2; \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3. \end{cases} \qquad (3)$$

Систему (3) можно записать в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \text{ или } AX = B.$$

1. Метод Крамера.

Теорема. Система, состоящая из n уравнений и содержащая n неизвестными имеет единственное решение тогда и только тогда, когда основная матрица системы является невырожденной, т.е $\det A \neq 0$.

Если выполнены условия теоремы, то решение системы (3) можно найти по формулам:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta}.$$

где $\Delta = \det A$; Δ_j, $j = \overline{1,3}$, получены из Δ заменой j-го столбца столбцом свободных членов.

Следствие. Если $\det A = 0$, то система либо несовместна, либо имеет бесконечно много решений.

Пример 6. Решить методом Крамера систему $\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ 3x + y - 2z = -1, \\ x + z = 4. \end{cases}$

Решение. Запишем систему $\begin{cases} 2x + y - z = 1, \\ 3x + y - 2z = -1, \\ x + z = 4, \end{cases}$ в виде матричного уравнения:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Определитель основной матрицы системы $\Delta = -2 \neq 0$ (см. пример 5).

Т.к. $\Delta \neq 0$, то система имеет единственное решение. Вычислим Δ_1, Δ_2, Δ_3.

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 + (-8) + 0 + 4 + 1 - 0 = -2;$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 + (-2) - 12 - 1 - 3 + 16 = -4;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix} = 8 - 1 + 0 - 1 - 12 - 0 = -6.$$

Тогда $x = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{-2}{-2} = 1$, $y = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = \dfrac{-4}{-2} = 2$, $z = \dfrac{-6}{-2} = 3$.

Ответ: $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.

2. Метод обратной матрицы.

Рассмотрим систему (3) как матричное уравнение $A \cdot X = B$. Если матрица A невырожденная, то для нее существует обратная матрица A^{-1}. Умножив обе части уравнения $A \cdot X = B$ на матрицу A^{-1} слева, получим решение этого уравнения $X = A^{-1}B$.

Пример 7. Решить методом обратной матрицы систему $\begin{cases} 2x + y - z = 0, \\ x + y + z = 3, \\ x - y \qquad = 1. \end{cases}$

Решение. Запишем систему в виде матричного уравнения $AX = B$, где

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем определитель матрицы A.

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} - 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 2 + 1 + 2 = 5 \neq 0.$$

Т.к. $\det A \neq 0$, то для матрицы A существует обратная матрица A^{-1}. Найдем ее по формуле (1).

$$A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 1; \quad A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 3;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2; \quad A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = -3; \quad A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}.$$

Решение системы найдем по формуле $X = A^{-1}B$, т.е.

$$X=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}1&1&2\\1&1&-3\\-2&3&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\3\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}0+3+2\\0+3-3\\0+9+1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\cdot\begin{pmatrix}5\\0\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Ответ: $x=1$, $y=0$, $z=2$.

3. Метод Гаусса.

Матрица называется *ступенчатой*, если первый слева ненулевой элемент каждой строки, начиная со второй находится правее такого же элемента предыдущей строки.

Например, матрица $A=\begin{bmatrix}1&3&-1&0&2\\0&2&0&6&7\\0&0&0&3&5\\0&0&0&0&-1\end{bmatrix}$ является ступенчатой.

Элементарными преобразованиями матрицы являются:

1. транспонирование матрицы;
2. перестановка двух строк (столбцов) матрицы;
3. умножение всех элементов какой-либо строки (какого-либо столбца) на число, отличное от нуля;
4. сложение элементов какой-либо строки (какого-либо столбца) с соответствующими элементами другой строки (столбца) умноженными на некоторое число.

Решение системы *методом Гаусса* (*методом последовательных исключений*) состоит из двух этапов: прямой и обратный ход метода Гаусса.

Прямой ход метода Гаусса заключается в том, что с помощью элементарных преобразований строк или используя правило «прямоугольника» расширенная матрица системы приводится к ступенчатому виду.

На втором этапе (обратный ход) из системы уравнений, соответствующей ступенчатой матрице, последовательно, начиная с последнего уравнения, находят (если это возможно) решение системы.

Пример 8. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases}x-2y+z=3,\\-2x+z=-1,\\x+4y+3z=15.\end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу системы и с помощью элементарных преобразований строк приведем ее к ступенчатому виду:

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\-2&0&1&-1\\1&4&3&15\end{array}\right)\overset{(1)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\0&-4&3&5\\0&6&2&12\end{array}\right)\overset{(2)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1&-2&1&3\\0&-4&3&5\\0&3&1&6\end{array}\right)\overset{(3)}{\sim}$$

$$\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & -4 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 13 & 39\end{array}\right)\overset{(4)}{\sim}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & -2 & 1 & 3\\ 0 & -4 & 3 & 5\\ 0 & 0 & 1 & 3\end{array}\right).$$

(1): элементы первой строки матрицы (их переписываем в новую матрицу без изменений) умножим на 2 и сложим с соответствующими элементами второй строки ($1\cdot 2-2=0$, $-2\cdot 2+0=-4$, $1\cdot 2+1=3$, $3\cdot 2-1=5$ – получаем вторую строку новой матрицы: 0; –4; 3; 5). Элементы первой строки умножим на (–1) и сложим с соответствующими элементами третьей строки ($1\cdot(-1)+1=0$, $-2\cdot(-1)+4=6$, $1\cdot(-1)+3=2$, $3\cdot(-1)+15=12$ – получаем третью строку новой матрицы: 0; 6; 2; 12).

(2): элементы первой и второй строки переписываем без изменений, а элементы третьей строки разделим на 2.

(3): элементы первой строки переписываем без изменений, элементы второй строки (их переписываем в новую матрицу без изменений) умножаем на 3 и складываем с соответствующими элементами третьей строки, умноженными на 4 ($(-4)\cdot 3+3\cdot 4=0$, $3\cdot 3+1\cdot 4=13$, $5\cdot 3+6\cdot 4=39$ – получаем третью строку новой матрицы: 0; 0; 13; 39).

(4): элементы первой и второй строки переписываем без изменений, а элементы третьей строки разделим на 13.

Полученной ступенчатой матрице соответствует система:

$$\begin{cases} x-2y+z=3,\\ \quad -4y+3z=5,\\ \qquad\qquad z=3.\end{cases}$$

Из последнего уравнения $z=3$. Подставим найденное значение z во второе уравнение: $-4y+3\cdot 3=5$, следовательно $y=1$. Полученные значения z и y подставим в первое уравнение: $x-2\cdot 1+1\cdot 3=3$. Отсюда $x=2$.

Ответ: $x=2$, $y=1$, $z=3$.

Пример 9. Решить систему методом Гаусса $\begin{cases} 2x+3y-z=1,\\ x+2y+2z=6,\\ 3x+4y-3z=-2.\end{cases}$

Решение. Составим расширенную матрицу системы

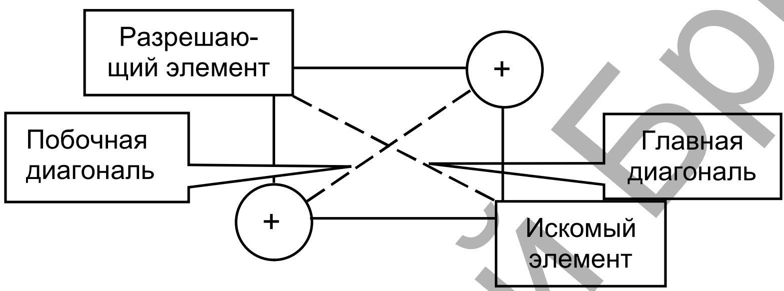
$$\bar{A}=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 2 & 6\\ 3 & 4 & -3 & -2\end{array}\right).$$

Приведем матрицу $\bar{A}$ к ступенчатому виду используя правило «прямоугольника». Назовем первую строку матрицы $\bar{A}$ *разрешающей строкой*, а элемент $a_{11}=2$ *разрешающим элементом*.

$$\bar{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} \boxed{2} & 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 4 & -3 & -2 \end{array}\right).$$

Разрешающую строку переписываем без изменений, под разрешающим элементом записываем нули. Остальные элементы пересчитываем по правилу:

1. искомый и разрешающий элемент стоят в диагонально противоположных вершинах прямоугольника и образуют главную диагональ. Определяем еще два элемента, которые стоят в двух других вершинах этого же прямоугольника и образуют его вторую диагональ (побочную);



2. искомый элемент равен произведению элементов по главной диагонали минус произведение элементов по побочной диагонали.

Для матрицы $\bar{A}$ получим:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2\cdot 2-1\cdot 3 & 2\cdot 2-1\cdot(-1) & 6\cdot 2-1\cdot 1 \\ 0 & 4\cdot 2-3\cdot 3 & -3\cdot 2-3\cdot(-1) & -2\cdot 2-3\cdot 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & 5 & 11 \\ 0 & -1 & -3 & -7 \end{array}\right).$$

На следующем шаге разрешающей строкой является вторая строка, а разрешающим элементом элемент $a_{22} = 1$. Элементы разрешающей строки и всех выше расположенных строк остаются неизменными; элементы, расположенные под разрешающим элементом обращаются в нуль. Остальные элементы пересчитываем по правилу «прямоугольника».

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & -3\cdot 1-5\cdot(-1) & -7\cdot 1-11\cdot(-1) \end{array}\right) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right).$$

Вместе с правилом «прямоугольника» можно использовать и элементарные преобразования. Так, например, в полученной матрице элементы последней строки можно разделить на 2. Получим матрицу $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 5 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right)$, которая имеет ступенчатый вид. Ей соответствует система уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 3y - z = 1, \\ \qquad y + 5z = 11, \\ \qquad\qquad z = 2. \end{cases}$$

Из последнего уравнения $z = 2$. Подставим найденное значение z во второе уравнение: $y + 5 \cdot 2 = 11$, следовательно $y = 1$. Полученные значения z и y подставим в первое уравнение: $2x + 3 \cdot 1 - 1 \cdot 2 = 1$. Отсюда $x = 0$.

Ответ: $x = 0$, $y = 1$, $z = 2$.

6. Однородные системы.

Рассмотрим систему линейных однородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots a_{1n}x_n = 0; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots a_{2n}x_n = 0; \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots a_{mn}x_n = 0. \end{cases}$$

Теорема. Однородная система, состоящая из n уравнений и содержащая n неизвестных, имеет ненулевое решение тогда и только тогда, когда основная матрица системы вырожденная, т.е. $\det A = 0$.

Пример 10. Решить систему уравнений $\begin{cases} 2x + 2y - z = 0, \\ 5x + 4y - 6z = 0, \\ 3x + 2y - 5z = 0. \end{cases}$

Решение. Найдем определитель основной матрицы системы:

$$\begin{vmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \end{vmatrix} = 2 \cdot (4 \cdot (-5) - 2 \cdot (-6)) - 2 \cdot (5 \cdot (-5) - 3 \cdot (-6)) - 1 \cdot (5 \cdot 2 - 3 \cdot 4) =$$

$$= 2 \cdot (-8) - 2 \cdot (-7) - 1 \cdot (-2) = -16 + 14 + 2 = 0.$$

Т.к. определитель равен нулю, то система имеет ненулевое решение. Для решения системы воспользуемся методом Гаусса. Поскольку система однородная, то к ступенчатому виду будем приводить основную матрицу системы:

$$\begin{pmatrix} \boxed{2} & 2 & -1 \\ 5 & 4 & -6 \\ 3 & 2 & -5 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -7 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix},$$

т.к. полученная матрица имеет две одинаковые строки (а, следовательно, соответствующая система имеет два одинаковых уравнения), то ее можно записать в виде $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 0 & -2 & -7 \end{pmatrix}$.

Полученной ступенчатой матрице будет соответствовать система уравнений:

$$\begin{cases} 2x + 2y - z = 0, \\ \quad -2y - 7z = 0. \end{cases}$$

Система состоит из двух уравнений и содержит три переменные. Выразим переменные *x* и *y* через переменную *z*:

$$y = -\frac{7}{2}z; \; x = \frac{1}{2} \cdot (7z + z) = 4z.$$

Обозначим $z = 2t$, тогда $y = -7t,\ x = 8t,\ t \in \mathbb{R}.$

Ответ: $x = 8t,\ y = -7t,\ z = 2t,\ t \in \mathbb{R}.$

7. Собственные значения и собственные векторы матрицы.

Рассмотрим квадратную матрицу A_{nxn} и вектор-столбец

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Вектор *X* называется *собственным вектором* матрицы *A*, если существует такое действительное число $\lambda \neq 0$, что выполняется равенство

$$AX = \lambda X. \tag{4}$$

Число λ называется *собственным значением* или *собственным числом* матрицы *A*.

Решим матричное уравнение

$$AX = \lambda X;$$
$$AX - \lambda X = O;$$
$$(A - \lambda E) \cdot X = O.$$

Чтобы полученное уравнение имело ненулевое решение необходимо, чтобы матрица $A - \lambda E$ была вырожденной т.е.

$$|A - \lambda E| = 0. \tag{5}$$

Уравнение (5) называется *характеристическим уравнением*.

Из уравнения (5) находят собственные значения. Подставляя их в уравнение (4), находят собственные векторы матрицы *A*.

Пример 11. Найти собственные числа, и собственные векторы матрицы $A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 3 \\ 0 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Решение. Запишем матрицу $A - \lambda E$.

$$A-\lambda E=\begin{pmatrix}8&5&3\\0&2&-6\\0&-1&1\end{pmatrix}-\lambda\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8&5&3\\0&2&-6\\0&-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\lambda&0&0\\0&\lambda&0\\0&0&\lambda\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}8-\lambda&5&3\\0&2-\lambda&-6\\0&-1&1-\lambda\end{pmatrix}.$$

Составим характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix}8-\lambda&5&3\\0&2-\lambda&-6\\0&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=0;$$

$$\begin{vmatrix}8-\lambda&5&3\\0&2-\lambda&-6\\0&-1&1-\lambda\end{vmatrix}=(8-\lambda)\cdot((2-\lambda)\cdot(1-\lambda)-6)=$$

$$=(8-\lambda)\cdot\left(2-3\lambda+\lambda^2-6\right)=(8-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-3\lambda-4\right)=0.$$

Решим полученное уравнение:

$$(8-\lambda)\cdot\left(\lambda^2-3\lambda-4\right)=0;$$

$$\lambda_1=8 \text{ или } \lambda^2-3\lambda-4=0; \Rightarrow \lambda_2=-1; \lambda_3=4.$$

$\lambda_1=8$, $\lambda_2=-1$, $\lambda_3=4$ – собственные значения матрицы A.

Для каждого из полученных собственных значений найдем собственные векторы матрицы A.

1) Если $\lambda=8$, то $A-\lambda E=\begin{pmatrix}8-8&5&3\\0&2-8&-6\\0&-1&1-8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&5&3\\0&-6&-6\\0&-1&-7\end{pmatrix}$

и матричное уравнение выглядит:

$$\begin{pmatrix}0&5&3\\0&-6&-6\\0&-1&-7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Этому уравнению соответствует однородная система линейных уравнений $\begin{cases}5x_2+3x_3=0;\\-6x_2-6x_3=0;\\-x_2-7x_3=0.\end{cases}$

Из второго уравнения $x_2=-x_3$, тогда оставшиеся два уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} -5x_3 + 3x_3 = 0; \\ x_3 - 7x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2x_3 = 0; \\ -6x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow x_3 = 0,\ x_2 = 0,\ x_1 = m,\ m \in \mathbb{R},\ m \neq 0.$$

Тогда вектор $X_1 = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $m \in \mathbb{R}$, $m \neq 0$ – собственный вектор матрицы A.

2) Если $\lambda = -1$, то $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 8+1 & 5 & 3 \\ 0 & 2+1 & -6 \\ 0 & -1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

и матричное уравнение выглядит:

$$\begin{pmatrix} 9 & 5 & 3 \\ 0 & 3 & -6 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Этому уравнению соответствует однородная система линейных уравнений $\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0; \\ 3x_2 - 6x_3 = 0; \\ -x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Очевидно, что система содержит два одинаковых уравнения: второе и третье, поэтому ее можно переписать в виде: $\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0; \\ -x_2 + 2x_3 = 0. \end{cases}$

Отсюда:

$$\begin{cases} 9x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0; \\ -x_2 + 2x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 9x_1 + 10x_3 + 3x_3 = 0; \\ x_2 = 2x_3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{13}{9}x_3; \\ x_2 = 2x_3; \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_3 = 9k,\ x_2 = 18k,\ x_1 = -13k,\ k \in \mathbb{R},\ k \neq 0.$$

Тогда вектор $X_2 = \begin{pmatrix} -13k \\ 18k \\ 9k \end{pmatrix}$, $k \in \mathbb{R}$, $k \neq 0$ – собственный вектор матрицы A.

3) Если $\lambda = 4$, то $A - \lambda E = \begin{pmatrix} 8-4 & 5 & 3 \\ 0 & 2-4 & -6 \\ 0 & -1 & 1-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$

и матричное уравнение выглядит:

$$\begin{pmatrix} 4 & 5 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Этому уравнению соответствует однородная система линейных уравнений $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0; \\ \quad -2x_2 - 6x_3 = 0; \\ \quad\; -x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Очевидно, что система содержит два одинаковых уравнения: второе и третье, поэтому ее можно переписать в виде: $\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0; \\ \quad -x_2 - 3x_3 = 0. \end{cases}$

Отсюда:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 + 3x_3 = 0; \\ \quad -x_2 - 3x_3 = 0; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4x_1 - 15x_3 + 3x_3 = 0; \\ x_2 = -3x_3; \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 3x_3; \\ x_2 = -3x_3; \end{cases}$$

$$\Rightarrow \; x_3 = t,\; x_2 = -3t,\; x_1 = 3t,\; t \in \mathbb{R},\; t \neq 0.$$

Тогда вектор $X_3 = \begin{pmatrix} 3t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}, t \neq 0$ – собственный вектор матрицы A.

Ответ: $X_1 = \begin{pmatrix} m \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, X_2 = \begin{pmatrix} -13k \\ 18k \\ 9k \end{pmatrix}, X_3 = \begin{pmatrix} 3t \\ -3t \\ t \end{pmatrix}, m,k,t \in \mathbb{R},\; m \neq 0, k \neq 0,\; t \neq 0.$

Аналитическая геометрия

8. Векторы в $\mathbb{R}^2$ *и* $\mathbb{R}^3$. Скалярное произведение векторов.

Вектором называют направленный отрезок или упорядоченную пара (тройку) чисел. Векторы, параллельные одной прямой или лежащие на прямой, называются *коллинеарными*. Векторы, лежащие в одной плоскости или параллельные одной и той же плоскости, называются *компланарными*.

Проекцией вектора $\overrightarrow{AB}$ на ось Ox называется длина отрезка CD этой оси, заключенного между основаниями перпендикуляров, проведенных из начальной и конечной точек вектора $\overrightarrow{AB}$, взятая со знаком плюс, если направление отрезка CD совпадает с направлением оси проекции (рис. 2), и со знаком минус, если эти направления противоположны (рис. 3).

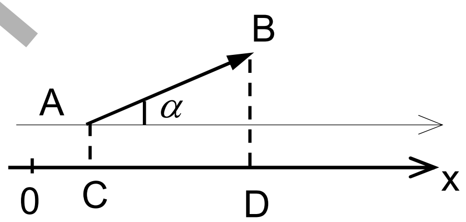


рис. 2

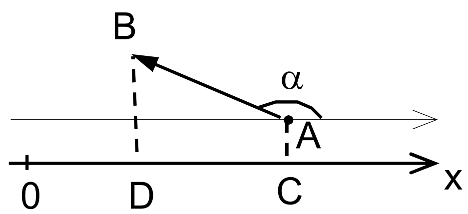


рис. 3

Проекция вектора на ось равна длине вектора, умноженной на косинус угла между вектором и осью:

$$пр_{Ox}\overrightarrow{AB} = |\overrightarrow{AB}| \cdot \cos\alpha.$$

Проекции вектора на координатные оси называются *координатами вектора*: $\vec{a} = (x; y; z)$; $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$.

Линейными операциями над векторами называют сложение и вычитание векторов, умножение вектора на постоянное число.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то $\vec{a} \pm \vec{b} = (x_1 \pm x_2; y_1 \pm y_2; z_1 \pm z_2)$.

При умножении вектора на число все его координаты умножаются на это число.

Скалярным произведением двух векторов называется число, равное произведению длин этих векторов на косинус угла между ними:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi; \qquad \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot пр_{\vec{a}}\vec{b} = |\vec{b}| \cdot пр_{\vec{b}}\vec{a}.$$

Отметим, что $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ тогда и только тогда, когда векторы перпендикулярны или хотя бы один из них нуль-вектор.

Из формулы скалярного произведения векторов легко получить формулу для определения угла между векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}.$$

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, $\vec{b} = (x_2; y_2; z_2)$, то их скалярное произведение равно сумме произведений одноименных координат:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2.$$

Если вектор $\vec{a}$ задан своими координатами $\vec{a} = (x_1; y_1; z_1)$, то его длину можно найти по формуле:

$$|\vec{a}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2}.$$

Механический смысл скалярного произведения. Если материальная точка, на которую действует сила $\vec{F}$, совершает перемещение вдоль вектора $\vec{s}$ то работа A силы равна скалярному произведению вектора силы на вектор перемещения: $A = \vec{F} \cdot \vec{s}$.

9. Векторное произведение векторов.

Упорядоченная тройка некомпланарных векторов с общим началом называется *правой*, если при наблюдении из конца третьего вектора кратчайший поворот от первого вектора ко второму виден в направлении, противоположном направлению движения часовой стрелки. В противном случае тройка векторов называется *левой*.

Векторным произведением вектора $\vec{a}$ на вектор $\vec{b}$ называется вектор $\vec{a}\times\vec{b}$, длина которого численно равна площади параллелограмма построенного на этих векторах $|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|\cdot\sin\alpha$, который перпендикулярен плоскости векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и направлен так, чтобы тройка векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{a}\times\vec{b}$ правая.

Отметим, что $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0}$ тогда и только тогда, когда векторы коллинеарны или хотя бы один из них нуль-вектор.

Если векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы своими координатами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, то их векторное произведение равно

$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}.$$

Механический смысл векторного произведения. Пусть некоторое твердое тело неподвижно закреплено в точке A, а в точке B этого тела приложена сила $\vec{F}$. В этом случае возникает вращающий момент, численно равный произведению $|\overrightarrow{AB}|\cdot|\vec{F}|\cdot\sin\alpha$. В механике его принято называть моментом силы: $\vec{M}=\overrightarrow{AB}\times\vec{F}$.

10. Смешанное произведение трех векторов.

Смешанным произведением трех векторов называется число, которое получится, если первые два вектора перемножить векторно и результат скалярно умножить на третий вектор: $(\vec{a}\times\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}$.

Отметим, что смешанное произведение векторов $\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=0$ тогда и только тогда, когда векторы компланарны или хотя бы один из них нуль-вектор.

Смешанное произведение некомпланарных векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ по модулю численно равно объему параллелепипеда, построенного на векторах-сомножителях. Оно положительно, если тройка векторов правая, и отрицательно, если она левая.

Если векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ заданы своими координатами $\vec{a}=(x_1;y_1;z_1)$, $\vec{b}=(x_2;y_2;z_2)$, $\vec{c}=(x_3;y_3;z_3)$, то смешанное произведение равно определителю

$$\vec{a}\,\vec{b}\,\vec{c}=\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

Пример 12. Даны четыре точки: *A*(4;7;8), *B*(–1;13;0), *C*(2;4;9), *S*(1;8;9). Найти:

6) угол между ребрами *AB* и *AS*;
7) площадь грани *ABC*;
8) объем пирамиды *SABC*.

Решение.

1) Для нахождения угла между ребрами *AB* и *AS* воспользуемся формулой:

$$\cos\varphi = \cos(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AS}) = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AS}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AS}\right|}.$$

Найдем координаты и длины векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AS}$:

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A;\ y_B - y_A;\ z_B - z_A) = (-1-4;\ 13-7;\ 0-8) = (-5;\ 6;\ -8);$$

$$\overrightarrow{AS} = (x_S - x_A;\ y_S - y_A;\ z_S - z_A) = (1-4;\ 8-7;\ 9-8) = (-3;\ 1;\ 1);$$

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \sqrt{(-5)^2+8^2+(-8)^2} = \sqrt{25+36+64} = \sqrt{125} \approx 11{,}180;$$

$$\left|\overrightarrow{AS}\right| = \sqrt{(-3)^2+1^2+1^2} = \sqrt{9+1+1} = \sqrt{11} \approx 3{,}317.$$

Тогда $\cos\varphi = \dfrac{-5\cdot(-3)+6\cdot 1-8\cdot 1}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{11}} = \dfrac{13}{\sqrt{125}\cdot\sqrt{11}} \approx 0{,}351.$

2) Площадь грани *ABC* найдем по формуле:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|.$$

Найдем координаты вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A;\ y_C - y_A;\ z_C - z_A) = (2-4;\ 4-7;\ 9-8) = (-2;\ -3;\ 1).$$

Найдем векторное произведение векторов $\overrightarrow{AB}$ и $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -5 & 6 & -8 \\ -2 & -3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \vec{i}\cdot(6\cdot 1-(-8)\cdot(-3)) - \vec{j}\cdot((-5)\cdot 1-(-8)\cdot(-2)) + \vec{k}\cdot((-5)\cdot(-3)-6\cdot(-2)) =$$

$$= -18\vec{i} + 21\vec{j} + 27\vec{k}.$$

Тогда площадь грани *ABC* равна:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \frac{1}{2}\sqrt{(-18)^2+21^2+27^2} = \frac{\sqrt{1494}}{2} \approx \frac{38{,}652}{2} = 19{,}326\ \left(ед^2\right).$$

3) Найдем объем пирамиды *SABC*:

$$V_{пир} = \frac{1}{6}\left|\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS}\right|,\ \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}.$$

$$\overrightarrow{AB}=(x_1;\ y_1;\ z_1)=(-5;6;-8);\ \overrightarrow{AC}=(x_2;\ y_2;\ z_2)=(-2;-3;1);$$
$$\overrightarrow{AS}=(x_3;\ y_3;\ z_3)=(-3;1;1).$$
$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AS}=\begin{vmatrix}-5 & 6 & -8\\ -2 & -3 & 1\\ -3 & 1 & 1\end{vmatrix}=20-6+88=102.$$
$$V_{пир}=\frac{1}{6}\cdot 102=17\left(ед^3\right).$$

11. Прямая на плоскости.

Выпишем различные виды *уравнения прямой L* на плоскости:

1. L: $Ax+By+C=0$ – общее уравнение прямой, вектор $\vec{n}=(A;B)$ перпендикулярен прямой и называется ее *нормальным вектором*.

2. L: $A(x-x_0)+B(y-y_0)=0$ – уравнение прямой с нормальным вектором $(A;B)$, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$.

3. $L:\dfrac{x}{a}+\dfrac{y}{b}=1$ – уравнение прямой «в отрезках».

4. $L: y=k\cdot x+b$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=tg\varphi$, где φ – угол между прямой L и положительным направлением оси Ox.

5. L: $y-y_0=k(x-x_0)$ – уравнение прямой с угловым коэффициентом $k=tg\varphi$, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$.

6. $L:\begin{cases}x=x_0+mt,\\ y=y_0+nt,\end{cases}$ – параметрические уравнения прямой L, где вектор $\vec{s}=(m;n)$ параллелен прямой L и называется *направляющим вектором* прямой, параметр $t\in\mathbb{R}$.

7. L: $\dfrac{x-x_0}{m}=\dfrac{y-y_0}{n}$ – уравнение прямой с направляющим вектором $\vec{s}=(m;n)$, проходящей через точку $M_0(x_0;y_0)$.

8. L: $\dfrac{x-x_1}{x_2-x_1}=\dfrac{y-y_1}{y_2-y_1}$ – уравнение прямой, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1;y_1)$ и $M_2(x_2;y_2)$.

Углом между двумя прямыми называют угол между их нормальными векторами.

1) Пусть прямые L_1 и L_2 заданы общими уравнениями:
$L_1: A_1x+B_1y+C_1=0$, $L_2: A_2x+B_2y+C_2=0$, тогда угол между прямыми определяется по формуле:

$$\cos\varphi=\frac{\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\overrightarrow{n_2}|}=\frac{A_1A_2+B_1B_2}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}}\cdot\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}}}.$$

Условие перпендикулярности этих прямых: $A_1A_2 + B_1B_2 = 0$.

Условие параллельности: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2}$.

2) Пусть прямые L_1 и L_2 заданы уравнениями: $L_1:\ y = k_1x + b_1$ и $L_2:\ y = k_2x + b_2$, тогда угол между прямыми определяется по формуле:

$$tg\varphi = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2}.$$

Условие перпендикулярности этих прямых: $k_1 \cdot k_2 = -1$.

Условие параллельности: $k_1 = k_2$.

Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1)$ до прямой $Ax + By + C = 0$ определяется по формуле $d = \dfrac{|Ax_1 + By_1 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$.

Пример 13. Даны вершины треугольника *ABC*: *A*(4;3), *B*(–3;–3), *C*(2;7). Найти:

1) длину стороны *AC*;
2) длину высоты *BH*, проведенной из вершины *B*;
3) уравнение высоты *BH*;
4) уравнение медианы *CM*, проведенной из вершины *C*;
5) сделать чертеж.

Решение.

1) Длину стороны AC найдем как длину вектора $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AC} = (x_C - x_A;\ y_C - y_A) = (2 - 4;\ 7 - 3) = (-2;\ 4);$$

$$\left|\overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 4^2} = \sqrt{4 + 16} = \sqrt{20} \approx 4{,}472.$$

2) Для нахождения длины высоты *BH*, составим уравнение прямой *(AC)*. Воспользуемся уравнением прямой, проходящей через две заданные точки $A(x_1; y_1)$ и $C(x_2; y_2)$:

$$(AC):\ \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} \Rightarrow (AC):\ \frac{x - 4}{2 - 4} = \frac{y - 3}{7 - 3} \Rightarrow (AC):\ \frac{x - 4}{-2} = \frac{y - 3}{4}.$$

Найденное уравнение прямой *(AC)* можно записать в виде:

$$(AC):\ \frac{x - 4}{-2} = \frac{y - 3}{4} \Rightarrow (AC):\ \frac{x - 4}{-1} = \frac{y - 3}{2} \Rightarrow (AC):\ 2x + y - 11 = 0.$$

Тогда, расстояние от точки B(–3; –3) до прямой $(AC):\ 2x + y - 11 = 0$:

$$d = \frac{|2 \cdot (-3) + 1 \cdot (-3) - 11|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|-20|}{\sqrt{5}} = 4\sqrt{5} \approx 8{,}944.$$

3) Высота *BH* перпендикулярна прямой *(AC)*. Следовательно, вектор $\overrightarrow{AC} \perp BH$ и является нормальным вектором прямой (*BH)*. Составим уравнение высоты *BH* пользуясь уравнением прямой заданной нор-

мальным вектором $\overrightarrow{AC} = (-2; 4)$, проходящей через заданную точку $B(-3; -3)$:

$(BH): -2(x-(-3)) + 4(y-(-3)) = 0 \Rightarrow -(x+3) + 2(y+3) = 0 \Rightarrow -x + 2y + 3 = 0.$

4) Найдем координаты середины отрезка AB по формуле:

$$x_M = \frac{x_A + x_C}{2};\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \Rightarrow M\left(\frac{4-3}{2}; \frac{3-3}{2}\right) \Rightarrow M\left(\frac{1}{2}; 0\right).$$

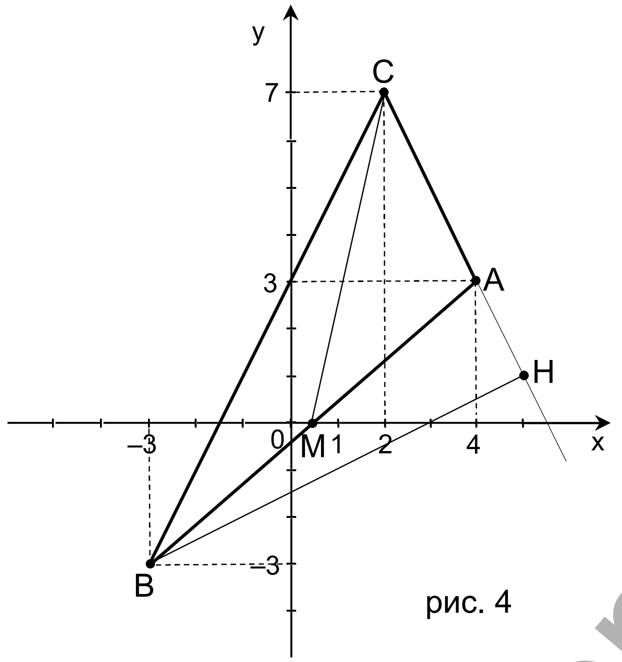


рис. 4

Для составления уравнения медианы CM воспользуемся формулой уравнения прямой, проходящей через две точки $C(2;7)$ и $M\left(\frac{1}{2}; 0\right)$:

$$(\mathrm{CM}): \frac{x-2}{1/2-2} = \frac{y-7}{0-7} \Rightarrow \frac{x-2}{-3/2} = \frac{y-7}{-7};$$

$$(\mathrm{CM}): 14x - 3y - 7 = 0.$$

5) Решение задачи проиллюстрируем на рис.4.

12. Плоскость.

Общее уравнение плоскости имеет вид $Ax + By + Cz + D = 0$, где $\vec{n} = (A; B; C)$ называют *нормальным вектором* плоскости, причем выполняется условие $A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$.

Существуют различные способы задания плоскости, выпишем соответствующие им уравнения:

1. $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ – уравнение плоскости с известными нормальным вектором $\vec{n} = (A; B; C)$ и точкой $M_0(x_0; y_0; z_0)$, принадлежащей плоскости.

2. $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ – уравнение плоскости в «отрезках», причем, $a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$.

3. $\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$ – уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки $M_i(x_i; y_i; z_i)$, $(i = 1, 2, 3)$.

Рассмотрим две плоскости α: $A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$ и β: $A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$.

Углом между двумя плоскостями α и β называется угол между их нормальными векторами:

$$\cos\varphi = \frac{\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2}}{\left|\overrightarrow{n_1}\right| \cdot \left|\overrightarrow{n_2}\right|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}.$$

Условие перпендикулярности плоскостей α и β:

$$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = 0 \text{ или } A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2 = 0.$$

Условие параллельности плоскостей α и β:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} \neq \frac{D_1}{D_2}.$$

Расстояние от точки $M_1(x_1; y_1; z_1)$ до плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ вычисляется по формуле:

$$d = \frac{|\,Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

13. Прямая в пространстве. Прямая и плоскость.

1. $\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \end{cases}$ – общие уравнения прямой в пространстве: прямая в пространстве определяется как линия пересечения двух плоскостей.

2. $\dfrac{x - x_0}{m} = \dfrac{y - y_0}{n} = \dfrac{z - z_0}{p}$ – канонические уравнения прямой в пространстве с направляющим вектором $\vec{s} = (m, n, p)$ и точкой (x_0, y_0, z_0), лежащей на прямой.

3. $\begin{cases} x = x_0 + mt, \\ y = y_0 + nt, \\ z = z_0 + pt, \end{cases}$ – параметрические уравнения прямой в пространстве, где $\vec{s} = (m, n, p)$ – направляющий вектор, $t \in \mathbb{R}$ – параметр.

4. $\dfrac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \dfrac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \dfrac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ – уравнения прямой в пространстве, проходящей через две заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$.

Пусть две прямые заданы каноническими уравнениями:

$$L_1:\ \frac{x - x_1}{m_1} = \frac{y - y_1}{n_1} = \frac{z - z_1}{p_1};\ L_2:\ \frac{x - x_2}{m_2} = \frac{y - y_2}{n_2} = \frac{z - z_2}{p_2}.$$

Тогда величина угла между ними определяется как величина угла между их направляющими векторами и определяется:

$$\cos\varphi = \cos(\vec{s_1}, \vec{s_2}) = \frac{\vec{s_1} \cdot \vec{s_2}}{|\vec{s_1}| \cdot |\vec{s_2}|} = \frac{m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2}{\sqrt{m_1^2 + n_1^2 + p_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + n_2^2 + p_1^2}}.$$

Условие параллельности прямых L_1 и L_2: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{n_1}{n_2} = \frac{p_1}{p_2}$.

Условие перпендикулярности прямых L_1 и L_2: $m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$.

Угол между прямой $L: \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$ и плоскостью α: $Ax + By + Cz + D = 0$ определяют по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|\,Am + Bn + Cp\,|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \cdot \sqrt{m^2 + n^2 + p^2}}.$$

Условие параллельности прямой L и плоскости α: $Am + Bn + Cp = 0$.

Условие перпендикулярности прямой L и плоскости α: $\frac{A}{m} = \frac{B}{n} = \frac{C}{p}$.

Пример 14. Даны четыре точки: $A(2; -1; -1)$, $B(2; 2; 0)$, $C(-1; 2; 1)$, $S(0; 1; 4)$. Найти:

7) уравнение плоскости ABC;
8) расстояние от точки S до грани ABC;
9) уравнение высоты пирамиды, проведенной из вершины S.

Решение.

1) Зная координаты точек $A(2; -1; -1)$, $B(2; 2; 0)$, $C(-1; 2; 1)$, составим уравнение плоскости ABC

$$\begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+1 \\ 2-2 & 2+1 & 0+1 \\ -1-2 & 2+1 & 1+1 \end{vmatrix} = 0 \text{ или } \begin{vmatrix} x-2 & y+1 & z+1 \\ 0 & 3 & 1 \\ -3 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 0.$$

Раскрыв определитель по элементам первой строки, получим:

$$3(x-2) - 3(y+1) + 9(z+1) = 0 \Rightarrow 3x - 3y + 9z = 0 \Rightarrow x - y + 3z = 0.$$

Таким образом, уравнение плоскости ABC: $x - y + 3z = 0$.

2) Зная уравнение плоскости ABC, найдем расстояние от точки $S(0; 1; 4)$ до грани ABC:

$$d = \frac{|1 \cdot 0 - 1 \cdot 1 + 3 \cdot 4 + 0|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + 3^2}} = \frac{11}{\sqrt{11}} = \sqrt{11} \approx 3{,}317.$$

3) Составим уравнение высоты пирамиды, проведенной из вершины S. Т.к. искомая высота перпендикулярна плоскости ABC, то нормальный вектор плоскости $\vec{n} = (A; B; C) = (1; -1; 3)$ является направляющим вектором высоты, т.е. $\vec{n} = \vec{s} = (1; -1; 3)$. Высота проходит через точку $S(0; 1; 4)$. Тогда уравнение высоты пирамиды, проведенной из вершины S, будет

иметь вид:

$$\frac{x-0}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{3} \text{ или } \frac{x}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-4}{3}.$$

Ведение в математический анализ

14. Предел функции. Основные теоремы о пределах.

Если каждому элементу x из области D по определенному правилу ставится в соответствие некоторое число y из множества E, то говорят, что на множестве D задана *функция* $y=f(x)$. Область D называется *областью определения*, E – *областью значений*, элемент $x\in D$ называется *аргументом*. Если каждой паре чисел $(x;y)$, где $y=f(x)$ поставить в соответствие точку на координатной плоскости, то множество всех таких точек называется *графиком функции* $y=f(x)$.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a, если для значений аргумента близких к a, соответствующие значения функции $f(x)$ сколь угодно мало отличаются от A.

Дадим строгое определение предела функции в точке.

Число A называется *пределом функции* $f(x)$ при x стремящемся к a, если для сколь угодно малого положительного числа ε найдется положительное число δ, зависящее от ε, такое, что если $|x-a|<\delta$, то $|f(x)-A|<\varepsilon$. То есть:

$$\lim_{x\to a} f(x)=A \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta(\varepsilon)>0\ \ \forall x: |x-a|<\delta \Rightarrow |f(x)-A|<\varepsilon.$$

Теорема. Если существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)$, то он единственный.

Если $x\to a$ так, что $x>a$, то $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x>a}} f(x)$ называют *правосторонним пределом* и обозначают $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$.

Если $x\to a$ так, что $x<a$, то $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x<a}} f(x)$ называют *левосторонним пределом* и обозначают $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$.

Левосторонний и правосторонний пределы называют односторонними пределами. Если $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$, то $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$.

Справедливо и обратное: если существуют и равны односторонние пределы, т.е. $\lim\limits_{x\to a-0} f(x)=\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=A$, то существует $\lim\limits_{x\to a} f(x)=A$.

Если, при $x\to a$, хотя бы один из односторонних пределов не существует, равен бесконечности или они не равны между собой, то предел функции $f(x)$ в точке $x=a$ не существует.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно малой* при $x \to a$, если $\lim\limits_{x\to a} f\left(x\right) = 0$.

Функция $f(x)$ называется *бесконечно большой* при $x \to a$, если имеет место одно из равенств:

$$\lim_{x\to a} f\left(x\right) = +\infty;\ \ \lim_{x\to a} f\left(x\right) = -\infty;\ \ \lim_{x\to a} f\left(x\right) = \infty..$$

Приведем ряд утверждений, которые используются при вычислении пределов. Будем считать, что для функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ существуют конечные пределы $\lim\limits_{x\to a} u(x) = b_1$ и $\lim\limits_{x\to a} v(x) = b_2$.

1) Если $f(x)$ бесконечно малая функция при $x \to a$, то $1/f(x)$ – бесконечно большая функция при $x \to a$, и наоборот.

2) Предел алгебраической суммы функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ равен алгебраической сумме пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left(u(x) \pm v(x)\right) = \lim_{x\to a} u(x) \pm \lim_{x\to a} v(x) = b_1 \pm b_2.$$

3) Предел произведения функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ равен произведению пределов этих функций:

$$\lim_{x\to a}\left(u(x)\cdot v(x)\right) = \lim_{x\to a} u(x)\cdot \lim_{x\to a} v(x) = b_1 \cdot b_2.$$

4) Постоянный множитель можно выносить за знак предела:

$$\lim_{x\to a}\left(c\cdot u(x)\right) = c \lim_{x\to a} u(x) = c\cdot b_1, \text{ где } c - const.$$

5) Предел частного функций $u = u(x)$ и $v = v(x)$ равен частному пределов этих функций, если предел знаменателя отличен от нуля:

$$\lim_{x\to a}\frac{u(x)}{v(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} u(x)}{\lim\limits_{x\to a} v(x)},\ \ \lim_{x\to a} v(x) \neq 0.$$

6) Предел элементарной функции в точке $x=a$, принадлежащей ее области определения, равен значению функции в рассматриваемой точке.

Элементарными функциями называют такие функции, которые получены из основных элементарных функций с помощью конечного числа арифметических действий, а так же образованием сложной функции.

Основными элементарными функциями называются следующие функции: постоянная, степенная, показательная, логарифмическая, тригонометрические и обратные тригонометрические.

Пример 15. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 2}\left(x^2 - 4x + 5\right)$.

Решение. Воспользуемся теоремами о пределе суммы, разности, произведения (утверждения 2, 3, 4) и тем, что $\lim\limits_{x\to a} C = C$, где $C = const$.

Тогда

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2 - 4x + 5\right) = \lim_{x\to 2} x \cdot \lim_{x\to 2} x - 4\lim_{x\to 2} x + \lim_{x\to 2} 5 = 2\cdot 2 - 4\cdot 2 + 5 = 1.$$

Можно рассуждать иначе. Т.к. данная функция элементарная, то ее предел в точке x=2 равен ее значению в этой точке (утверждение 6), т.е.

$$\lim_{x\to 2}\left(x^2-4x+5\right)=2^2-4\cdot 2+5=1.$$

Ответ: 1.

Пример 16. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-1}{x-5}$.

Решение. Теорему о пределе элементарной функции (утверждение 6) в данном примере применить нельзя, т.к. при x=5 знаменатель рассматриваемой дроби обращается в нуль. Однако числитель в точке x=5 в нуль не обращается и легко найти предел $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x-5}{2x-1}=\dfrac{5-5}{2\cdot 5-1}=0$. Используя теорему о связи бесконечно малой и бесконечно большой функции (утверждение 1), получим: $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{2x-1}{x-5}=\infty$.

Ответ: ∞.

При нахождении пределов могут возникать неопределенности вида: $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$, $\left(\dfrac{0}{0}\right)$, $(\infty-\infty)$, $(0\cdot\infty)$, $\left(1^\infty\right)$ и другие, для раскрытия которых требуются дополнительные алгебраические преобразования.

Пример 17. Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2-3x+5}{3x^2+6x-2}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^3-3x^2-4x+7}{3x^2-3x-2}$; 3) $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x^2+2x+5}{3x^5-x-2}$.

Решение. 1) Предел частного равен частному пределов, если эти пределы существуют, конечны и знаменатель не равен нулю. В этом же примере в числителе и в знаменателе, при подстановке вместо x бесконечности, получаем бесконечности. В таких случаях говорят, что имеем неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ (бесконечность делить на бесконечность).

Для раскрытия этой неопределенности выделяют элементы, порождающие эти бесконечности. Для этого и в числителе, и в знаменателе выносят за скобку степень x с наибольшим показателем. В результате выражения в скобках будут стремиться к конечным пределам, а степени x за скобками сократятся. Решим данный пример. В числителе и знаменателе вынесем за скобки x^2. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-3x+5}{3x^2+6x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\dfrac{4x^2}{x^2}-\dfrac{3x}{x^2}+\dfrac{5}{x^2}\right)}{x^2\left(\dfrac{3x^2}{x^2}+\dfrac{6x}{x^2}-\dfrac{2}{x^2}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\dfrac{3}{x}+\dfrac{5}{x^2}}{3+\dfrac{6}{x}-\dfrac{2}{x^2}}=$$

$$=\frac{4-0+0}{3+0-0}=\frac{4}{3}.$$

2) При подстановке вместо x бесконечности, в числителе и знаменателе получаем бесконечности. Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$ В числителе и знаменателе вынесем за скобки x^3. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^3-3x^2-4x+7}{3x^2-3x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^3\left(\frac{4x^3}{x^3}-\frac{3x^2}{x^3}-\frac{4x}{x^3}+\frac{7}{x^3}\right)}{x^3\left(\frac{3x^2}{x^3}-\frac{3x}{x^3}-\frac{2}{x^3}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{4-\frac{3}{x}-\frac{4}{x^2}+\frac{7}{x^3}}{\frac{3}{x}-\frac{3}{x^2}-\frac{2}{x^3}}=\left(\frac{4}{0}\right)=\infty.$$

3) Имеем неопределенность вида $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$. В числителе и знаменателе вынесем за скобки x^5. Получим:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+2x+5}{3x^5-x-2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{4x^2}{x^5}+\frac{2x}{x^5}+\frac{5}{x^5}\right)}{x^5\left(\frac{3x^5}{x^5}-\frac{x}{x^5}-\frac{2}{x^5}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{4}{x^3}+\frac{2}{x^4}+\frac{5}{x^5}}{3-\frac{1}{x^4}-\frac{2}{x^5}}=\frac{0}{3}=0.$$

Ответ: 1) $\frac{4}{3}$; 2) ∞; 3)0.

Рассмотренный пример иллюстрирует следующее правило:

Если при нахождении предела $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$, где $P_n(x)$ – многочлен степени n, $Q_m(x)$ – многочлен степени m:

а) $n=m$, то предел равен отношению коэффициентов при наибольших степенях;

б) $n>m$, то предел равен бесконечности, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=\infty$;

в) $n<m$, то предел равен нулю, то есть $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{P_n(x)}{Q_m(x)}=0$.

Пример 18. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-5x+4}$.

Решение. При подстановке *x=1*, в числителе и знаменателе дроби получаем нули. В таких случаях говорят, что имеет место неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$ (ноль делить на ноль). Для раскрытия этой неопределенности целесообразно выделить элементы, порождающие нули (в нашем примере это будут множители вида (*x–1*)). Для этого числитель и знаменатель разложим на множители:

$$x^2-6x+5=0; \qquad x^2-5x+4=0;$$

$$D=36-4\cdot1\cdot5=16>0; \qquad D=25-4\cdot1\cdot4=9>0;$$

$$x=\frac{6\pm\sqrt{16}}{2};\ x_1=5;\ x_2=1; \qquad x=\frac{5\pm\sqrt{9}}{2};\ x_1=4;\ x_2=1;$$

$$x^2-6x+5=(x-1)(x-5). \qquad x^2-5x+4=(x-1)(x-4).$$

Подставляя соответствующие выражения и сокращая общий множитель (*x–1*), стремящийся к нулю, но не равный ему, получим:

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2-6x+5}{x^2-5x+4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x-5)}{(x-1)(x-4)}=\lim_{x\to1}\frac{x-5}{x-4}=\frac{\lim\limits_{x\to1}(x-5)}{\lim\limits_{x\to1}(x-4)}=\frac{1-5}{1-4}=\frac{4}{3}.$$

Ответ: $\frac{4}{3}$.

Пример 19. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to30}\frac{x^2-32x+60}{\sqrt{55-x}-5}$.

Решение. При подстановке *x*=30 в функцию, получим неопределенность вида $\left(\frac{0}{0}\right)$. Для раскрытия неопределенности разложим числитель на множители и избавимся от иррациональности в знаменателе (умножим числитель и знаменатель на $\left(\sqrt{55-x}+5\right)$).

$$x^2-32x+60=0;\ D=32^2-4\cdot1\cdot60=784>0;\ x=\frac{32\pm28}{2};\ x_1=30;\ x_2=2;$$

$$x^2-32x+60=(x-30)(x-2);$$

$$\lim_{x\to30}\frac{x^2-32x+60}{\sqrt{55-x}-5}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to30}\frac{(x-30)(x-2)\left(\sqrt{55-x}+5\right)}{\left(\sqrt{55-x}-5\right)\left(\sqrt{55-x}+5\right)}=$$

$$=\lim_{x\to30}\frac{(x-30)(x-2)\left(\sqrt{55-x}+5\right)}{55-x-25}=\lim_{x\to30}\frac{(x-30)(x-2)\left(\sqrt{55-x}+5\right)}{30-x}=$$

$$=\lim_{x\to30}(x-2)\left(\sqrt{55-x}+5\right)=28\cdot10=280.$$

Ответ: 280.

При вычислении пределов широко используются следующие два *замечательных предела*:

1) $\lim\limits_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=1$ – *первый замечательный предел*.

В более общем виде первый замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to b}\frac{\sin f(x)}{f(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=1,\ \lim_{x\to b}f(x)=0.$$

2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=e\approx 2{,}718...$ – *второй замечательный предел*.

В более общем, виде второй замечательный предел имеет вид:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=\left(1^{\infty}\right)=e,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty.$$

Пример 20. Вычислить пределы

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 5x}{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{tg3x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{2x}{\arcsin x}$.

Решение. 1) Подставив x=0 в функцию, получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для того, чтобы применить первый замечательный предел в знаменателе и под знаком синуса должно стоять одно и то же выражение (в нашем примере это 5x). Умножим числитель и знаменатель дроби на 5:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\sin 5x}{5x}=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5.$$

2) Подставив x=0 в функцию, получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Для того, чтобы применить первый замечательный предел, представим $tg3x=\dfrac{\sin 3x}{\cos 3x}$, умножим числитель и знаменатель дроби на 3, а так же учтем, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos 3x=1$:

$$\lim_{x\to 0}\frac{tg3x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{x\cos 3x}=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{3x\cos 3x}=\left[\lim_{x\to 0}\frac{\sin 3x}{3x}=1\right]=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos 3x}=\frac{3}{1}=3.$$

3) Подставив x=0 в функцию, получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Введем замену: $\arcsin x=t\ \Rightarrow\ x=\sin t$, если $x\to 0$ то и $t\to 0$. Тогда:

$$\lim_{x\to 0}\frac{2x}{\arcsin x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{t\to 0}\frac{2\sin t}{t}=\left[\lim_{t\to 0}\frac{\sin t}{t}=1\right]=2.$$

Ответ: 1) 5; 2) 3; 3) 2.

Пример 21. Вычислить пределы: 1) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)^{x}$; 2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{3x-1}{3x+3}\right)^{1-2x}$.

Решение. 1) Дробь в скобках стремится к единице при $x \to \infty$. Таким образом, имеем неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$. Неопределенности подобного вида раскрывают с помощью второго замечательного предела. Для того, чтобы применить второй замечательный предел, показатель должен быть обратным дроби $\left(-\dfrac{2}{x}\right)$. С учетом этого преобразуем выражение:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}\cdot(-2)}=\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{-2}{x}\right)^{\frac{x}{-2}}\right]^{-2}=e^{-2}.$$

2) Дробь в скобках стремится к единице при $x \to \infty$ (см. пример 17). Таким образом, имеем неопределенность вида $\left(1^{\infty}\right)$. Выражение под знаком предела необходимо преобразовать так, чтобы оно походило на выражение во втором замечательном пределе (то есть к *единице* прибавляется *единица* делить на бесконечность в степени *такая же* бесконечность). Сначала в скобке прибавим и отнимем единицу и преобразуем выражение так, чтобы единица осталась:

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{3x-1}{3x+3}\right)^{1-2x}=\left(1^{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1}{3x+3}-1\right)^{1-2x}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{3x-1-3x-3}{3x+3}\right)^{1-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{-4}{3x+3}\right)^{1-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{1-2x}.$$

Знаменатель стремится к бесконечности: $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3x+3}{-4}=\infty$. Умножим и разделим показатель степени на знаменатель. Преобразуя выражение под знаком предела далее, получим:

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{1-2x}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{\frac{3x+3}{-4}\cdot\frac{-4}{3x+3}\cdot(1-2x)}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{\frac{3x+3}{-4}}\right)^{\frac{-4(1-2x)}{3x+3}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{-4+8x}{3x+3}}=e^{\frac{8}{3}};$$

При вычислении этого предела использована обобщенная форма второго замечательного предела: $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$ (в примере $f(x)=\frac{3x+3}{-4}$), теорема о пределе показательно-степенной функции:

$$\lim_{x\to x_0} f(x)^{\varphi(x)}=\left(\lim_{x\to x_0} f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to x_0}\varphi(x)}$$

где x_0 конечная или бесконечно удаленная точка, а так же то, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-4+8x}{3x+3}=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-\frac{4}{x}+8\right)}{x\left(3+\frac{3}{x}\right)}=\frac{8}{3}.$$

Ответ: 1) e^{-2}; 2) $e^{\frac{8}{3}}$.

15. Производная. Основные правила дифференцирования. Таблица производных.

Пусть функция $y=f(x)$ определена на промежутке X, значения x_1 и x_2 принадлежат этому промежутку, $y_1=f(x_1)$ и $y_2=f(x_2)$ – соответствующие значения функции. Тогда разность $\Delta x=x_2-x_1$ называется приращением аргумента, а разность $\Delta y=f(x_2)-f(x_1)$ – приращением функции на отрезке $[x_1;\, x_2]$.

Производной функции $y=f(x)$ по аргументу x называется предел отношения приращения функции к приращению аргумента, когда последнее произвольным образом стремится к нулю:

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=y' \text{ или } f'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}.$$

Геометрически производная представляет собой *угловой коэффициент касательной* к графику функции $y=f(x)$ в точке $M\left(x;\, f(x)\right)$:

$y'(x)=k=tg\alpha$, где α – угол между осью Ox и касательной.

Производная есть *скорость изменения функции* $y=f(x)$ в точке x.

Процесс отыскания производной функции называется *дифференцированием*.

Основные правила дифференцирования

Пусть $u=u(x)$ и $v=v(x)$ – функции, имеющие производные, $C=const$, тогда:

1) $C'=0$;

2) $\left(Cu(x)\right)'=C\cdot u'(x)$; $\left(\frac{u(x)}{C}\right)'=\left(\frac{1}{C}\cdot u(x)\right)'=\frac{u'(x)}{C}$;

3) $(u(x)\pm v(x))'=u'(x)\pm v'(x)$;

4) $(u(x)\cdot v(x))' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x)$;

5) $\left(\dfrac{u(x)}{v(x)}\right)' = \dfrac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v^2(x)}$.

Правило дифференцирования сложной функции: если $y = f(u(x))$, т.е. $y = f(u)$, $u = u(x)$, то $y'(x) = f'(u)\cdot u'(x)$, где x – основной аргумент, u – промежуточный или вспомогательный аргумент.

Таблица производных основных элементарных функций

1) $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha\cdot x^{\alpha-1},\ \alpha\in R$; 2) $(x)' = 1$; 3) $\left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$;

4) $\left(\dfrac{1}{x}\right)' = -\dfrac{1}{x^2}$; 5) $\left(a^x\right)' = a^x\cdot\ln a$; 6) $\left(e^x\right)' = e^x$;

7) $\left(\log_a x\right)' = \dfrac{1}{x\ln a}$; 8) $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; 9) $(\sin x)' = \cos x$;

10) $(\cos x)' = -\sin x$; 11) $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$; 12) $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$;

13) $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 14) $(\arccos x)' = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; 15) $(arctgx)' = \dfrac{1}{1+x^2}$;

16); $(arcctgx)' = -\dfrac{1}{1+x^2}$ 17) $(shx)' = chx$; 18) $(chx)' = shx$;

19) $(thx)' = \dfrac{1}{ch^2x}$; 20) $(cthx)' = -\dfrac{1}{sh^2x}$

Пример 22. Найти производные следующих функций:

1) $y = x^5 + 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\cdot x^{-\frac{5}{2}} + \dfrac{3}{x} - \dfrac{2}{x^2} - 4x + 6$; 2) $y = x^2\ln x$; 3) $y = \dfrac{\arcsin x}{x}$.

Решение. 1) Запишем функцию в виде:

$$y = x^5 + 3\sqrt[3]{x^2} - 2x\cdot x^{-\frac{5}{2}} + \frac{3}{x} - \frac{2}{x^2} - 4x + 6 =$$

$$= x^5 + 3\cdot x^{\frac{2}{3}} - 2\cdot x^{1-\frac{5}{2}} + 3\cdot x^{-1} - 2\cdot x^{-2} - 4\cdot x + 6 =$$

$$= x^5 + 3\cdot x^{\frac{2}{3}} - 2\cdot x^{-\frac{3}{2}} + 3\cdot x^{-1} - 2\cdot x^{-2} - 4\cdot x + 6.$$

Воспользуемся основными правилами дифференцирования и таблицей производных:

$$y' = \left(x^5 + 3\cdot x^{\frac{2}{3}} - 2\cdot x^{-\frac{3}{2}} + 3\cdot x^{-1} - 2\cdot x^{-2} - 4\cdot x + 6\right)' =$$

$$= \left(x^5\right)' + \left(3\cdot x^{\frac{2}{3}}\right)' - \left(2\cdot x^{-\frac{3}{2}}\right)' + \left(3\cdot x^{-1}\right)' - \left(2\cdot x^{-2}\right)' - (4\cdot x)' + 6' =$$

$$= 5x^{5-1} + 3\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} - 2\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)x^{-\frac{3}{2}-1} + 3\cdot(-1)x^{-1-1} - 2\cdot(-2)x^{-2-1} - 4\cdot 1 + 0 =$$

$$= 5x^4 + 2x^{-\frac{1}{3}} + 3x^{-\frac{5}{2}} - 3x^{-2} + 4x^{-3} - 4 = 5x^4 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{\sqrt{x^5}} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - 4.$$

2) Воспользуемся правилом нахождения производной произведения и таблицей производных:

$$y' = \left(x^2\ln x\right)' = \left(x^2\right)'\cdot\ln x + x^2\cdot(\ln x)' = 2x\cdot\ln x + x^2\cdot\frac{1}{x} = 2x\cdot\ln x + x.$$

3) Воспользуемся правилом нахождения производной частного и таблицей производных:

$$y' = \left(\frac{\arcsin x}{x}\right)' = \frac{(\arcsin x)'\cdot x - \arcsin x\cdot(x)'}{x^2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\cdot x - \arcsin x\cdot 1}{x^2} =$$

$$= \frac{x - \arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}.$$

Ответ: 1) $y' = 5x^4 + \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{3}{\sqrt{x^5}} - \frac{3}{x^2} + \frac{4}{x^3} - 4$; 2) $y' = 2x\cdot\ln x + x$; 3) $y' = \frac{x - \arcsin x\cdot\sqrt{1-x^2}}{x^2\cdot\sqrt{1-x^2}}$.

Рассмотрим дифференцирование сложной функции.

Запишем *таблицу дифференцирования сложных элементарных функций*. Пусть функция $u = u(x)$ имеет производную.

1) $\left(u^\alpha\right)' = \alpha u^{\alpha-1}\cdot u'(x),$; $\alpha\in R$

2) $\left(\sqrt{u}\right)' = \frac{u'(x)}{2\sqrt{u}}$;

3) $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'(x)}{u^2}$;

4) $\left(u^x\right)' = u^x\cdot\ln a\cdot u'(x)$;

5) $\left(e^u\right)' = e^u\cdot u'(x)$;

6) $(\log_a u)' = \frac{u'(x)}{u\ln a}$;

7) $(\ln u)' = \frac{1}{u}\cdot u'(x)$;

8) $(\sin u)' = \cos u\cdot u'(x)$;

9) $(\cos u)' = -\sin u\cdot u'(x)$;

10) $(tgu)' = \frac{1}{\cos^2 u}\cdot u'(x)$;

11) $(ctgu)' = -\frac{u'(x)}{\sin^2 u}$;

12) $(\arcsin u)' = \frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}$;

13) $(\arccos u)' = -\frac{u'(x)}{\sqrt{1-u^2}}$;

14) $(arctg\, u)' = \frac{u'(x)}{1+u^2}$;

15) $(arcctg\, u)' = -\frac{u'(x)}{1+u^2}$;

16) $\left(shu\right)' = chu \cdot u'(x)$; 17) $\left(chu\right)' = shu \cdot u'(x)$; 18) $\left(thu\right)' = \dfrac{1}{ch^2 u} \cdot u'(x)$;

19) $\left(cthu\right)' = -\dfrac{1}{sh^2 u} \cdot u'(x)$.

Если в заданной сложной функции выделить последовательность основных элементарных функций, ее составляющих, то нетрудно найти производную любой сложной функции, причем промежуточных аргументов может быть несколько.

Пример 23. Найти производные следующих функций:

1) $y = 10^{3x-5}$; 2) $y = \cos^3(8-5x^2)$; 3) $y = e^{3x} \cdot \sqrt{7x^2+3}$; 4) $y = \dfrac{x+\ln(3x)}{tg2x}$.

Решение. 1) Представим данную функцию в виде $y = 10^u$, $u = 3x-5$.

Тогда производная функции по аргументу x будет равна:

$$y' = (10^u)'_u \cdot u' = (10^u)'_u \cdot (3x-5)'_x = 10^u \ln 10 \cdot 3 = 10^{3x-5} \ln 10 \cdot 3 = 3\ln 10 \cdot 10^{3x-5}.$$

2) Представим функцию в виде: $y = u^3$, $u = \cos v$, $v = 8-5x^2$. Тогда по правилу дифференцирования сложной функции и таблице производных получим:

$$y' = \left(\cos^3(8-5x^2)\right)' = \left(u^3\right)'_u \cdot \left(\cos v\right)'_v \cdot \left(8-5x^2\right)'_x = 3u^2 \cdot (-\sin v) \cdot (-10x) =$$

$$= 3\cos^2(8-5x^2) \cdot \left(-\sin(8-5x^2)\right) \cdot (-10x) = 30x \cdot \cos^2(8-5x^2) \cdot \sin(8-5x^2).$$

3) Воспользуемся правилами нахождения производной произведения и производной сложной функции, а так же таблицей производных:

$$y' = \left(e^{3x}\right)' \cdot \sqrt{7x^2+3} + e^{3x} \cdot \left(\sqrt{7x^2+3}\right)' =$$

$$= e^{3x} \cdot (3x)' \cdot \sqrt{7x^2+3} + e^{3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7x^2+3}} \cdot \left(7x^2+3\right)' =$$

$$= e^{3x} \cdot 3 \cdot \sqrt{7x^2+3} + e^{3x} \cdot \frac{1}{2\sqrt{7x^2+3}} \cdot 14x = e^{3x}\left(3 \cdot \sqrt{7x^2+3} + \frac{7x}{\sqrt{7x^2+3}}\right).$$

4) Воспользуемся правилами нахождения производной частного и производной сложной функции, а так же таблицей производных:

$$y' = \frac{\left(x+\ln(3x)\right)' \cdot tg2x - \left(x+\ln(3x)\right) \cdot \left(tg2x\right)'}{\left(tg2x\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(1+\dfrac{1}{3x} \cdot (3x)'\right) \cdot tg2x - \left(x+\ln(3x)\right) \cdot \dfrac{1}{\cos^2(2x)} \cdot (2x)'}{tg^2 2x} =$$

$$=\frac{\left(1+\frac{1}{3x}\cdot 3\right)\cdot tg2x-\left(x+\ln(3x)\right)\cdot\frac{1}{\cos^2(2x)}\cdot 2}{tg^2 2x}=\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot tg2x-\frac{2\left(x+\ln(3x)\right)}{\cos^2(2x)}}{tg^2 2x}.$$

Упростим полученное выражение:

$$\frac{\left(1+\frac{1}{x}\right)\cdot tg2x-\frac{2\left(x+\ln(3x)\right)}{\cos^2(2x)}}{tg^2 2x}=\frac{\left(x+1\right)\cdot\cos^2 2x\cdot tg2x-2x\left(x+\ln(3x)\right)}{x\cdot\cos^2 2x\cdot tg^2 2x}=$$

$$=\frac{\left(x+1\right)\cdot\cos^2 2x\cdot\frac{\sin 2x}{\cos 2x}-2x\left(x+\ln(3x)\right)}{x\cdot\cos^2 2x\cdot\frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}}=$$

$$=\frac{\left(x+1\right)\cdot\cos 2x\cdot\sin 2x-2x\left(x+\ln(3x)\right)}{x\cdot\sin^2 2x}=\frac{\left(x+1\right)\cdot\sin 4x-4x\left(x+\ln(3x)\right)}{2x\cdot\sin^2 2x}.$$

Ответ: 1) $y'=3\ln 10\cdot 10^{3x-5}$; 2) $y'=30x\cdot\cos^2(8-5x^2)\cdot\sin(8-5x^2)$; 3) $y'=e^{3x}\left(3\cdot\sqrt{7x^2+3}+\frac{7x}{\sqrt{7x^2+3}}\right)$; 4) $y'=\frac{\left(x+1\right)\cdot\sin 4x-4x\left(x+\ln(3x)\right)}{2x\cdot\sin^2 2x}$.

16. Производная функции, заданной параметрическими уравнениями. Производная неявной функции.

Если функция $y=y(x)$ задана *параметрическими уравнениями* $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ то производную функции находят по формуле:

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{dy}{dx}.$$

Пример 24. Найти производную $\frac{dy}{dx}$, если $\begin{cases}x=\frac{3t}{t+1};\\ y=t^2+2t.\end{cases}$

Решение. Находим

$$x'(t)=\left(\frac{3t}{t+1}\right)'=\frac{(3t)'\cdot(t+1)-3t\cdot(t+1)'}{\left(t+1\right)^2}=\frac{3(t+1)-3t}{(t+1)^2}=\frac{3}{(t+1)^2};$$

$$y'(t)=\left(t^2+2t\right)'=2t+2=2(t+1).$$

Тогда, $\frac{dy}{dx}=\frac{y'(t)}{x'(t)}=\frac{2(t+1)\cdot(t+1)^2}{3}=\frac{2}{3}(t+1)^3$.

Ответ: $\frac{dy}{dx}=\frac{2}{3}(t+1)^3$.

Пусть уравнение $F(x,y)=0$ определяет одну или несколько так называемых *неявных функций* $y=y(x)$. Будем считать, что эти функции дифференцируемы. Чтобы найти производную функции, заданной неявно, будем дифференцировать обе части уравнения $F(x,y)=0$ по x. Получим уравнение первой степени относительно y', из него выразим производную $y'(x)$.

Пример 25. Найти y'_x из уравнения $x^3+\ln y-x^2\cdot e^y=0$.

Решение. Берем производную по переменной x от обеих частей уравнения, получим:

$$3x^2+\frac{1}{y}\cdot y'-\left(2x\cdot e^y+x^2e^y\cdot y'\right)=0.$$

Слагаемые, содержащие y', оставим в левой части уравнения, остальные перенесем вправо.

$$y'\left(\frac{1}{y}-x^2e^y\right)=2xe^y-3x^2.$$

Отсюда следует, что производная равна $y'=\dfrac{(2xe^y-3x^2)\cdot y}{1-x^2ye^y}$.

Ответ: $y'=\dfrac{(2xe^y-3x^2)\cdot y}{1-x^2ye^y}$.

17. Производные высших порядков.

Производной второго порядка (второй производной) функции $y=f(x)$ называется производная от ее производной, т. е. $y''=(f'(x))'=f''(x)$.

Если $s=f(t)$ – закон прямолинейного движения материальной точки, то $s'=f'(t)$ есть скорость этого движения в момент времени t, а $s''=f''(t)$ – ускорение.

Производные высших порядков (третья, четвертая и т. д.) находятся при последовательном дифференцировании:

$$y'''=(f''(x))',\ y^{(4)}=(f'''(x))',\ \dots,\ y^{(n)}=(f^{(n-1)}(x))'.$$

Если функция $y=y(x)$ задана параметрически системой уравнений $\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\end{cases}$ то производные y'_x, y''_{xx}, y'''_{xxx}, ... находятся по формулам:

$$y'_x=\frac{y'(t)}{x'(t)},\quad y''_{xx}=\frac{(y'_x)'_t}{x'(t)},\quad y'''_{xxx}=\frac{(y''_{xx})'_t}{x'(t)},\quad \cdots.$$

Пример 26. Найти все производные высших порядков от функции $y=x^5-4x^3+7x^2-8$.

Решение.

$$y'=5x^4-12x^2+14x;\ y''=(y')'=\left(5x^4-12x^2+14x\right)'=20x^3-24x+14;$$

$$y''' = (y'')' = \left(20x^3 - 24x + 14\right)' = 60x^2 - 24;$$

$$y^{(4)} = (y''')' = \left(60x^2 - 24\right)' = 120x;$$

$$y^{(5)} = \left(y^{(4)}\right)' = (120x)' = 120; \; y^{(6)} = y^{(7)} = \cdots = 0.$$

Пример 27. Найти первую и вторую производные функции, заданной параметрически $x = \ln t, \quad y = \dfrac{1}{t}$.

Решение. Первая производная находится по формуле $y'_x = \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$.

$$y'(t) = -\frac{1}{t^2}, \qquad x'(t) = \frac{1}{t}, \qquad y'_x = \frac{dy}{dx} = -\frac{1}{t^2} : \frac{1}{t} = -\frac{1}{t}.$$

Вторую производную найдем по формуле $y''_{xx} = \dfrac{d^2y}{dx^2} = \dfrac{(y'_x)'_t}{x'_t}$.

$$(y'_x)'_t = \left(-\frac{1}{t}\right)'_t = \frac{1}{t^2}, \text{ тогда } y''_{xx} = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{1}{t^2} : \frac{1}{t} = \frac{1}{t}.$$

Ответ: $y''_{xx} = \dfrac{1}{t}$.

18. Правило Лопиталя раскрытия неопределенных выражений.

Пусть функции $f(x)$ и $\varphi(x)$ дифференцируемы в окрестности точки x_0 и $\varphi'(x) \neq 0$. Если $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = 0$ ($\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0} \varphi(x) = \infty$) т. е. частное $\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ в точке x_0 представляет собой неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ $\left(\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)\right)$, то $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ при условии, что существует предел отношения производных.

Если частное $\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ в точке $x = x_0$ также имеет неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ и существует $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f''(x)}{\varphi''(x)}$, то справедлива формула

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f''(x)}{\varphi''(x)}.$$

В случае неопределенностей вида $(0 \cdot \infty)$ или $(\infty - \infty)$ выражение под знаком предела следует преобразовать алгебраически так, чтобы получить неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$ или $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$ и, далее воспользоваться правилом Лопиталя.

В случае неопределенности вида $\left(0^0\right)$, $\left(\infty^0\right)$, $\left(1^\infty\right)$ следует воспользоваться тождеством $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln a}$ и свойством $e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$.

Пример 28. Вычислить пределы:

$$1)\ \lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}; \qquad 2)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right); \qquad 3)\ \lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}.$$

Решение. 1) Подставив x=1 в функцию, получим неопределенность вида $\left(\dfrac{0}{0}\right)$. Применим правило Лопиталя: найдем производные числителя и знаменателя; в полученное отношение производных подставим x=1:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-7x^2+4x+2}{x^3-5x+4}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{\left(x^3-7x^2+4x+2\right)'}{\left(x^3-5x+4\right)'}=$$

$$=\lim_{x\to 1}\frac{3x^2-14x+4}{3x^2-5}=\frac{3-14+4}{3-5}=\frac{7}{2}=3{,}5.$$

2) Подставив x=0 в функцию, получим неопределенность вида $(\infty-\infty)$. Приведем выражение под знаком предела к общему знаменателю.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{e^x-1}\right)=(\infty-\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right).$$

Правило Лопиталя будем применять дважды:.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-x}{x(e^x-1)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{e^x-1+xe^x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{e^x}{2e^x+xe^x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2+x}=\frac{1}{2}.$$

3) При $x\to\infty$ получим неопределенность вида $\left(\infty^0\right)$. Воспользуемся тождеством $a^b = e^{\ln a^b} = e^{b\ln a}$ и свойством $\lim\limits_{x\to x_0} e^{f(x)} = e^{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}$:

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}=\left(\infty^0\right)=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{1}{\ln x}\ln(1+x)}=\lim_{x\to\infty}e^{\frac{\ln(1+x)}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}}.$$

Рассмотрим предел в показателе. При $x\to\infty$ получим неопределенность вида $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$. Применим правило Лопиталя:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{1+x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{1+x}=1;$$

тогда: $\lim\limits_{x\to\infty}(1+x)^{\frac{1}{\ln x}}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{\ln x}}=e^1=e$.

Ответ: 1) 3,5; 2) 0,5; e.

19. Векторная функция скалярного аргумента и ее производная. Уравнения касательной и нормальной плоскости

Если каждому значению действительной переменной $t\in D\subset\mathbb{R}$ поставлен в соответствие вектор $\vec r(t)\in\mathbb{R}^3$ то говорят, что на множестве D задана *вектор-функция* действительной переменной $\vec r=\vec r(t)$.

Задание вектор-функции $\vec r=\vec r(t)$ равносильно заданию трех скалярных функций $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ – координат вектора $\vec r=\vec r(t)$:

$$\vec r(t)=x(t)\cdot\vec i+y(t)\cdot\vec j+z(t)\cdot\vec k$$

Годографом вектор-функции $\vec r=\vec r(t)$ называется множество точек, являющихся концами всех векторов $\vec r=\vec r(t)$, которые приложены к началу координат. Параметрические уравнения годографа имеют вид $x=x(t)$, $y=y(t)$, $z=z(t)$.

Производная $\vec r'(t)$ есть вектор, направленный по касательной к годографу вектора $\vec r=\vec r(t)$ в сторону возрастания параметра t.

Производную $\vec r'(t)$ вектор-функции скалярного аргумента находят по правилу:

$$\vec r'(t)=x'(t)\cdot\vec i+y'(t)\cdot\vec j+z'(t)\cdot\vec k;\ \vec r''(t)=x''(t)\cdot\vec i+y''(t)\cdot\vec j+z''(t)\cdot\vec k.$$

Уравнение *касательной* к пространственной линии $\vec r(t)=x(t)\cdot\vec i+y(t)\cdot\vec j+z(t)\cdot\vec k$ в точке $M_0(x(t_0),\,y(t_0),\,z(t_0))=M_0(x_0,\,y_0,z_0)$ определяется уравнениями:

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}.$$

уравнения *нормальной плоскости* (плоскость, перпендикулярная к касательной линии $\vec r=\vec r(t)$ в точке $M_0(x_0,\,y_0,z_0)$) имеет вид:

$$x'(t_0)\cdot(x-x_0)+y'(t_0)\cdot(y-y_0)+z'(t_0)\cdot(z-z_0)=0.$$

Пример 29. Найти уравнения касательной и нормальной плоскости к годографу векторной функции $\vec r=4\sin^2 t\cdot\vec i+4\sin t\cos t\cdot\vec j+2\cos^2 t\cdot\vec k$ при $t=\frac{\pi}{4}$.

Решение. Канонические уравнения касательной к кривой $\vec{r} = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k}$ в точке $M_0(x_0, y_0, z_0)$ имеют вид

$$\frac{x - x_0}{x'(t_0)} = \frac{y - y_0}{y'(t_0)} = \frac{z - z_0}{z'(t_0)},$$

а уравнение нормальной плоскости:

$$x'(t_0)(x - x_0) + y'(t_0)(y - y_0) + z'(t_0)(z - z_0) = 0.$$

В данном случае $x(t) = 4\sin^2 t$, $y(t) = 4\sin t\cos t$, $z(t) = 2\cos^2 t$,

$$x_0 = x(t_0) = x\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sin^2\frac{\pi}{4} = 4\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 2,$$

$$y_0 = y(t_0) = y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\frac{\pi}{4}\cdot\cos\frac{\pi}{4} = 4\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 2,$$

$$z_0 = z(t_0) = z\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2\cos^2\frac{\pi}{4} = 2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = 1.$$

Найдем

$$x'(t) = \left(4\sin^2 t\right)' = 8\sin t\cos t = 4\sin 2t;\ x'(t_0) = x'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\sin\frac{\pi}{2} = 4\cdot 1 = 4;$$

$$y'(t) = \left(4\sin t\cos t\right)' = \left(2\sin 2t\right)' = 4\cos 2t,\ y'(t_0) = y'\left(\frac{\pi}{4}\right) = 4\cos\frac{\pi}{2} = 0;$$

$$z'(t) = \left(2\cos^2 t\right)' = -4\cos t\sin t = -2\sin 2t;\ z'(t_0) = z'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} = -2.$$

Тогда $\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{-2}$ – уравнения касательной,

$4(x-2) + 0(y-2) - 2(z-1) = 0$ или $4x - 2z - 6 = 0$ – уравнение нормальной плоскости.

Ответ: $\frac{x-2}{4} = \frac{y-2}{0} = \frac{z-1}{-2}$ – уравнения касательной, $4x - 2z - 6 = 0$ – уравнение нормальной плоскости.

20. Полное исследование функции. Построение графика функции.

Функция $y = f(x)$ называется *монотонно возрастающей* (*монотонно убывающей*) на множестве D, если для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in D$ выполняется неравенство $f(x_1) < f(x_2)$ ($f(x_1 > f(x_2)$). Если для любых $x_1 < x_2$, $x_1, x_2 \in D$ выполняется неравенство $f(x_1) \le f(x_2)$ ($f(x_1) \ge f(x_2)$), то функция называется *неубывающей* (*невозрастающей*) на множестве D

Постоянная функция является одновременно и неубывающей и невозрастающей.

Для того, чтобы функция $y = f(x)$ была возрастающей (убывающей) для $x \in D$, необходимо и достаточно, чтобы $f'(x)$ была положительной (отрицательной) на этом множестве.

Экстремумы функции.

Точка $x = x_0$ называется точкой локального *максимума* (*минимума*), если существует такая окрестность точки x_0, что для всех x из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$ ($f(x) > f(x_0)$).

Точки максимума и минимума называются *точками экстремума*.

Значение функции в точке экстремума называется *экстремумом* (максимумом или минимумом).

Необходимое условие экстремума. Если функция $y = f(x)$ в точке x_0 имеет экстремум, то ее производная $f'(x_0)$ или равна 0, или не существует. Точку x_0 называют *критической точкой*.

Экстремум может достигаться только в критических точках, но не всякая критическая точка функции является точкой экстремума.

Достаточные условия экстремума.

Теорема *(первый достаточный признак локального экстремума)*. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна в некотором интервале, содержащем критическую точку $x = x_0$, и дифференцируема во всех точках этого интервала (кроме, может быть, самой точки x_0). Если при переходе (слева направо) через критическую точку x_0 производная $f'(x)$ меняет знак с плюса на минус, то в точке x_0 функция $y = f(x)$ имеет максимум; если же с минуса на плюс, – то минимум; если знака не меняет, то экстремума нет.

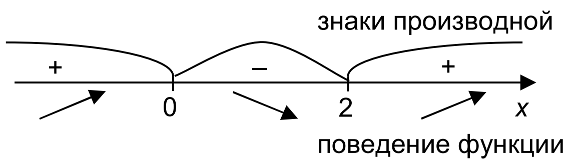
Теорема *(второй достаточный признак локального экстремума)*. Пусть функция $y = f(x)$ дважды дифференцируема и $f'(x_0) = 0$, $f''(x_0) \neq 0$, тогда функция в точке x_0 имеет экстремум: максимум, если $f''(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.

Пример 30. Найти интервалы возрастания и убывания, точки экстремума и экстремальные значения функции $y = x^3 - 3x^2$.

Решение. Найдем производную функции: $y' = 3x^2 - 6x = 3x(x-2)$.

Производная положительна, если выполнено неравенство $y' > 0$, т.е. $x(x-2) > 0 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty;\, 0) \cup (2;\, +\infty)$.

Производная отрицательна, если выполнено неравенство $y' < 0$, т.е. $x(x-2) < 0 \Rightarrow x \in (0;\, 2)$.



Значит, при $x \in (-\infty;\, 0) \cup (2;\, +\infty)$ функция возрастает, а при $x \in (0,\, 2)$ – убывает. Следовательно, $x = 0$ – точка максимума, $x = 2$ – точка минимума.

Находим максимальное и минимальное значения функции:

$y_{\max}(0) = 0$; $y_{\min}(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$.

Ответ: интервал возрастания: $(-\infty;\, 0) \cup (2;\, +\infty)$; интервал убывания: $(0;\, 2)$; $y_{\max} = y(0) = 0$; $y_{\min} = y(2) = -4$.

Выпуклость, вогнутость. Точки перегиба.

График функции $y = f(x)$ называется *выпуклым (вогнутым)* на интервале $(a;\, b)$, если он расположен ниже (выше) касательной, проведенной к кривой в любой точке этого интервала.

Теорема *(достаточное условие выпуклости (вогнутости) графика функции)*. Если $f''(x) < 0$, $x \in (a;\, b)$, то график функции выпуклый на этом интервале; если же $f''(x) > 0$, $x \in (a;\, b)$, то график функции вогнутый.

Точка $M_0(x_0;\, f(x_0))$ графика функции, отделяющая выпуклую часть графика от вогнутой, называется *точкой перегиба*. Если – абсцисса точки перегиба графика функции $y = f(x)$, то вторая производная функции в этой точке или равна нулю, или не существует.

Теорема *(достаточный признак точки перегиба)*. Если в точке $x = x_0$ $f''(x) = 0$ или $f''(x)$ не существует и при переходе через эту точку производная $f''(x)$ меняет знак, то точка с абсциссой $x = x_0$ кривой $y = f(x)$ – точка перегиба.

Пример 31. Найти интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба кривой $y = x^4 - 2x^3 - 12x^2 - 6x + 5$.

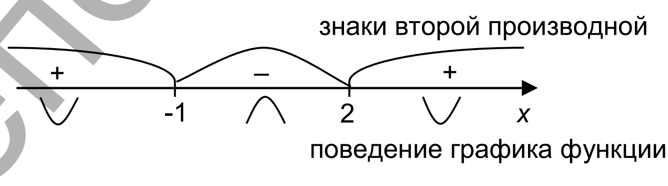
Решение. Найдем первую и вторую производные данной функции:

$y' = 4x^3 - 6x^2 - 24x - 6$;

$y'' = 12x^2 - 12x - 24 = 12(x^2 - x - 2) = 12(x - 2)(x + 1)$.

Кривая выпукла, если выполнено неравенство $y'' < 0$, т.е. $(x + 1)(x - 2) < 0 \;\Rightarrow\; x \in (-1; 2)$.

Кривая вогнута, если выполнено неравенство $y'' > 0$, т.е. $(x + 1)(x - 2) > 0 \;\Rightarrow\; x \in (-\infty;\, -1) \cup (2;\, +\infty)$.



Найдем значения функции в точках $x = -1$ и $x = 2$:

$$y(-1) = 1 + 2 - 12 + 6 + 5 = 2;\quad y(2) = 16 - 16 - 48 - 12 + 5 = -55.$$

Значит, точки с координатами (–1; 2) и (2; –55) являются точками перегиба графика данной функции.

Ответ: интервал вогнутости: $(-\infty;\, -1) \cup (2;\, +\infty)$; интервал выпуклости: $(-1; 2)$; точки перегиба: (–1; 2), (2; –55).

Асимптоты кривой.

Прямая называется *асимптотой* кривой $y = f(x)$, если расстояние от точки $M(x, y)$ кривой до прямой стремится к нулю при неограниченном удалении точки $M(x, y)$ по кривой, т. е. при стремлении хотя бы одной из координат к бесконечности.

Прямая $x = a$ является *вертикальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$.

Прямая $y = b$ является *горизонтальной асимптотой* кривой $y = f(x)$, если $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$.

Прямая $y = k \cdot x + b$ является *наклонной асимптотой*, если существуют пределы: $k = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right)$.

Пример 32. Найти асимптоты кривой $y = \dfrac{3x^2 - x + 4}{x + 2}$.

Решение. Если $x \to -2$, то $y \to \infty$, значит, прямая $x = -2$ – вертикальная асимптота.

Найдем наклонную асимптоту $y = kx + b$:

$$k = \lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - x + 4}{x(x + 2)} = 3;$$

$$b = \lim_{x \to \infty} \left(f(x) - kx \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 4}{x + 2} - 3x \right) =$$

$$= \lim_{x \to \infty} \left(\frac{3x^2 - x + 4 - 3x^2 - 6x}{x + 2} \right) = \lim_{x \to \infty} \left(\frac{-7x + 4}{x + 2} \right) = -7.$$

$y = 3x - 7$ – наклонная асимптота.

Ответ: $x = -2$ – вертикальная асимптота; $y = 3x - 7$ – наклонная асимптота.

Примерная схема исследования:

1) указать область определения функции;

2) найти точки разрыва функции, точки пересечения ее графика с осями координат и вертикальные асимптоты;

3) установить наличие или отсутствие четности, нечетности, периодичности функции;

4) исследовать функцию на монотонность и экстремум;

5) определить интервалы выпуклости, вогнутости и точки перегиба;

6) найти асимптоты графика функции;

7) произвести необходимые дополнительные вычисления;

8) построить график функции.

Пример 33. Провести полное исследование функции $y = \dfrac{x^3}{3 - x^2}$ и построить ее график.

Решение.

1) Область определения функции:

$$D(y) = \left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right).$$

2) $x = \pm\sqrt{3}$ – точки разрыва функции.

$$\lim_{x \to -\sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \to -\sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty;$$

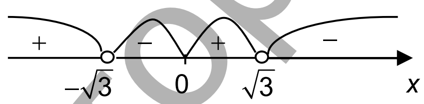
$$\lim_{x \to \sqrt{3}-0} \frac{x^3}{3 - x^2} = +\infty; \quad \lim_{x \to \sqrt{3}+0} \frac{x^3}{3 - x^2} = -\infty.$$

Прямые $x = \pm\sqrt{3}$ – вертикальные асимптоты.

Точки пересечения графика функции с осями координат: если $x = 0$, то $y = \dfrac{0^3}{3 - 0^2} = 0$; если $y = 0$, т.е. $\dfrac{x^3}{3 - x^2} = 0$, то $x = 0$. Таким образом, график функции пересекает оси координат в единственной точке $O(0;\, 0)$.

Найдем промежутки знакопостоянства функции:

$$y > 0 \Rightarrow \frac{x^3}{3 - x^2} > 0 \Rightarrow \frac{x^3}{\left(\sqrt{3} - x\right)\left(\sqrt{3} + x\right)} > 0;$$



$y > 0$, если $x \in (-\infty;\; -\sqrt{3}) \cup (0;\, \sqrt{3})$; $y < 0$, если $x \in (-\sqrt{3};\; 0) \cup (\sqrt{3};\, +\infty)$.

3) Исследуем функцию на наличие четности или нечетности. Область определения функции симметрична относительно начала координат. Найдем $y(-x)$:

$$y(-x) = \frac{(-x)^3}{3 - (-x)^2} = \frac{-x^3}{3 - x^2} = -\frac{x^3}{3 - x^2} = -y(x).$$

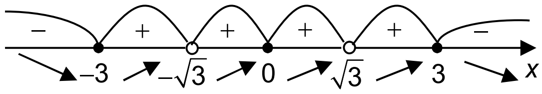
Таким образом, $y(-x) = -y(x)$, а значит функция нечетная, и ее график симметричен относительно начала координат.

4) Исследуем функцию на монотонность и экстремум.

$$y' = \left(\frac{x^3}{3 - x^2}\right)' = \frac{3x^2\left(3 - x^2\right) + 2x \cdot x^3}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{9x^2 - x^4}{\left(3 - x^2\right)^2} =$$

$$\frac{x^2\left(9 - x^2\right)}{\left(3 - x^2\right)^2} = \frac{x^2(3 - x)(3 + x)}{\left(\sqrt{3} - x\right)^2\left(\sqrt{3} + x\right)^2}.$$

Из $y' = 0$ следует $\dfrac{x^2(3-x)(3+x)}{\left(3-x^2\right)^2} = 0$, откуда $x = 0$, $x = \pm 3$.

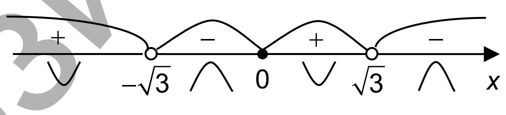


Как видно, на промежутках $\left(-3; -\sqrt{3}\right) \cup \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right) \cup \left(\sqrt{3}; 3\right)$ $y' > 0$, следовательно, функция возрастает. На промежутках $(-\infty; -3) \cup (3; +\infty)$ $y' < 0$, следовательно, функция убывает. В точках $x = \pm 3$ производная меняет знак, поэтому $x = -3$ – точка локального минимума, $y_{\min} = y(-3) = \dfrac{(-3)^3}{3-(-3)^2} = 4{,}5$, $x = 3$ – точка локального максимума, $y_{\max} = y(3) = \dfrac{3^3}{3-3^2} = -4{,}5$.

5) Исследуем график функции на выпуклость, вогнутость и определим точки перегиба. Для этого найдем:

$$y'' = \left(\frac{9x^2 - x^4}{\left(3-x^2\right)^2}\right)' = \frac{\left(18x - 4x^3\right)\left(3-x^2\right)^2 + 2\left(3-x^2\right)\cdot 2x\cdot\left(9x^2 - x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^4} =$$

$$= \frac{\left(18x - 4x^3\right)\left(3-x^2\right) + 4x\cdot\left(9x^2 - x^4\right)}{\left(3-x^2\right)^3} = \frac{6x^3 + 54x}{\left(3-x^2\right)^3} = \frac{6x\left(x^2+9\right)}{\left(3-x^2\right)^3}.$$



На интервалах $\left(-\infty; -\sqrt{3}\right) \cup \left(0; \sqrt{3}\right)$ вторая производная $y''(x)$ положительна, а значит, график функции на этих интервалах вогнут. На интервалах $\left(-\sqrt{3}; 0\right) \cup \left(\sqrt{3}; +\infty\right)$ вторая производная $y''(x)$ отрицательна, кривая на этих интервалах выпукла. В точках $x = \pm\sqrt{3}$ функция не определена. Точка $(0; 0)$ – точка перегиба.

6) Найдем наклонные асимптоты.

$$k = \lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3}{x\left(3-x^2\right)} = -1;$$

$$b = \lim_{x\to\infty}\left(f(x)-kx\right) = \lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^3}{3-x^2}+x\right) = \lim_{x\to\infty}\frac{x^3+3x-x^3}{3-x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{3x}{3-x^2} = 0;$$

$y=-x$ – наклонная асимптота.

7) Изучим поведение функции при $x \to \pm\infty$:

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3}{3-x^2} = +\infty; \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{x^3}{3-x^2} = -\infty.$$

Необходимые дополнительные вычисления проведем в таблице:

x	-4	-1	1	4
y	4,92	-0,5	0,5	-4,92

8) Построим график функции (рис.5):

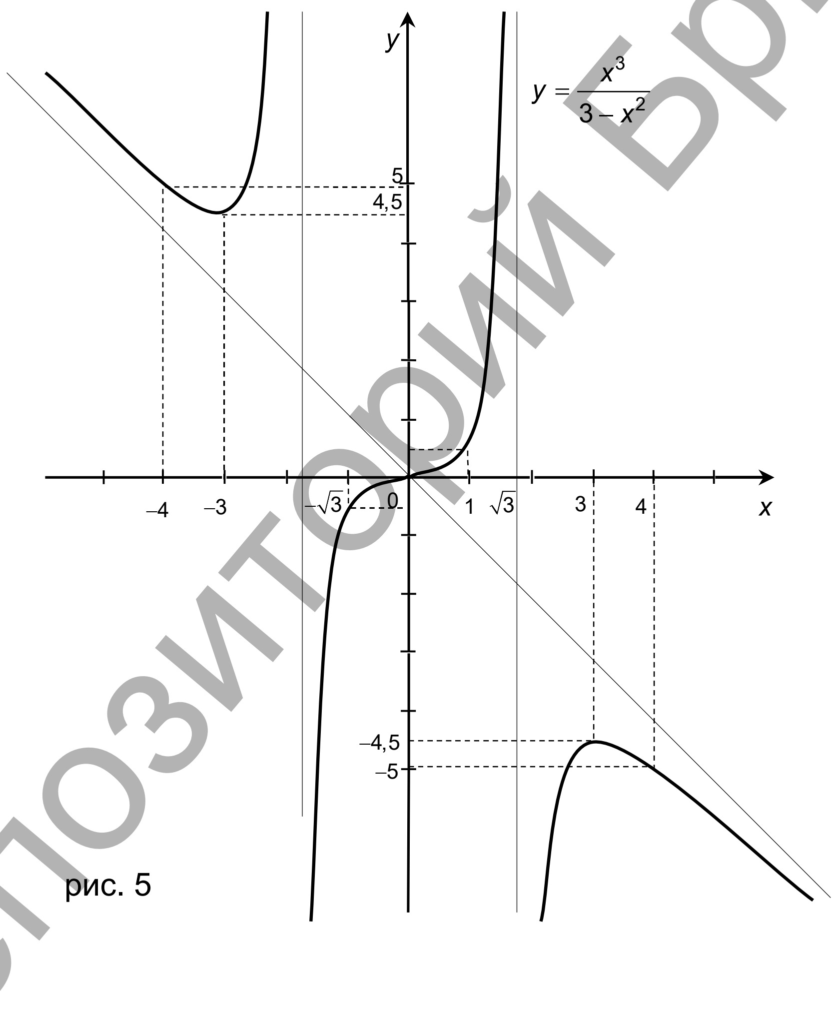


рис. 5

Литература

1. Пискунов Н. С. Дифференциальное и интегральное исчисление. - М.: Наука, 1985, т. I.
2. Жевняк Р. М., Карпук А. А. Высшая математика, ч.1-2, - Минск: ВШ, 1984-1988.
3. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1985.
4. Сборник задач по математике для втузов (под ред. А. В. Ефимова и Б. П. Демидовича). - М.: Наука, 1981, ч. I.
5. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике (под ред. А.П. Рябушко). – Минск: ВШ, 2000, ч. 1.
6. Гусак А.А. Высшая математика, т.1. - Минск: ВШ, 1988.
7. Гусак А.А. Пособие к решению задач по высшей математике. – Минск: ВШ, 1988.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Гладкий Иван Иванович
Дворниченко Александр Валерьевич
Каримова Татьяна Ивановна
Лебедь Светлана Федоровна
Махнист Леонид Петрович

МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по разделам «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», «Введение в математический анализ» и «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» общего курса дисциплины «Математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения (сокращенной)

Ответственный за выпуск: Каримова Т.И.
Редактор:
Компьютерная верстка:
Корректор:

Подписано к печати _______ Формат 60x84 $^{1}/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. ____. Уч.-изд. л. ____. Заказ № ____. Тираж экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.