МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования

«Брестский государственный технический университет»

Кафедра высшей математики

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Задачи и упражнения

Брест 2010

УДК 519.2.(076)

В настоящей методической разработке рассматриваются задачи и упражнения по основным темам теории вероятностей и математической статистики. Содержатся краткие теоретические сведения и наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ.

Составители: **Гладкий И.И.**, старший преподаватель,
Каримова Т.И., доцент, к.ф.-м.н.,
Махнист Л.П., доцент, к.т.н.
Тузик Т.А., доцент

Рецензент: **Мирская Е.И.**, доцент кафедры информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

Вопросы учебной программы
по теории вероятностей и математической статистике

Теория вероятностей

1. Элементы комбинаторики: перестановки, сочетания и размещения.
2. События и их виды. Алгебра событий.
3. Вероятность события. Свойства вероятности. Способы вычисления вероятности случайного события (классический, геометрический и статистический).
4. Теоремы сложения и умножения вероятностей.
5. Формулы полной вероятности и Байеса.
6. Схема повторных испытаний. Формула Бернулли.
7. Предельные случаи в схеме Бернулли: локальная и интегральная теоремы Муавра-Лапласа, формула Пуассона.
8. Отклонение относительной частоты от постоянной вероятности в схеме Бернулли.
9. Случайные величины. Закон распределения дискретной случайной величины.
10. Функция распределения одномерной случайной величины, свойства функции распределения.
11. Плотность распределения вероятностей непрерывной случайной величины, свойства плотности.
12. Числовые характеристики дискретной случайной величины и непрерывной случайной величины: математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение.
13. Классические законы распределения дискретной случайной величины: геометрическое, биномиальное и Пуассона.
14. Классические законы распределения непрерывной случайной величины: равномерное, нормальное, показательное и функция надежности.
15. Зависимые и независимые случайные величины. Коррелированность и зависимость случайной величины.
16. Корреляционный момент и коэффициент корреляции. Коррелированность и зависимость случайных величин.

Математическая статистика

17. Статистическая совокупность. Генеральная и выборочная совокупности.
18. Статистическое распределение выборки. Геометрическое изображение статистических рядов.
19. Эмпирическая функция распределения.
20. Основные числовые характеристики выборки.
21. Понятие статистической оценки неизвестных параметров распреде-

ления. Точечные оценки и их классификация.

22. Интервальные оценки параметров распределения. Доверительный интервал.
23. Доверительные интервалы для оценки параметров нормального распределения.
24. Распределения χ^2 (“хи” - квадрат) и Стьюдента.
25. Статистическая проверка гипотез. Нулевая и альтернативная гипотезы. Ошибки первого и второго рода при проверке гипотез. Уровень значимости, критическая область. Статистический критерий и его мощность.
26. Критерии согласия χ^2 и Колмогорова.
27. Основные понятия корреляционного регрессионного анализа.
28. Линейная корреляционная зависимость и прямые среднеквадратических регрессий.

Классическая вероятность

Элементы комбинаторики.

Комбинаторика – раздел математики, в котором изучаются вопросы о том, сколько различных комбинаций, подчиненных тем или иным условиям, можно составить из заданных элементов (объектов).

Большинство задач комбинаторики решается с помощью двух общих правил: правило суммы и правило произведения.

Правило суммы: если объект A можно выбрать m способами, а объект B – n способами (не такими, как для A), то объект "или A, или B" можно выбрать $m+n$ способами.

Правило произведения: если объект A можно выбрать m способами, а после каждого выбора другой объект B можно выбрать n способами, то объект "A и B" можно выбрать $m \cdot n$ способами.

Перестановками из n элементов называют различные комбинации, составленные из n данных элементов, которые отличаются друг от друга порядком следования элементов.

Количество различных перестановок из n данных элементов можно найти по формуле:

$$P_n = n!$$

Пример 1. Сколькими различными способами можно расположить 5 книг на полке?

Решение. Искомое число способов равно числу перестановок из 5 элементов (книг), т.е. $P_5 = 5! = 120$.

Ответ. 120.

Размещениями из n элементов по k $(0 \le k \le n)$ называют различные комбинации, составленные из n данных элементов по k в каждой, которые отличаются друг от друга либо самими элементами, либо порядком их следования.

Количество различных размещений из n данных элементов по k можно найти по формуле:

$$A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

Пример 2. В турнире принимают участие 8 команд. Сколько различных предсказаний относительно распределения трех первых мест можно сделать?

Решение. Т.к. при распределении трех первых мест важно не только какие именно команды попадут в тройку лидеров, но и в каком порядке они будут расположены, то искомое число предсказаний равно числу размещений из 8 элементов (команд) по 3, т.е.

$$A_8^3 = \frac{8!}{(8-3)!} = \frac{8!}{5!} = 6 \cdot 7 \cdot 8 = 336.$$

Ответ. 336.

Сочетаниями из n элементов по k $(0 \le k \le n)$ называют различные комбинации, составленные из n данных элементов по k в каждой, которые отличаются друг от друга только самими элементами.

Количество различных сочетаний из n данных элементов по k можно найти по формуле:

$$C_n^k = \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\ldots\cdot(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Пример 3. Из группы студентов, состоящей из 10 человек, для участия в конкурсе выбирают 4 человека. Определить число всех возможных результатов выбора.

Решение. Число всех возможных результатов выбора равно числу сочетаний из 10 элементов (студентов) по 4, т.е.

$$C_{10}^4 = \frac{10!}{4!(10-4)!} = \frac{10!}{4!\cdot 6!} = \frac{7\cdot 8\cdot 9\cdot 10}{2\cdot 3\cdot 4} = 210.$$

Ответ. 210.

Классическое определение вероятности.

Случайным событием (событием) будем называть любой исход опыта (выполнения определенного комплекса условий), который может появиться или не появиться.

События обозначают большими латинскими буквами: *A, B, C, …*

Событие называют *достоверным* (Ω), если в условиях данного опыта оно обязательно произойдет.

Событие называют *невозможным* ($\varnothing$), если в условиях данного опыта оно никогда не произойдет.

Каждое событие, которое может наступить в результате опыта (испытания), называется элементарным исходом опыта, если это событие нельзя разложить на более простые события. Получаем так называемое пространство элементарных исходов $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n\}$. Исходы ω_i, при которых событие A наступает, называются *благоприятствующими* событию A.

Вероятностью события А называется число, равное отношению числа m элементарных исходов, благоприятствующих событию A, к общему числу n всех равновозможных исходов опыта.

$$P(A) = \frac{m}{n}.$$

Вероятность любого события удовлетворяет неравенству $0 \le P(A) \le 1$. Для достоверного события $P(\Omega) = 1$, для невозможного события $P(\varnothing) = 0$.

Пример 4. В урне находится 5 черных и 3 белых шара. Какова вероятность того, что наудачу взятый из урны шар окажется белым?

Решение. Опишем пространство элементарных исходов. Будем обозначать «$Ч_i$» появление *i*-ого черного шара, $i=\overline{1,5}$, и «$Б_j$» появление *j*-ого белого шара, $j=\overline{1,3}$.

$$\Omega=\{Ч_1, Ч_2, Ч_3, Ч_4, Ч_5, Б_1, Б_2, Б_3\}$$

Всех исходов 8, т.е. *n=8.*

Событие *A* состоит в том, что наудачу взятый из урны шар окажется белым. Ему благоприятствует 3 исхода, *m=3*.

$$P(A)=\frac{3}{8}=0{,}375.$$

Ответ. 0,375.

Пример 5. В ящике 9 деталей, среди которых 6 окрашенных. Сборщик наудачу извлекает 3 детали. Найти вероятность того, что среди извлеченных деталей ровно две будут окрашены.

Решение. Пусть событие *A* состоит в том, что среди извлеченных деталей ровно две будут окрашены.

Общее число возможных результатов выбора трех деталей из девяти имеющихся равно числу сочетаний из 9 по 3, т.е. $n=C_9^3$. Число исходов, благоприятствующих событию *A*, определяется как произведение числа возможных результатов выбора двух окрашенных деталей из шести и числа возможных результатов выбора одной неокрашенной детали из трех, т.е. $m=C_6^2\cdot C_3^1$. Таким образом:

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{C_6^2\cdot C_3^1}{C_9^3}=\frac{6!}{2!\cdot 4!}\cdot\frac{3!}{1!\cdot 2!}\cdot\frac{3!\cdot 6!}{9!}=\frac{15}{28}\approx 0{,}536.$$

Ответ. 0,536.

Пример 6. В магазине имеются 30 телевизоров, причем 20 из них импортные. Найти вероятность того, что среди 5 проданных в течение дня телевизоров окажется не менее 3-х импортных телевизоров; предполагая, что вероятности покупки телевизоров разных марок одинаковы.

Решение. Событие *A* состоит в том, что в течение дня из 5 проданных телевизоров импортных оказалось не менее 3-х, т.е. или 3, или 4, или 5. Общее число выбора 5 телевизоров из 30 имеющихся ровно числу сочетаний из 30 по 5, т.е.

$$n=C_{30}^5=\frac{30!}{5!\cdot 25!}=\frac{30\cdot 29\cdot 28\cdot 27\cdot 26\cdot 25!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 25!}=142506.$$

Число исходов, благоприятствующих событию A, определится как сумма произведений вида

$$m=C_{25}^2\cdot C_{10}^3+C_{25}^1\cdot C_{10}^4+C_{25}^0\cdot C_{10}^5=41502.$$

$$P(A)=\frac{m}{n}=\frac{41502}{142506}\approx 0{,}29.$$

Ответ. 0,29.

Пример 7. Среди 20 деталей имеется 6 бракованных. Для проверки качества наудачу выбирают 4 детали. Найти вероятность того, что среди отобранных будут: а) ровно 3 стандартные детали; б) от 2-х до 4-х стандартных деталей; в) хотя бы одна бракованная.

Решение. Общее число выбора 4 деталей из 20 имеющихся равно числу сочетаний из 20 по 4, т.е.

$$n = C_{20}^{4} = \frac{20!}{4!\cdot 16!} = \frac{20\cdot 19\cdot 18\cdot 17\cdot 16!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 16!} = 4845.$$

а) Пусть событие A состоит в том, что среди 4 взятых деталей 3 стандартных из 14 и одна бракованная из 6. Применив правило произведения, найдем число таких исходов

$$m_1 = C_{14}^{3}\cdot C_{6}^{1} = \frac{14!}{3!\cdot 11!}\cdot\frac{6!}{1!\cdot 5!} = \frac{14\cdot 13\cdot 12\cdot 11!}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 11!}\cdot\frac{6\cdot 5!}{1\cdot 5!} = 2184.$$

$$P(A) = \frac{m_1}{n} = \frac{2184}{4845} \approx 0{,}45.$$

б) Пусть событие B состоит в том, что среди 4-х взятых деталей: или 2 стандартные из 14 и 2 бракованные из 6; или 3 стандартные из 14 и одна бракованная из 6; или 4 стандартные из 14 и ни одной бракованной из 6. Применив правила суммы и произведения, найдем число таких исходов

$$m_2 = C_{14}^{2}\cdot C_{6}^{2} + C_{14}^{3}\cdot C_{6}^{1} + C_{14}^{4}\cdot C_{6}^{0} = 1365 + 2184 + 1001 = 4550.$$

$$P(B) = \frac{m_2}{n} = \frac{4550}{4845} \approx 0{,}94.$$

в) Пусть событие C состоит в том, что среди 4-х взятых деталей хотя бы одна бракованная, т.е. или 1, или 2, или 3, или 4 бракованных. Применив правила суммы и произведения, найдем число таких исходов

$$m_3 = C_{6}^{1}\cdot C_{14}^{3} + C_{6}^{2}\cdot C_{14}^{2} + C_{6}^{3}\cdot C_{14}^{1} + C_{6}^{4}\cdot C_{14}^{0} = 2184 + 1365 + 280 + 15 = 3844.$$

$$P(C) = \frac{m_3}{n} = \frac{3844}{4845} \approx 0{,}79.$$

Ответ. а) 0,45; б) 0,94; в) 0,79.

Задания для аудиторной работы

1. Один раз подбрасывается игральная кость. Найти вероятность того, что выпадет а) четное число очков; б) число очков меньшее пяти; в) число очков не менее двух?

2. Правильная монета подбрасывается 2 раза. Какова вероятность того, что: а) герб выпадет 2 раза; б) герб выпадет 1 раз; в) герб выпадет хотя бы один раз?

3. В урне 5 шаров: 3 белых и 2 черных. Наудачу извлечен 1 шар. Какова вероятность того, что он: а) белый; б) черный; в) синий?

4. Игральная кость подбрасывается 2 раза. Какова вероятность того, что: а) сумма брошенных очков равна 6, а произведение 8; б) сумма выпавших очков не более трех?

Ответ. а) 0,06; б) 0,08.

5. Имеются 4 детали, среди которых 3 стандартные и одна нестандартная. Наудачу взяли 2 детали. Какова вероятность того, что среди извлеченных деталей а) 2 стандартные; б) 1 стандартная и 1 нестандартная; в) хотя бы одна стандартная?

Ответ. а) 0,5; б) 0,5; в) 1.

6. Из колоды 36 карт наудачу вынимают 3 карты. Найти вероятность того, что среди них 2 туза.

Ответ. 0,03.

7. В цехе работают 6 мужчин и 4 женщины. По табельным номерам наудачу отобраны 7 человек. Найти вероятность того, что среди отобранных лиц окажется ровно 3 женщины.

Ответ. 0,5.

8. В урне 12 белых и 8 черных шаров. Найти вероятность того, что среди наугад вынутых пяти шаров будет: а) ровно 3 черных; б) хотя бы один черный.

Ответ. а) 0,24; б) 0,95.

Задания для индивидуальной работы

9. В группе 20 студентов, среди которых 8 отличников. По списку наудачу отобраны 9 студентов. Найти вероятность того, что: а) среди отобранных 5 отличников; б) хотя бы один отличник.

Ответ. а) 0,15; б) 0,999.

10. В конверте среди 100 фотографий находится одна разыскиваемая. Из конверта наудачу извлечены 10 карточек. Найти вероятность того, что среди них окажется нужная.

Ответ. 0,1

11. В группе спортсменов 7 лыжников и 5 конькобежцев. Из них случайным образом выбирают три спортсмена. Найти вероятность того, что среди них: а) все лыжники; б) один лыжник и два конькобежца; в) хотя бы один конькобежец.

Ответ. а) 0,16; б) 0,32; в) 0,84.

12. 20 билетов содержат по три вопроса, которые не повторяются. Студент выучил 50 вопросов. Какова вероятность того, что вытянутый билет содержит: а) только подготовленные вопросы; б) только один неподготовленный вопрос; в) хотя бы один неподготовленный.

Ответ. а) 0,57; б) 0,36; в) 0,43.

Теоремы сложения и умножения вероятностей случайных событий

Событие $\overline{A}$ назовем *противоположным* событию *A*, если событие $\overline{A}$ происходит тогда и только тогда, когда не происходит событие *A*.

Суммой или *объединением* событий *A* и *B* назовем событие *A+B* $(A \cup B)$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит или событие *A,* или событие *B*, или оба события.

Произведением или *пересечением* событий *A* и *B* назовем событие $A \cdot B$ $(A \cap B)$, которое происходит тогда и только тогда, когда происходит и событие *A* и событие *B.*

Событие *A* называется *независимым* от события *B,* если появление события *B* не изменяет вероятность появления события *A*. В противном случае событие *A* называют зависимым от события *B*.

Если появление одного события исключает появление другого, то события называются несовместными. Группа событий $A_1, A_2, ..., A_n$ называется группой несовместных событий, если совместное появление любой пары этих событий невозможно. Если хотя бы одно событие из группы $A_1, A_2, ..., A_n$ происходит, то эти события образуют полную группу событий. Два события, образующие полную группу несовместных событий, называются противоположными.

Теорема. Вероятность совместного наступления двух независимых событий *A* и *B* равна:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B).$$

Пример 8. Три стрелка производят по одному выстрелу по цели. Вероятности попадания в цель равны: для первого стрелка – 0,3, для второго – 0,9, для третьего – 0,6. Найти вероятность того, что все три стрелка попадут в цель.

Решение. Событие *A* состоит в том, что все три стрелка попадут в цель. При этом возможны следующие гипотезы: H_1 – первый стрелок попадет в цель; H_2 – второй стрелок попадет в цель; H_3 – третий стрелок попадет в цель. Из условия задачи:

$$P(H_1) = 0{,}3, \; P(H_2) = 0{,}9, \; P(H_3) = 0{,}6.$$

Т.к. вероятность любого из событий H_k, $k = 1, 2, 3$ не меняется при наступлении другого, то события H_k независимы. Тогда:

$$P(A) = P(H_1 \cdot H_2 \cdot H_3) = P(H_1) \cdot P(H_2) \cdot P(H_3) = 0{,}3 \cdot 0{,}9 \cdot 0{,}6 = 0{,}162.$$

Ответ. 0,162.

Вероятность события *A*, вычисленная с учетом того, что событие *B* произошло, называется *условной вероятностью* и обозначается $P(A/B)$.

Теорема. Вероятность совместного наступления событий *A* и *B* равна:

$$P(AB) = P(A) \cdot P(B/A) = P(B) \cdot P(A/B).$$

События A и B назовем *несовместными*, если появление одного из них исключает появление другого: $AB = \varnothing$.

Теорема. Если события A и B несовместны, то вероятность суммы событий равна:

$$P(A+B) = P(A) + P(B).$$

Пример 9. Найти вероятность того, что при одном подбрасывании игральной кости выпадет пять или шесть очков.

Решение. Событие A состоит в том, что при одном подбрасывании игральной кости выпадет пять или шесть очков. При этом возможны следующие гипотезы: H_1 – выпало пять очков; H_2 – выпало шесть очков.

$$P(H_1) = \frac{1}{6},\ P(H_2) = \frac{1}{6}.$$

События H_1 и H_2 несовместны, тогда:

$$P(A) = P(H_1 + H_2) = P(H_1) + P(H_2) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \approx 0{,}33.$$

Ответ. 0,33.

Теорема. Вероятность суммы двух совместных событий A и B равна:

$$P(A+B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

Для вероятности суммы трех совместных событий A, B и C, справедлива формула:

$$P(A+B+C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(AB) - P(BC) - P(AC) + P(ABC).$$

Вероятность суммы трех и более совместных событий удобно вычислять по формулам:

$$P(A+B+C) = 1 - P\left(\bar{A} \cdot \bar{B} \cdot \bar{C}\right);$$

$$P(A_1 + A_2 + \ldots + A_n) = 1 - P\left(\bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \ldots \cdot \bar{A}_n\right).$$

Пример 10. В блок входят три радиолампы. Вероятности выхода из строя в течение гарантийного срока для них соответственно равны 0,3; 0,2 и 0,4. Какова вероятность того, что в течение гарантийного срока хотя бы одна радиолампа выйдет из строя?

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в том, что i-ая радиолампа выйдет из строя $(i = 1,2,3)$. Известно, что

$$P(A_1) = 0{,}3,\ P(A_2) = 0{,}2,\ P(A_3) = 0{,}4.$$

Событие $B = A_1 + A_2 + A_3$ означает, что хотя бы одна радиолампа в течение гарантийного срока выйдет из строя. События A_1, A_2, A_3 совместны. Введем противоположное событие $\bar{B}$ − ни одна из трех радиоламп не выходит из строя: $\bar{B} = \bar{A}_1 \cdot \bar{A}_2 \cdot \bar{A}_3$. События $\bar{A}_i$ и A_i независимы друг от друга, поэтому

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1) \cdot P(\bar{A}_2) \cdot P(\bar{A}_3) = \left(1 - P(A_1)\right)\left(1 - P(A_2)\right)\left(1 - P(A_3)\right) =$$

$$= (1-0{,}3)(1-0{,}2)(1-0{,}4) = 0{,}7\cdot 0{,}8\cdot 0{,}6 = 0{,}336.$$

$$P(B) + P(\bar{B}) = 1.$$

$$P(B) = P(A_1 + A_2 + A_3) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - P(\bar{A}_1)P(\bar{A}_2)P(\bar{A}_3) = 1 - 0{,}336 = 0{,}664.$$

Ответ. 0,664.

Пример 11. Сколько раз надо подбросить монету, чтобы вероятность хотя бы однократного появления герба была больше 0,875?

Решение. Обозначим через A_i событие, состоящее в появлении герба при i-ом броске $\left(i = \overline{1,n}\right)$. Очевидно, что $P(A_i) = \dfrac{1}{2}$, $\left(i = \overline{1,n}\right)$.

Пусть $B = A_1 + A_2 + \ldots + A_n$. Это событие означает, что при n бросаниях монеты герб появится хотя бы один раз. По условию $P(B) > 0{,}875$. Воспользуемся формулой $P(B) = 1 - P(\bar{B})$.

Событие $\bar{B}$ означает, что ни разу при n бросаниях герб не появится

$$P(\bar{B}) = P(\bar{A}_1)\cdot P(\bar{A}_2)\cdot\ldots\cdot P(\bar{A}_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

Решаем неравенство

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n > 0{,}875;$$

$$(0{,}5)^n < 0{,}125;$$

$$(0{,}5)^n < (0{,}5)^3.$$

Отсюда:

$$n > 3.$$

Ответ. $n > 3$.

Задания для аудиторной работы

13. Указать события, противоположные данным:

1) событие A состоит в том, что из трех облигаций ни одна не выиграет;

2) событие B состоит в том, что среди четырех карт все карты разной масти;

3) событие C состоит в том, что три дня подряд шел дождь.

14. Пусть A, B, C – три произвольных события. Найдите выражения для событий, состоящих в том, что из событий A, B, C:

1) произошло только A;

2) произошли A и B, а C не произошло;

3) произошли все три события;

4) произошло хотя бы одно из этих событий;

5) произошло одно и только одно из этих событии;

6) произошло не более двух событий.

15. Вероятность поражения цели первым стрелком при одном выстреле равна 0,8, а вторым стрелком – 0,6. Найти вероятность того, что цель будет поражена а) двумя стрелками; б) только одним стрелком; в) ни одним стрелком; г) хотя бы одним стрелком.

Ответ. а) 0,48; б) 0,44; в) 0,08; г) 0,92.

16. Вероятность того, что студент сдаст первый экзамен, равна 0,8, второй – 0,7, третий – 0,6. Найти вероятность того, что студент сдаст а) все экзамены; б) только два экзамена; в) хотя бы один экзамен; г) хотя бы два экзамена.

Ответ. а) 0,336; б) 0,452; в) 0,976; г) 0,788.

17. Какова вероятность того, что два карандаша, взятые наудачу из коробки, содержащей 6 красных и 3 синих карандаша, будут одного цвета, если: а) взятый карандаш возвращают в коробку; б) взятый карандаш не возвращают в коробку.

Ответ. а) 0,56; б) 0,5.

18. Найти вероятность того, что наудачу взятое двузначное число окажется кратным или 2, или 5, или тому и другому.

Ответ. 0,6.

19. Вероятность того, что при одном выстреле стрелок попадет в десятку, равна 0,6. Сколько выстрелов должен сделать стрелок, чтобы с вероятностью не менее 0,8 он попал в десятку хотя бы один раз?

Ответ. Не менее двух.

Задания для индивидуальной работы

20. Пусть *A, B, C* – три произвольных события. Найдите выражения для событий, состоящих в том, что из событий *A*, *B*, *C*:

1) произошло по крайней мере два события из трех;
2) произошло только два события;
3) не произошло ни одного из данных событий;
4) произошло не более одного из трех данных событий.

21. Три орудия ведут огонь по цели, вероятность попадания в которую при одном выстреле из первого орудия 0,5, из второго – 0,6 и из третьего – 0,7. Зная, что каждое орудие стреляет один раз, найти вероятность поражения цели, если для этого достаточно двух попаданий.

Ответ. 0,65.

22. В телестудии три телевизионные камеры. Вероятности их включения в данный момент соответственно равны 0,9; 0,8 и 0,6. Найти вероятность того, что в данный момент включены: а) только две камеры; б) не более одной камеры; в) хотя бы одна камера.

Ответ. а) 0,428; б) 0,124; в) 0,992.

23. В двух ящиках находятся детали: в первом – 10, из них 3 стандартные, во втором – 15, из них 6 стандартных. Из каждого ящика наудачу вынимают по одной детали. Найти вероятность того, что: а) обе детали окажутся стандартными; б) хотя бы одна деталь окажется нестандартной.

Ответ. а) 0,12; б) 0,88.

24. Абонент забыл последнюю цифру номера телефона и поэтому набирает ее наугад. Найти вероятность того, что ему придется звонить не более чем в четыре места.

Ответ. 0,4.

Формула полной вероятности. Формула Байеса

Вероятность события A, которое может наступить лишь при появлении одного из несовместных событий (гипотез) $H_1, H_2, ..., H_n$, образующих полную группу событий, вычисляется по *формуле полной вероятности*:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + ... + P(H_n)P(A/H_n),$$

где $P(H_1) + P(H_2) + ... + P(H_n) = 1$.

Если событие A уже произошло, то вероятности гипотез H_k могут быть переоценены по *формуле Байеса*:

$$P(H_k/A) = \frac{P(H_k)P(A/H_k)}{P(A)}, \; k = \overline{1,n}.$$

Пример 12. С первого автомата на сборку поступает 40%, со второго – 35% и с третьего – 25% деталей. Среди деталей первого автомата 0,2% бракованных, второго – 0,3% и третьего – 0,5%. Найти вероятность того, что: а) поступившая на сборку деталь бракованная; б) бракованная деталь, поступившая на сборку, изготовлена вторым автоматом.

Решение. Пусть событие A состоит в том, что поступившая на сборку деталь бракованная.

Возможны гипотезы: H_1 – деталь поступила с первого автомата; H_2 – деталь поступила со второго автомата; H_3 – деталь поступила с третьего автомата. Известны вероятности:

$$P(H_1) = 0,4; \; P(H_2) = 0,35; \; P(H_3) = 0,25;$$

$$P(A/H_1) = 0,002; \; P(A/H_2) = 0,003; \; P(A/H_3) = 0,005.$$

а) Полная вероятность события A равна:

$$P(A) = P(H_1)P(A/H_1) + P(H_2)P(A/H_2) + P(H_3)P(A/H_3) =$$

$$= 0,4 \cdot 0,002 + 0,35 \cdot 0,003 + 0,25 \cdot 0,005 = 0,0031.$$

б) Пересчитаем вероятность гипотезы H_2 с учетом того, что событие A уже произошло, т.е. деталь, поступившая на сборку, оказалась бракованной.

$$P(H_2/A) = \frac{P(H_2)P(A/H_2)}{P(A)} = \frac{0,35 \cdot 0,003}{0,0031} = \frac{0,00105}{0,0031} \approx 0,34.$$

Ответ. а) 0,0031; б) 0,34.

Задания для аудиторной работы

25. На трех автоматических станках изготавливаются одинаковые детали. Известно, что 30% продукции производится первым станком, 25% – вторым станком и 45% – третьим. Вероятность изготовления детали, отвечающей стандарту, на первом станке равна 0,99, на втором – 0,988, на третьем – 0,98. Изготовленные в течение дня на трех станках нерассортированные детали находятся на складе. Определить вероятность того, что наугад взятая деталь соответствует стандарту.

Ответ. 0,99.

26. При разрыве снаряда образуются крупные, средние и мелкие осколки в отношении 1:3:6. При попадании в танк крупный осколок пробивает броню с вероятностью 0,9, средний – 0,3 и мелкий – 0,1. Найти вероятность того, что попавший в броню осколок пробьет ее.

Ответ. 0,24.

27. Сборщик получил 3 коробки деталей, изготовленных заводом №1, и 2 коробки деталей, изготовленных заводом №2. Вероятность того, что деталь завода №1 стандартна, равна 0,8, а завода №2 – 0,9.Сборщик наудачу извлек деталь из наудачу взятой коробки. а) Найти вероятность того, что извлечена стандартная деталь. б) Оказалось, что извлечена стандартная деталь. Найти вероятность того, что деталь изготовлена заводом №2.

Ответ. а) 0,84; б) 0,43.

28. В пирамиде 5 винтовок, 3 из которых с оптическим прицелом. Вероятность того, что стрелок поразит мишень при выстреле из винтовки с оптическим прицелом 0,95, для винтовки без оптического прицела – 0,7. Из наудачу взятой винтовки произведен один выстрел. а) Найти вероятность того, что мишень поражена. б) Мишень была поражена. Найти вероятность того, что выстрел производили из винтовки без оптического прицела.

Ответ. а) 0,85; б) 0,33.

Задания для индивидуальной работы

29. Два автомата производят детали, которые поступают на общий конвейер. Вероятность получения нестандартной детали на первом автомате равна 0,075, а на втором – 0,09. Производительность второго автомата вдвое больше, чем первого. Найти вероятность того, что наугад взятая с конвейера деталь нестандартна.

Ответ. а) 0,085.

30. Один из трех стрелков вызывается на линию огня и производит выстрел. Цель поражена. Вероятность попадания при одном выстреле для первого стрелка равна 0,3, для второго – 0,5, для третьего – 0,8. Найти вероятность того, что выстрел произведен вторым стрелком.

Ответ. а) 0,3125.

31. На предприятии работают две бригады рабочих: первая производит в среднем $\frac{3}{4}$ продукции с процентом брака 4%, вторая – $\frac{1}{4}$ продукции с процентом брака 6%. Найти вероятность того, что взятое наугад изделие: а) окажется бракованным; б) изготовлено второй бригадой при условии, что изделие оказалось бракованным.

Ответ. а) 0,045; б) 0,33.

32. Страховая компания разделяет застрахованных по классам риска: первый класс – малый риск, второй класс – средний риск и третий класс – большой риск. Среди клиентов банка 50% клиентов первого класса, 30% - второго и 20% - третьего. Вероятность необходимости выплачивать страховое вознаграждение для первого класса риска равна 0,01; для второго – 0,03 и для третьего – 0,08. а) Какова вероятность того, что застрахованный получит денежное вознаграждение за период страхования? б) Застрахованный получил вознаграждение. Какому классу риска вероятнее всего он принадлежит?

Ответ. а) 0,03; б) третьему.

Повторение независимых испытаний

Если при проведении испытаний вероятность события A не зависит от исходов других испытаний, то такие испытания называются *независимыми.*

Если проводится серия из n независимых испытаний, в каждом из которых вероятность появления события A равна p, а вероятность непоявления равна $q = 1 - p$, то вероятность того, что событие A произойдет ровно m раз определяется *формулой Бернулли:*

$$P_n(m) = C_n^m p^m q^{n-m}, где\ \ C_n^m = \frac{n!}{m!(n-m)!},\ q = 1 - p.$$

При больших n и малых p вычисления по формуле Бернулли затруднены. В этих случаях обычно используется *формула Пуассона*:

$$P_n(m) = \frac{\lambda^m}{m!} \cdot e^{-\lambda}, где\ \ \lambda = n \cdot p.$$

Пример 13. Игральная кость подбрасывается пять раз. Найти вероятность того, что а) три очка выпадет четыре раза; б) три очка выпадет хотя бы один раз.

Решение. Вероятность появления трех очков при одном подбрасывании игральной кости равна $p = \frac{1}{6}$, тогда вероятность не появления трех очков равна $q = 1 - \frac{1}{6} = \frac{5}{6}$.

а) Вероятность того, что три очка появятся четыре раза при пяти подбрасываниях игральной кости находится по формуле Бернулли:

$$P_5(4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^4 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{5!}{4!1!} \cdot \frac{5}{6^5} \approx 0{,}0032.$$

б) Событию «При пяти подбрасываниях игральной кости три очка выпадет хотя бы один раз» противоположно событие «При пяти подбрасываниях игральной кости три очка не выпадет ни разу». Тогда:

$$P_5(m \ge 1) = 1 - P_5(m = 0) = 1 - C_5^0 \cdot \left(\frac{1}{6}\right)^0 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^5 = 1 - \frac{5!}{0!5!} \cdot \frac{5^5}{6^6} \approx 0{,}93.$$

Ответ: а) 0,0032; б) 0,93.

Пример 14. В новом микрорайоне поставлено 10000 кодовых замков на входных дверях домов. Вероятность выхода из строя одного замка в течение месяца равна 0,0002. Найти вероятность того, что за месяц откажут два замка.

Решение. Воспользуемся формулой Пуассона. В нашем случае $n = 10000$, $m = 2$, $p = 0{,}0002$, $\lambda = 10000 \cdot 0{,}0002 = 2$. Тогда:

$$P_{10000}(2) = \frac{2^2}{2!} \cdot e^{-2} \approx 0{,}27.$$

Ответ: 0,27.

Локальная теорема Лапласа. Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(m)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится ровно m раз, приближенно выражается формулой:

$$P_n(m) = \frac{1}{\sqrt{npq}}\varphi(x), \text{ где } x = \frac{m - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$ называется функцией Гаусса. $\varphi(x)$ является четной функцией, т.е. $\varphi(-x) = \varphi(x)$. Значения функции $\varphi(x)$ приведены в таблице приложения 1.

Интегральная теорема Лапласа. Если вероятность появления события A в каждом из n независимых испытаний равна одной и той же постоянной p $(0 < p < 1)$, то вероятность $P_n(m_1 \le m \le m_2)$ того, что во всех этих испытаниях событие A появится не менее m_1 раз и не более m_2 раз, приближенно выражается формулой:

$$P_n(m_1 \le m \le m_2) = \Phi(x_2) - \Phi(x_1), \text{ где } x_1 = \frac{m_1 - np}{\sqrt{npq}},\ x_2 = \frac{m_2 - np}{\sqrt{npq}}.$$

$\Phi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \displaystyle\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt$ называется функцией Лапласа. $\Phi(x)$ является нечетной функцией, т.е. $\Phi(-x) = -\Phi(x)$. Значения функции $\Phi(x)$ приведены в таблице приложения 2.

Задания для аудиторной работы

33. Монету бросают 5 раз. Найти вероятность того, что «герб» выпадет: а) 2 раза; б) менее двух раз; в) не менее трех раз.

Ответ. а) 0,31; б) 0,19; в) 0,5.

34. Станок изготавливает за смену 10000 деталей. Вероятность изготовления бракованной детали $p = 0{,}0001$. Найти вероятность того, что за смену будет изготовлено бракованных деталей: а) три; б) от четырех до шести; в) хотя бы одна.

Ответ. а) 0,06; б) 0,02; в) 0,63.

35. Завод-изготовитель отправил на базу 12000 доброкачественных изделий. Число изделий, поврежденных при транспортировке, составляет в среднем 0,05%. Найти вероятность того, что на базу поступит: а) не более трех поврежденных изделий; б) хотя бы два поврежденных.

Ответ. а) 0,15; б) 0,98.

36. Вероятность отказа каждого прибора при испытании равна 0,2. Приборы испытываются независимо друг от друга. Найти вероятность отказа 10 приборов при испытании 80.

Ответ. 0,027.

37. Вероятность появления события A в каждом из 100 независимых испытаний постоянна и равна $p = 0{,}8$. Найти вероятность того, что событие A появится: а) ровно 80 раз; б) не менее 75 и не более 90 раз; в) хотя бы один раз.

Ответ. а) 0,10 б) 0,89.

38. Какова вероятность того, что из 2450 ламп, освещающих улицу, к концу года будет гореть от 1500 до 1600 ламп? Считать, что каждая лампа будет гореть в течение года с вероятностью 0,64.

Ответ. 0,91.

Задания для индивидуальной работы

39. Игральную кость подбрасывают 10 раз. Найти вероятность того, что «шестерка» выпадет: а) два раза; б) не более восьми раз; в) хотя бы один раз.

Ответ. а) 0,291; б) 0,9999992; в) 0,838.

40. Подбрасывается 5 симметричных монет. Найти вероятность того, что: а) выпало ровно 2 герба; б) выпало более одного герба.

Ответ. а) 0,3125; б) 0,8125.

41. Вероятность изготовления нестандартной детали равна 0,004. Найти вероятность того, что среди 1000 деталей окажется 5 нестандартных.

Ответ. 0,1563

42. Посеяли 1000 семян. Вероятность не прорасти для каждого семени равна 0,002. Найти вероятность того, что: а) не прорастет 10 семян; б) все семена прорастут.

Ответ. а) $3{,}8 \cdot 10^{-5}$; б) 0,135.

43. Вероятность появления события в каждом из 100 испытаний постоянна и равна p=0,8. Найти вероятность того, что событие появится: а) не менее 75 раз и не более 90 раз; б) не менее 75 раз; в) не более 74 раз.

Ответ. а) 0,8882; б) 0,8944; в) 0,1056.

44. Вероятность рождения девочки равна 0,485. Найти вероятность того, что из 600 родившихся детей девочек: а) будет 300; б) будет больше, чем мальчиков.

Ответ. а) 0,025; б) 0,206.

Случайная величина. Закон распределения. Интегральная и дифференциальная функции распределения. Числовые характеристики случайных величин

Случайной величиной (*СВ*) называется величина, которая в результате опыта может принять то или иное возможное значение, заранее неизвестное и зависящее от случая. Различают дискретные и непрерывные случайные величины.

Случайная величина называется *дискретной* (ДСВ), если она принимает отдельные, изолированные друг от друга, значения, которые можно заранее перечислить.

Случайная величина называется *непрерывной* (НСВ), если ее значения непрерывно заполняют некоторый промежуток.

Законом распределения вероятностей (рядом распределения) ДСВ называется последовательность возможных значений случайной величины и соответствующих им вероятностей:

X	x_1	x_2	…	x_n
p	p_1	p_2	…	p_n

Причем должно выполняться условие нормировки: $\sum_{k=1}^{n} p_k = 1$.

Функцией распределения СВ называется функция действительной переменной x, которая каждому действительному числу x ставит в соответствие вероятность события $X < x$, т.е. $F(x) = P(X < x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Математическим ожиданием ДСВ называется сумма произведений всех возможных значений случайной величины на вероятности этих значений:

$$M(X) = \sum_{k=1}^{n} x_k \cdot p_k .$$

Дисперсией СВ называется математическое ожидание квадрата отклонения случайной величины от ее математического ожидания:

$$D(X) = M(X - M(X))^2.$$

На практике, для нахождения дисперсии, чаще пользуются формулой:

$$D(X) = M(X^2) - M^2(X). \qquad (1)$$

Для ДСВ формула (1) имеет вид:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} x_k^2 \cdot p_k - M^2(X).$$

Средним квадратичным отклонением СВ называется корень квадратный из ее дисперсии:

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)}.$$

Пример 15. Монета подбрасывается 5 раз. Построить функцию распределения СВ X – числа выпадений герба. Найти математическое ожидание и среднее квадратичное отклонение СВ X.

Решение. Составим закон распределения случайной величины X – числа выпадений герба.

СВ X может принимать значения: 0, 1, 2, 3, 4, 5. Для нахождения вероятностей появления этих значений воспользуемся формулой Бернулли $P_n^m = C_n^m p^m q^{n-m}$. Вероятность выпадения герба в одном испытании $p = \dfrac{1}{2}$, тогда $q = 1 - \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$.

$$P(X=0) = P_5(0) = C_5^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32} = 0{,}03125;$$

$$P(X=1) = P_5(1) = C_5^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{5}{32} = 0{,}15625;$$

$$P(X=2) = P_5(2) = C_5^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{10}{32} = 0{,}3125;$$

$$P(X=3) = P_5(3) = C_5^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{10}{32} = 0{,}3125;$$

$$P(X=4) = P_5(4) = C_5^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{5}{32} = 0{,}15625;$$

$$P(X=5) = P_5(5) = C_5^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^0 = \frac{1}{32} = 0{,}03125.$$

Закон распределения случайной величины имеет вид

X	0	1	2	3	4	5
p	0,03125	0,15625	0,3125	0,3125	0,15625	0,03125

Контроль: 0,03125+0,15625+0,3125+0,3125+0,15625+0,03125=1.

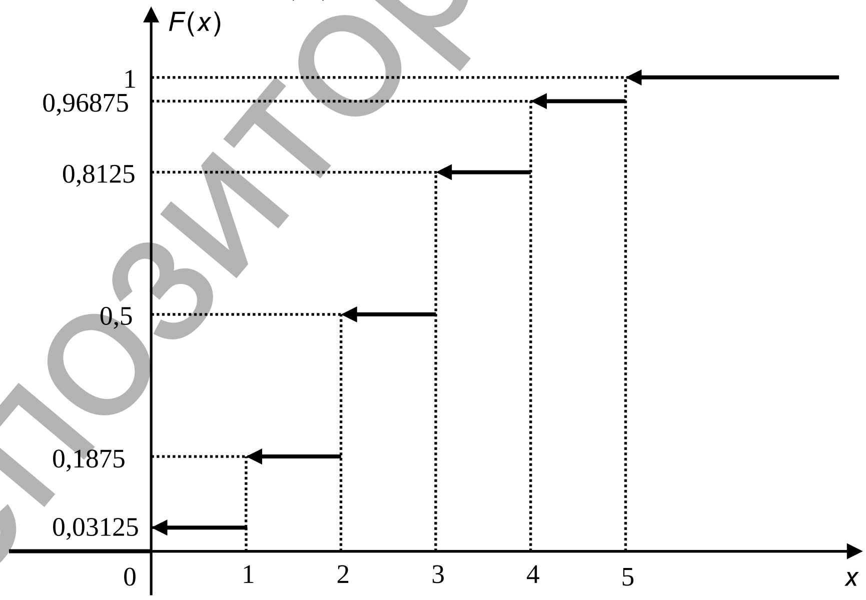
Функцию распределения вероятностей СВ X получим следующим образом:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}03125, & 0<x\le 1,\\ 0{,}03125+0{,}15625, & 1<x\le 2,\\ 0{,}03125+0{,}15625+0{,}3125, & 2<x\le 3,\\ 0{,}03125+0{,}15625+0{,}3125+0{,}3125, & 3<x\le 4,\\ 0{,}03125+0{,}15625+0{,}3125+0{,}3125+0{,}15625, & 4<x\le 5,\\ 0{,}03125+0{,}15625+0{,}3125+0{,}3125+0{,}15625+0{,}03125, & x>5,\end{cases}$$

т.е. $F(x)$ имеет вид:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ 0{,}03125, & 0<x\le 1,\\ 0{,}1875, & 1<x\le 2,\\ 0{,}5, & 2<x\le 3,\\ 0{,}8125, & 3<x\le 4,\\ 0{,}96875, & 4<x\le 5,\\ 1, & x>5.\end{cases}$$

Строим график функции $F(x)$.



Найдем математическое ожидание, дисперсию и среднее квадратичное отклонение СВ X:

$$M(X)=0\cdot 0{,}03125+1\cdot 0{,}15625+2\cdot 0{,}31257+3\cdot 0{,}3125+4\cdot 0{,}15625+$$
$$+5\cdot 0{,}03125=2{,}5;$$

$$D(X)=0^2\cdot 0{,}03125+1^2\cdot 0{,}15625+2^2\cdot 0{,}31257+3^2\cdot 0{,}3125+4^2\cdot 0{,}15625+$$
$$+5^2\cdot 0{,}03125-(2{,}5)^2=1{,}25;$$

$\sigma(X)=\sqrt{1{,}25}\approx 0{,}12.$

Ответ: $M(X)=2{,}5,\ \sigma(X)\approx 0{,}12.$

Для НСВ вводится понятие функции плотности распределения вероятности (плотности вероятности).

Производная функции распределения вероятности называется *плотностью вероятности*:

$$f(x)=F'(x).$$

Плотность вероятности может обозначаться как $p(x)$.

Причем, функция плотности вероятностей должна удовлетворять условию нормировки: $\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx=1,\ f(x)\geq 0.$

Функция распределения вероятности выражается через плотность вероятности в виде интеграла:

$$F(x)=\int\limits_{-\infty}^{x} f(t)dt.$$

Вероятность попадания СВ в интервал $(a;b)$ равна приращению функции распределения вероятностей на этом интервале:

$$P(a<X<b)=F(b)-F(a) \text{ или } P(a<X<b)=\int\limits_{a}^{b} f(x)dx.$$

Числовые характеристики НСВ вычисляются по следующим формулам:

$$M(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx;$$

$$D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(x-M(X)\right)^2\cdot f(x)dx \quad \text{или} \quad D(X)=\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-M^2(X),$$

где $f(x)$ – плотность вероятности.

Пример 16. *СВ X задана* функцией распределения

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ x^2, & 0<x\leq 1;\\ 1, & x>1.\end{cases}$$

Найти числовые характеристики *СВ X*.

Решение. Найдем плотность распределения *СВ X*:

$$f(x)=F'(x)=\begin{cases}(0)', & x\leq 0;\\ \left(x^2\right)', & 0<x\leq 1;\\ (1)', & x>1.\end{cases}=\begin{cases}0, & x\leq 0;\\ 2x, & 0<x\leq 1;\\ 0, & x>1.\end{cases}$$

Вычисляем числовые характеристики:

$$M(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x\cdot f(x)dx=\int_0^1 x\cdot 2xdx=2\int_0^1 x^2dx=\frac{2}{3}x^3\Big|_0^1=\frac{2}{3}-0=\frac{2}{3};$$

$$D(X)=\int_{-\infty}^{+\infty} x^2\cdot f(x)dx-M^2(X)=\int_0^1 x^2\cdot 2xdx-\left(\frac{2}{3}\right)^2=2\int_0^1 x^3dx-\frac{4}{9}=$$

$$=2\cdot\frac{x^4}{4}\Big|_0^1-\frac{4}{9}=\frac{1}{2}-0-\frac{4}{9}=\frac{1}{18};$$

$$\sigma(X)=\sqrt{D(X)}=\sqrt{\frac{1}{18}}\approx 0{,}24.$$

Ответ: $M(X)=\frac{2}{3}$; $D(X)=\frac{1}{18}$; $\sigma(X)\approx 0{,}24$.

Задания для аудиторной работы

45. Дан закон распределения случайной величины СВ X:

X	–5	2	3	4
p	0,4	0,3	0,1	0,2

Построить функцию распределения СВ X. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X.

Ответ. $M(X)=-0{,}3$; $D(X)=15{,}21$; $\sigma(X)=3{,}9$.

46. В партии из 6 изделий 4 стандартных. Наудачу отбирают 3 изделия. Составить закон распределения СВ X – числа стандартных изделий среди выбранных. Найти математическое ожидание и дисперсию СВ X.

Ответ. $M(X)=2$; $D(X)=0{,}4$; $\sigma(X)=0{,}63$.

47. Стрелок два раза стреляет по мишени. Вероятность попадания при одном выстреле равна 0,7. Случайная величина X – число попаданий в мишень. Составить закон распределения СВ X. Найти ее числовые характеристики.

Ответ. $M(X)=1{,}4$; $D(X)=0{,}42$; $\sigma(X)=0{,}65$.

48. СВ X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \dfrac{x}{4}, & 0<x\le 4;\\ 1, & x>4.\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения вероятностей $f(x)$; б) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X;

в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$; г) найти вероятность попадания СВ X в интервал $(3;5)$.

Ответ. б) $M(X)=2$; $D(X)=1{,}33$; $\sigma(X)=1{,}15$; г) $P(3<X<5)=0{,}25$.

49. Задана плотность распределения вероятностей СВ X:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0,\\ \dfrac{2x}{9}, & 0<x\le 3,\\ 0, & x>3.\end{cases}$$

Найти $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$, вероятности $P(X<1{,}5)$, $P(0\le X\le 2)$.

Ответ. $M(X)=2$; $D(X)=0{,}5$; $\sigma(X)=0{,}71$;
$P(X<1{,}5)=0{,}25$; $P(2\le X\le 4)=0{,}56$.

Задания для индивидуальной работы

50. ДСВ задана законом распределения:

X	–3	–1	0	2	4
p	0,1	0,2	0,3	0,3	0,1

Найти: а) функцию распределения $F(x)$ и построить ее график; б) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X.

Ответ. $M(X)=0{,}5$; $D(X)=3{,}65$; $\sigma(X)=1{,}91$.

51. Три стрелка, ведущие огонь по цели, сделали по одному выстрелу. Вероятности их попадания в цель соответственно равны 0,5; 0,6; 0,8. Построить ряд распределения и функцию распределения СВ X – числа попаданий в цель.

52. В урне 4 белых и 3 черных шара. Из нее наудачу извлекли три шара. Построить ряд и многоугольник распределения ДСВ X – числа извлеченных белых шаров. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X.

Ответ. $M(X)=1{,}71$; $D(X)=0{,}48$; $\sigma(X)=0{,}69$.

53. Баскетболист делает три штрафных броска. Вероятность попадания при каждом броске равна 0,7. Построить ряд и функцию распределения СВ X – числа попадания в корзину. Найти математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X.

Ответ. $M(X)=2{,}1$; $D(X)=0{,}63$; $\sigma(X)=0{,}79$.

54. Плотность вероятности СВ X задана формулой:

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{10-2x}{9}, & x\in[2;\,5];\\ 0, & x\notin[2;\,5].\end{cases}$$

Найти числовые характеристики СВ X: математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение и вероятность попадания СВ X в интервал $(0;3)$.

Ответ. $M(X)=3$; $D(X)=0,5$; $\sigma(X)=0,71$; $P(0<X<3)=0,56$.

55. СВ X задана функцией распределения вероятностей:

$$F(x)=\begin{cases}0, & x\le 2;\\ x-2, & 2<x\le 3;\\ 1, & x>3.\end{cases}$$

Найти: а) плотность распределения вероятностей $f(x)$; б) математическое ожидание, дисперсию, среднеквадратическое отклонение СВ X; в) построить графики функций $F(x)$ и $f(x)$; г) найти вероятность попадания СВ X в интервал (2,5; 4).

Ответ. $M(X)=2,5$; $D(X)=0,08$; $\sigma(X)=0,29$; $P(2,5<X<4)=0,5$.

Классические распределения непрерывных случайных величин

Непрерывная случайная величина называется *равномерно распределенной* на отрезке $[a;b]$, если ее плотность вероятности имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{b-a}, & x\in[a,\, b];\\ 0, & x\notin[a,\, b].\end{cases}$$

Математическое ожидание и дисперсия равномерно распределеной случайной величины определяются выражениями:

$$M(X)=\frac{a+b}{2};\quad D(X)=\frac{(b-a)^2}{12}.$$

Распределение непрерывной случайной величины называется *показательным* (экспоненциальным), если плотность вероятности этой величины описывается функцией:

$$f(x)=\begin{cases}0, & x\le 0;\\ \lambda e^{-\lambda x}, & x>0,\end{cases}\quad где\, \lambda>0.$$

Математическое ожидание, дисперсия и среднее квадратическое отклонение определяются формулами:

$$M(X)=\frac{1}{\lambda},\; D(X)=\frac{1}{\lambda^2},\; \sigma(X)=\frac{1}{\lambda}.$$

Вероятность попадания СВ X в интервал $(\alpha;\beta)$ находится по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Случайная величина распределена по *нормальному* закону, если ее функция плотности распределения вероятностей имеет вид

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}},$$

где $M(X)=a$; $D(X)=\sigma^2$; $\sigma(X)=\sigma$.

Вероятность попадания нормально распределенной СВ X в интервал $(\alpha;\beta)$ находится по формуле:

$$P(\alpha<X<\beta)=\Phi\left(\frac{\beta-a}{\sigma}\right)-\Phi\left(\frac{\alpha-a}{\sigma}\right),$$

где $\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-\frac{t^2}{2}}dt$ – функция Лапласа, значения функции $\Phi(x)$ определяются по таблице приложения 2.

Задания для аудиторной работы

56. Плотность вероятности НСВ *X* имеет вид

$$f(x)=\begin{cases}0{,}25a, & если\ \ x\in[0;4];\\ 0, & если\ \ x\notin[0;4];\end{cases}.$$

Найти: а) значение параметра *a*; б) $M(X)$, $D(X)$, $\sigma(X)$; в) $P\{X\in[0;\,1{,}1]\}$.

Ответ. а) a=1; б) $M(X)$=2; $D(X)$=4/3; $\sigma(X)=2\sqrt{3}/3$;
в) $P\{X\in[0;\,1{,}1]\}$=0,275.

57. Некто ожидает телефонный звонок между 19.00 и 20.00. Время ожидания звонка есть НСВ *X*, имеющая равномерное распределение на отрезке [19; 20]. Найти вероятность того, что звонок поступит в промежутке от 19 часов 22 минут до 19 часов 46 минут.

Ответ. 0,4.

58. Время *T* выхода из строя радиостанции подчинена показательному закону распределения с плотностью $f(t)=\begin{cases}0{,}2e^{-0{,}2t}, & если\ \ t\ge 0;\\ 0, & если\ \ t<0;\end{cases}$. Найти: а) функцию распределения $F(t)$; б) математическое ожидание и дисперсию СВ *T*; в) вероятность того, что радиостанция сохранит работоспособность от 1 до 5 час. работы.

Ответ. M(X)=5; *D(X)*=25; *P(1<X<5)*=0,451

59. Радиоаппаратура за 1000 часов работы выходит из строя в среднем один раз. Определить вероятность выхода из строя радиоаппаратуры за 200 часов работы, если срок безотказной работы – случайная величина, распределенная по показательному закону.

Ответ. 0,1813.

60. Имеется случайная величина, распределенная по нормальному закону, математическое ожидание которой равно 20, среднее квадратичное отклонение равно 3. Найти симметричный относительно математического ожидания интервал, в который с вероятностью 0,9972 попадает случайная величина.

Ответ. (11; 29)

61. Математическое ожидание нормально распределенной СВ X равно $a = 3$ и среднеквадратическое отклонение $\sigma = 2$. Записать плотность вероятности СВ X и построить ее график. Найти интервал наиболее вероятных значений. Найти вероятность того, что СВ X примет значение из интервала $(-2;4)$.

Ответ. б) (–3; 9); в) 0,6853.

62. Случайные ошибки измерения детали подчинены нормальному закону с параметром $\sigma = 20$ мм. Найти вероятность того, что измерение детали произведено с ошибкой, не превосходящей по модулю 25 мм.

Ответ. 0,79.

63. Срок безотказной работы телевизора представляет собой нормально распределенную СВ X с параметрами $a=12$, $\sigma = 3$. Найти вероятность того, что телевизор проработает а) не менее 15 лет; б) от 6 до 9 лет; в) от 9 до 15 лет.

Ответ. а) 0,41; б) 0,46; в) 0,59.

Задания для индивидуальной работы

64. СВ X равномерно распределена на отрезке [4; 7]. Найти $f(x)$; $M(X)$; $\sigma(X)$; $P\{X \in (6;\ 6{,}81)\}$.

Ответ. $M(X)$=5,5; $\sigma(X) = 0{,}866$; $P(6<X<6{,}81)$=0,27.

65. СВ X, распределенная равномерно, имеет следующие числовые характеристики $M(X) = 2$, $D(X) = 3$. Найти $F(x)$.

66. СВ X, которая равна длительности работы элемента, имеет плотность распределения $f(t) = \begin{cases} 0{,}03e^{-0{,}03t}, & \text{если } t \geq 0; \\ 0, & \text{если } t < 0; \end{cases}$. Найти среднее время работы элемента; вероятность того, что элемент проработает не менее 400 часов.

Ответ. $333\frac{1}{3}$; 0,30.

67. Определить время работы радиолампы с вероятностью 0,8 (вероятность безотказной работы радиолампы), если среднее время ее работы равно 700 часов.

Ответ. 156 часов.

68. Рост взрослых мужчин является СВ X, распределенной по нормальному закону с математическим ожиданием $a = 175$ и среднеквадратическим отклонением $\sigma = 10$. Найти плотность вероятности этой СВ; вероятность того, что ни один из трех наудачу выбранных мужчин не будет иметь рост менее 180 см.

Ответ. 0,029.

69. Математическое ожидание нормально распределенной СВ X равно $M(X) = 5$ и дисперсия $D(X) = 9$. а) Записать плотность вероятности СВ X и построить ее график. б) Найти вероятность того, что СВ X примет значение из интервала (–4; 8).

Ответ. б) 0,83995

Математическая статистика

Совокупность всех возможных объектов данного вида, над которыми проводятся наблюдения, или совокупность всех возможных наблюдений, проводимых в одинаковых условиях над некоторой случайной величиной, называется *генеральной совокупностью*.

Отобранные из генеральной совокупности объекты называются *выборочной совокупностью* или *выборкой*. Число N элементов генеральной совокупности и число n элементов выборки называют *объемами генеральной* и *выборочной совокупности* ($N >> n$).

Расположение выборочных наблюдений значений случайной величины в порядке неубывания называется *ранжированием*. Значение случайной величины, соответствующее отдельной группе сгруппированного ряда наблюдаемых данных, называется *вариантой*.

Численность отдельной группы сгруппированного ряда наблюдаемых данных называется *частотой варианты*.

Дискретным вариационным рядом распределения называется ранжированная совокупность вариант x_i с соответствующими им частотами или относительными частотами.

Интервальным вариационным рядом называется упорядоченная последовательность интервалов варьирования случайной величины с соответствующими частотами или относительными частотами попаданий в каждый из них значений случайной величины.

Выборочной (эмпирической) функцией распределения называется функция $F^*(x)$, задающая для каждого значения x относительную частоту события $X < x$. Следовательно, по определению

$$F^*(x) = \frac{n_x}{n},$$

где n – объем выборки, n_x – число выборочных значений величины X, меньших x.

Пример 17. В супермаркете проводились наблюдения над числом X покупателей, обратившихся в кассу за один час. Наблюдения проводились в течение 30 часов (15 дней в период с 9 до 10 и с 10 до 11 часов) и дали следующие результаты:

70, 75, 100, 120, 75, 60, 100, 120, 70, 60, 65, 100, 65, 100, 70, 75, 60, 100, 100, 120, 70, 75, 70, 120, 65, 70, 75, 70, 100, 100.

Число X является дискретной случайной величиной, а полученные данные представляют собой выборку из $n = 30$ наблюдений. Требуется составить ряд распределения частот и найти эмпирическую функцию распределения.

Решение. Составим ранжированный ряд:

60, 60, 60, 65, 65, 65, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 70, 75, 75, 75, 75, 75, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 100, 120, 120, 120, 120.

Получено 6 групп, то есть шесть различных значений случайной величины (шесть вариант). Для каждой группы подсчитаем частоту значений варианты и соответствующую относительную частоту. Результаты сведем в таблицу, которая и будет представлять вариационный ряд.

Номер группы	k	1	2	3	4	5	6
Число обращений покупателей в кассу	x_k	60	65	70	75	100	120
Частота	n_k	3	3	7	5	8	4
Относительная частота	$w_k = \frac{n_k}{n}$	$3/30$	$3/30$	$7/30$	$5/30$	$8/30$	$4/30$

Геометрическое изображение статистического распределения выборки дается с помощью полигона или гистограммы.

Если вариационный ряд дискретной случайной величины представить в виде ломаной линии, соединяющей на плоскости точки с координатами $(x_k; n_k)$, то такой график называют *полигоном* или *многоугольником распределения*.

Интервальный вариационный ряд графически изображают с помощью *гистограммы*. Гистограммой частот (относительных частот) называют ступенчатую фигуру, состоящую из прямоугольников, основаниями которых служат частичные интервалы длиной h, а высоты равны n_k/h (n_k/nh) – плотность частоты (относительной частоты). Оптимальная длина интервалов распределения выборки определяется формулой Стерджеса:

$$h = \frac{x_{\max} - x_{\min}}{1 + 3{,}322 \cdot \lg n}.$$

Составим эмпирическую функцию распределения. Объем выборки по условию примера $n = 30$. Наименьшая варианта равна 60, значит, при

$x \le 60$ $n_x = 0$. Тогда $F^*(x) = \dfrac{0}{30} = 0$ при $x \le 60$. Если $60 < x \le 65$, то неравенство $X < x$ выполняется для варианты $x_1 = 60$, которая встречается 3 раза, поэтому $n_x = 3$ и $F^*(x) = \dfrac{3}{30}$. Если $65 < x \le 70$, то неравенство $X < x$ выполняется для вариант $x_1 = 60$ и $x_2 = 65$, которые встречаются по 3 раза, поэтому $n_x = 3 + 3 = 6$ и $F^*(x) = \dfrac{6}{30}$ и т.д. В результате эмпирическая функция распределения будет иметь вид:

$$F^*(x) = \begin{cases} 0, & x \le 60; \\ 3/30, & 60 < x \le 65; \\ \dfrac{3+3}{30} = 6/30, & 65 < x \le 70; \\ \dfrac{3+3+7}{30} = 13/30, & 70 < x \le 75; \\ \dfrac{3+3+7+5}{30} = 18/30, & 75 < x \le 100; \\ \dfrac{3+3+7+5+8}{30} = 26/30, & 100 < x \le 120; \\ \dfrac{3+3+7+5+8+4}{30} = 1, & x > 120. \end{cases}$$

Оценки параметров генеральной совокупности, полученные на основании выборки, называются *статистическими*. Если статистическая оценка характеризуется одним числом, то ее называют *точечной*. К числу таких оценок относятся выборочная средняя и выборочная дисперсия.

Выборочная средняя определяется как среднее арифметическое полученных по выборке значений:

$$\overline{x_в} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k x_k ,$$

где x_k – варианта выборки, n_k – частота варианты, n – объем выборки.

Выборочная дисперсия представляет собой среднее арифметическое квадратов отклонений вариант от их выборочной средней:

$$D_в = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k \left(x_k - \overline{x}\right)^2 = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m} n_k x_k{}^2 - \left(\overline{x}\right)^2 = \overline{x^2} - \left(\overline{x}\right)^2.$$

Величину s^2 называют *несмещенной* или *«исправленной» выборочной дисперсией* и вычисляют по формуле:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в .$$

Пример 18. Найти несмещенную оценку дисперсии случайной величины X на основании данного распределения выборки:

x_k	2	7	9	10
n_k	8	14	10	18

Решение. Находим выборочную среднюю:

$$\overline{x} = \frac{8 \cdot 2 + 14 \cdot 7 + 10 \cdot 9 + 18 \cdot 10}{8 + 14 + 10 + 18} = 7{,}68;$$

Далее находим выборочную дисперсию:

$$D_в(X) = \frac{8 \cdot 2^2 + 14 \cdot 7^2 + 10 \cdot 9^2 + 18 \cdot 10^2}{8 + 14 + 10 + 18} - (7{,}68)^2 = 7{,}58.$$

Находим несмещенную оценку дисперсии:

$$s^2 = \frac{n}{n-1} D_в(X) = \frac{50}{49} \cdot 7{,}58 = 7{,}73.$$

Ответ: $s^2 = 7{,}73$.

Проверка статистических гипотез. Критерий согласия Пирсона

При решении практических задач модель закона распределения в общем случае заранее неизвестна, поэтому возникает необходимость выбора модели закона распределения, согласующейся с результатами выборочных наблюдений.

Пусть $x_1, x_2, ..., x_n$ – выборка наблюдений СВ X с неизвестной непрерывной функцией распределения $F(x)$. Проверяется гипотеза H_0, утверждающая, что СВ X распределена по закону, имеющему функцию распределения $F(x)$, равную функции $F_0(x)$, то есть проверяется нулевая (основная) гипотеза $H_0: F(x) = F_0(x)$.

Критерии, с помощью которых проверяется нулевая гипотеза о неизвестном распределении, называются *критериями согласия.* Рассмотрим критерий согласия Пирсона.

Схема проверки нулевой гипотезы: $H_0 : F(x) = F_0(x)$.

1. По выборке $x_1, x_2, \ldots, x_n$ строят вариационный ряд; он может быть как дискретным, так и интервальным.

2. По данным предыдущих исследований или по предварительным данным делают предположение (выдвигают гипотезу) о модели закона распределения СВ X.

3. По выборочным данным проводят оценку параметров выбранной модели закона распределения. Пусть закон распределения имеет r параметров (для нормального распределения *r=2;* для показательного распределения *r=1*).

4. Подставляя выборочные оценки параметров распределения, находят теоретические значения вероятностей $P_k = P(X = x_k)$, $k = \overline{1,m}$:

– для нормального распределения:

$$P_k = P(a_{k-1} < x < a_k) = \Phi\left(\frac{a_k - \overline{x}}{s}\right) - \Phi\left(\frac{a_{k-1} - \overline{x}}{s}\right);$$

– для показательного распределения:

$$P_k = P(a_{k-1} < x < a_k) = e^{-\lambda \cdot a_{k-1}} - e^{-\lambda \cdot a_k}, \lambda = \frac{1}{\overline{x}}.$$

5. Рассчитывают теоретические (выравнивающие) частоты $n_k' = P_k \cdot n$, где n – объем выборки.

6. Составляют выборочную статистику $\chi^2_{набл} = \sum\limits_{k=1}^{m} \frac{\left(n_k - n_k'\right)^2}{n_k'}$.

7. По таблице «Критические точки распределения «хи-квадрат» (приложение 4) находим $\chi^2_{крит}(\alpha; m - r - 1)$, где α - уровень значимости, m – число пар значений в таблице распределения частот. Если $\chi^2_{набл} < \chi^2_{крит}$, то нет оснований отвергать гипотезу H_0, эмпирические и теоретические частоты различаются незначимо. Если $\chi^2_{набл} > \chi^2_{крит}$, то гипотеза H_0 отклоняется и принимается альтернативная(конкурирующая) гипотеза о том, что выбранная модель закона распределения не подтверждается выборочными данными, при этом допускается ошибка, вероятность которой равна α.

Задания для аудиторной работы

70. По данным наблюдений получена выборка: 1; 2; 3; 5; 5; 4; 2; 1; 1; 2; 3; 5; 5; 6; 6; 2; 3; 2; 5; 1. а) Найти статистическое распределение выборки. б) Построить полигон относительных частот. в) Составить эмпирическую функцию распределения и построить ее график. г) Найти числовые характеристики выборки: $\overline{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$.

Ответ. $\overline{x}_в = 3{,}2$; $D_в = 2{,}99$; $\sigma_в = 1{,}72$.

71. В результате проверки предприятий области по величине выработки на одного рабочего получено интервальное распределение выборки:

Выработка на одного рабочего в %	80-90	90-100	100-110	110-120	120-130
Число предприятий	2	6	15	46	29

Построить гистограмму частот. Найти $\overline{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$, s^2, s.

Ответ. $\overline{x}_в = 113{,}8$; $D_в = 184{,}56$; $\sigma_в = 13{,}58$; $s^2 = 186{,}42$; $s = 13{,}65$.

72. Из генеральной совокупности извлечена выборка объема $n = 25$.

x_k	4	6	7	8	9	10	11
n_k	1	6	3	3	7	3	2

Найти несмещенные оценки генеральной средней и генеральной дисперсии.

Ответ. $\overline{x}_в = 8$; $s^2 = 3{,}33$.

73. При измерении 100 обработанных деталей изучалось отклонение от заданного размера. После предварительной обработки результатов была получена таблица:

n_k	12	14	22	40	20	16	10
n'_k	9	13	28	34	18	22	12

При уровне значимости 0,01 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_i и теоретическими частотами n'_i, которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X.

Ответ. Расхождение случайно.

Задания для индивидуальной работы

74. Найти эмпирическую функцию распределения вариационного ряда:

x_k	1	3	7	9	12
n_k	2	10	4	24	10

Вычислить $\overline{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$. Найти несмещенные оценки генеральной дисперсии и генерального среднеквадратического отклонения.

75. В городе А для определения сроков гарантийного обслуживания проведено исследование величины среднего пробега автомобилей, находящихся в эксплуатации в течение двух лет с момента продажи автомобиля магазином. Получен следующий результат (тыс. км):
3,0; 25,0; 18,6; 12,1; 10,6; 18,0; 17,3; 29,1; 20,0; 18,3; 21,5; 26,7; 12,2; 14,4; 7,3; 9,1; 2,9; 5,4; 40,1; 16,8; 11,2; 9,9; 25,3; 4,2; 29,6.

Составить интервальный вариационный ряд. Построить гистограмму относительных частот. Найти $\overline{x}_в$, $D_в$, $\sigma_в$.

76. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 установить, случайно или значимо расхождение между эмпирическими частотами n_k и теоретическими частотами n_k', которые вычислены исходя из гипотезы о нормальном распределении генеральной совокупности X:

n_k	5	10	20	8	7
n_k'	6	14	18	7	5

77. Используя критерий Пирсона, при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о виде распределения генеральной совокупности, выдвинув ее для заданного распределения частот:

Интервалы	0-4	4-8	8-12	12-16	16-20
Частоты	5	10	20	18	7

78. В результате испытания 200 элементов на длительность работы получено эмпирическое распределение, приведенное в таблице (в первом столбце указаны интервалы времени в часах, во втором столбце – частоты, то есть количество элементов, проработавших время в пределах соответствующего интервала).

$(x_k; x_{k+1})$	(0; 5)	(5; 10)	(10; 15)	(15; 20)	(20; 25)	(25; 30)
n_k	133	45	15	4	2	1

Требуется, при уровне значимости 0,05, проверить гипотезу о том, что время работы элементов распределено по показательному закону.

Линейная корреляционная зависимость. Прямые регрессии

Рассмотрим две СВ *Х* и *У*. Если каждому значению *Х* соответствует определенное значение *У*, то *Х* и *У* связаны *функциональной зависимостью*.

Статистической называют зависимость, при которой изменение одной из величин влечет изменение закона распределения другой.

Статистическая зависимость между *Х* и *У* называется *корреляционной*, если с изменением одной из них изменяется среднее значение другой.

Условной средней $\overline{y}_x$ называют среднее арифметическое значение *У*, соответствующее значению *Х*=*х*.

Если каждому значению *х* соответствует одно значение условной средней $\overline{y}_x$, то условная средняя есть функция от переменной *х*: $\overline{y}_x = f(x)$. Это уравнение называют уравнением регрессии *У* на *Х*.

Аналогично определяется условная средняя $\overline{x}_y$ и уравнение регрессии *Х* на *У*: $\overline{x}_y = \varphi(y)$.

Корреляционные зависимости могут быть установлены только при обработке большого количества наблюдений. Доказано, что для СВ *Х* и *У*, распределенных по нормальному закону, корреляционная зависимость между ними является линейной. Уравнение прямой регрессии *У* на *Х* имеет вид: $\overline{y}_x = ax + b$, а уравнение прямой регрессии *Х* на *У* – $\overline{x}_y = cy + d$.

При большом числе наблюдений одно и то же значение *х* может встретиться m_x раз, значение *у* – m_y раз, одна и та же пара *(х; у)* может наблюдаться m_{xy} раз. Поэтому данные наблюдений группируются, подсчитываются частоты m_x, m_y, m_{xy} и записываются в так называемую корреляционную таблицу.

Числовые характеристики СВ *Х* и *У* определяются по формулам:

$$\bar{x} = \frac{\sum x m_x}{n};\ D_x = \frac{\sum x^2 m_x}{n} - \bar{x}^2;\ \sigma_x = \sqrt{D_x};$$

$$\bar{y} = \frac{\sum y m_y}{n};\ D_y = \frac{\sum y^2 m_y}{n} - \bar{y}^2;\ \sigma_y = \sqrt{D_y}.$$

Выборочным коэффициентом корреляции называется число $r_в$, которое измеряет силу (тесноту) линейной связи между СВ *Х* и *У* и определяется равенством:

$$r_в = \frac{\sum xy m_{xy} - n\,\bar{x}\,\bar{y}}{n\,\sigma_x \sigma_y},$$

где *х*, *у* – варианты признаков *Х* и *У*; m_{xy} – частота пары вариант *(х; у)*; *n* – объем выборки; σ_x, σ_y – выборочные среднеквадратические отклонения; $\bar{x}, \bar{y}$ – выборочные средние.

Если величины *Х* и *У* независимы, то коэффициент корреляции *r=0*; если $r = \pm 1$, то *Х* и *У* связаны линейной функциональной зависимостью.

Выборочный коэффициент корреляции $r_в$ является оценкой коэффициента корреляции *r* генеральной совокупности и поэтому также служит для измерения линейной связи между величинами *Х* и *У*. Допустим, что выборочный коэффициент корреляции, найденный по выборке, оказался отличным от нуля. Так как выборка отобрана случайно, то отсюда нельзя заключить, что коэффициент корреляции генеральной совокупности также отличен от нуля. Возникает необходимость проверить гипотезу о значимости (существенности) выборочного коэффициента корреляции, или, что то же, о равенстве нулю коэффициента корреляции генеральной совокупности). Если гипотеза о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции будет отвергнута, то выборочный коэффициент корреляции значим, а величины *Х* и *У* коррелированны; если гипотеза принята, то выборочный коэффициент корреляции незначим, а величины *Х* и *У* некоррелированны.

Для того, чтобы при заданном уровне значимости α проверить нулевую гипотезу $H_0: r = 0$ о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1: r \neq 0$, надо вычислить наблюдаемое значение критерия

$$t_{набл} = \frac{|r_в|}{\sigma_r},$$

где среднеквадратическая ошибка коэффициента корреляции вычисляется по формуле: $\sigma_r = \sqrt{\dfrac{1-r_в^2}{n-2}}$.

По таблице критических точек распределения Стьюдента, при заданном уровне значимости и числу степеней свободы $k=n-2$ найти критическую точку $t_{крит}(\alpha, k)$.

Если $t_{набл} < t_{крит}$ – нет оснований отвергать нулевую гипотезу, т.е. выборочный коэффициент корреляции незначим, а величины *X* и *У* некоррелированны.

Если $t_{набл} > t_{крит}$ – нулевую гипотезу отвергают, а значит, выборочный коэффициент корреляции значим, величины *X* и *У* коррелированны.

Если величины *X* и *У* коррелированны, то можно найти уравнения прямых регрессии.

Уравнение прямой регрессии *Y* на *X* имеет вид: $\overline{y}_x - \overline{y} = r_B \dfrac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x})$.

Уравнение прямой регрессии *X* на *Y* имеет вид: $\overline{x}_y - \overline{x} = r_B \dfrac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y})$.

Прямые регрессии *Y* на *X* и *X* на *Y* различны, но они проходят через точку $\left(\overline{x};\overline{y}\right)$. Чем меньше угол между ними, тем теснее линейная зависимость между *X* и *Y*.

Пример 19. В результате группировки данных статистического наблюдения над признаками *X* и *У* получена корреляционная таблица.

X \ *У*	10	15	20	25	30
2	3	4			
5		10	9	3	
8		6	40	5	
11			4	8	3
14				2	3

С целью изучения линейной связи между этими признаками требуется:

1) найти их числовые показатели $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x, σ_y;
2) найти выборочный коэффициент корреляции $r_в$ и оценить его надежность с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$;
3) найти уравнения прямых регрессий *Y* на *X* и *X* на *Y*;
4) изобразить в системе координат графики $\overline{y}_x$ и $\overline{x}_y$.

Решение. Предварительные вычисления вносим в "расширенную" таблицу:

$X \backslash Y$	10	15	20	25	30	m_x	xm_x	x^2m_x
2	3	4				7	14	28
5		10	9	3		22	110	550
8		6	40	5		51	408	3264
11			4	8	3	15	165	1815
14				2	3	5	70	980
m_y	3	20	53	18	6	$n=100$	767	6637
ym_y	30	300	1060	450	180	2020		
y^2m_y	300	4500	21200	11250	5400	42650		

Сначала подсчитываются частоты составляющих признаков m_x и m_y суммированием совместных частот по строкам и столбцам соответственно.

Числа в столбцах m_x, xm_x, x^2m_x, стоящие под двойной чертой, и строках m_y, ym_y, y^2m_y, стоящие справа от двойной черты, получены суммированием и равны n, $\sum xm_x$, $\sum x^2m_x$ и соответственно n, $\sum ym_y$, $\sum y^2m_y$. Находим числовые характеристики составляющих признаков X и $У$:

$$\bar{x} = \frac{\sum xm_x}{n} = \frac{767}{100} = 7{,}67;$$

$$D_x = \frac{\sum x^2m_x}{n} - \bar{x}^2 = \frac{6637}{100} - 7{,}67^2 \approx 7{,}54; \quad \sigma_x = \sqrt{7{,}54} \approx 2{,}75;$$

$$\bar{y} = \frac{\sum ym_y}{n} = \frac{2020}{100} = 20{,}2;$$

$$D_y = \frac{\sum y^2m_y}{n} - \bar{y}^2 = \frac{42650}{100} - 20{,}2^2 \approx 16{,}46, \quad \sigma_y = \sqrt{16{,}46} \approx 4{,}06.$$

Далее,

$$\sum xym_{xy} = 2(10\cdot 3 + 15\cdot 4) + 5(15\cdot 10 + 20\cdot 9 + 25\cdot 3) +$$
$$+8(15\cdot 6 + 20\cdot 40 + 25\cdot 5) + 11(20\cdot 4 + 25\cdot 8 + 30\cdot 3) +$$
$$+14(25\cdot 2 + 30\cdot 3) = 16355.$$

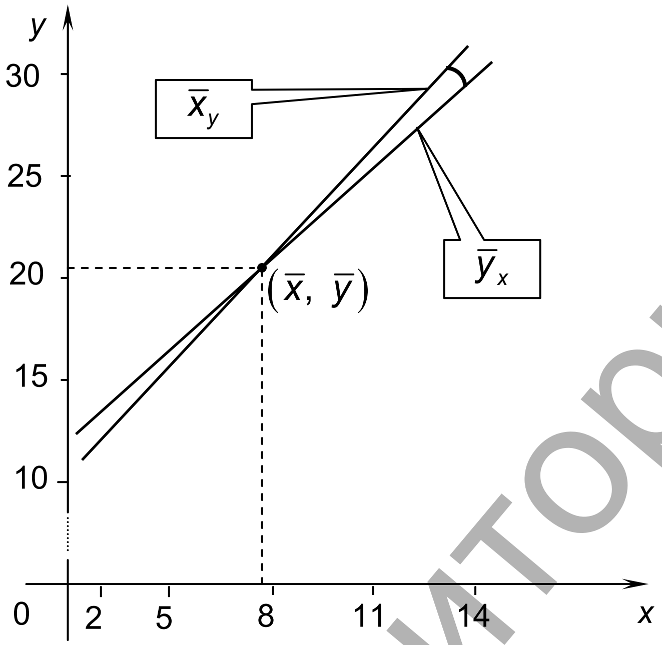
Находим выборочный коэффициент корреляции по формуле:

$$r_в = \frac{\sum xym_{xy} - n\cdot\bar{x}\cdot\bar{y}}{n\sigma_x\sigma_y} = \frac{16355 - 100\cdot 7{,}67\cdot 20{,}2}{100\cdot 2{,}75\cdot 4{,}06} = 0{,}772.$$

Близость $r_в$ к единице говорит о достаточно тесной связи признаков X и $У$. Для оценки существенности этой связи на уровне значимости α, равном 0,01 вычислим статистику $t_{набл.} = \frac{|\,r_в\,|}{\sigma_r}$, где среднеквадратическая ошибка коэффициента корреляции равна

$$\sigma_r = \sqrt{\frac{1-r^2}{n-2}} = \sqrt{\frac{1-0{,}772^2}{100-2}} = 0{,}064.$$

Отсюда $t_{набл.} = \frac{0{,}772}{0{,}064} = 12{,}06$. Далее, принимая уровень значимости $\alpha = 0{,}01$, при числе степеней свободы $\nu = n-2 = 100-2 = 98$ по таблице распределения Стьюдента (приложение 5) находим $t_{крит.} = 2{,}626$.



Так как $t_{набл.} > t_{крит.}$, то с 99%-ой уверенностью можно говорить о существенности тесной связи между признаками Y и X.

Теперь находим уравнения прямых регрессии по формулам:

$$\overline{y}_x - \overline{y} = r_в \cdot \frac{\sigma_y}{\sigma_x}(x - \overline{x});$$

$$\overline{x}_y - \overline{x} = r_в \cdot \frac{\sigma_x}{\sigma_y}(y - \overline{y}),$$

$$\overline{y}_x - 20{,}2 = 0{,}772 \cdot \frac{4{,}06}{2{,}75}(x - 7{,}67),$$

$$\overline{x}_y - 7{,}67 = 0{,}772 \cdot \frac{2{,}75}{4{,}06}(y - 20{,}2).$$

После преобразований получим $\overline{y}_x = 1{,}14x + 11{,}46$, $\quad \overline{x}_y = 0{,}52y - 10{,}56$.

Построим графики полученных прямых на одном чертеже. Чем ближе к нулю острый угол между ними (отмечен дугой), тем теснее связь между признаками. Если же этот угол близок к 90º, то это говорит о слабой связи или об отсутствии таковой вообще.

Задания для аудиторной работы

79. Для данных таблицы значений двух СВ X и Y, найти числовые характеристики СВ X и Y $\overline{x}$, $\overline{y}$, σ_x, σ_y; выборочный коэффициент корреляции $r_в$ и оценить его надежность с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$; найти уравнения прямых регрессий Y на X и X на Y и изобразить в системе координат их графики.

Y \ X	5	9	13	17	21	25
3						3
8				6	7	2
13		4	10	25		
18		8	7	4		
23		5	2			
28	3	1	1	2		

80. По выборке объема *n=100*, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности *(X, Y)*, найден выборочный коэффициент корреляции $r_в = 0{,}2$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1:\ r \neq 0$.

Задания для индивидуальной работы

81. Для данных таблицы значений двух СВ X и Y, найти числовые характеристики СВ X и Y $\bar{x}$, $\bar{y}$, σ_x, σ_y; выборочный коэффициент корреляции $r_в$ и оценить его надежность с уровнем значимости $\alpha = 0{,}01$; найти уравнения прямых регрессий *Y* на *X* и *X* на *Y* и изобразить в системе координат их графики.

Y \ X	6	8	10	12	14	16
10				5	7	2
15			2	8	6	
20			8	21	10	
25	5	2	6			
30	3	5				

82. По выборке объема *n=120*, извлеченной из двумерной нормальной генеральной совокупности *(X, Y)*, найден выборочный коэффициент корреляции $r_в = 0{,}4$. Требуется при уровне значимости 0,05 проверить гипотезу о равенстве нулю генерального коэффициента корреляции при конкурирующей гипотезе $H_1:\ r \neq 0$.

Статистические таблицы

Приложение 1. Таблица значений функции $\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$.

x	Сотые доли									
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0,0	0,3989	3989	3989	3988	3986	3984	3982	3980	3977	3973
0,1	3970	3965	3961	3956	3951	3945	3939	3932	3925	3918
0,2	3910	3902	3894	3885	3876	3867	3857	3847	3836	3825
0,3	3814	3802	3790	3778	3765	3752	3739	3726	3712	3697
0,4	3683	3668	3653	3637	3621	3605	3589	3572	3555	3538
0,5	3521	3503	3485	3467	3448	3429	3410	3391	3372	3352
0,6	3332	3312	3292	3271	3251	3230	3209	3187	3166	3144
0,7	3123	3101	3079	3056	3034	3011	2989	2966	2943	2920
0,8	2897	2874	2850	2827	2803	2780	2756	2732	2709	2685
0,9	2661	2637	2613	2589	2565	2541	2516	2492	2468	2444
1,0	0,2420	2396	2371	2347	2323	2299	2275	2251	2227	2203
1,1	2179	2155	2331	2107	2083	2059	2036	2012	1989	1965
1,2	1942	1919	1895	1872	1849	1826	1804	1781	1758	1736
1,3	1714	1691	1669	1647	1626	1604	1582	1561	1539	1518
1,4	1497	1476	1456	1435	1415	1394	1374	1354	1334	1315
1,5	1295	1276	1257	1238	1219	1200	1182	1163	1145	1127
1,6	1109	1092	1074	1057	1040	1023	1006	0989	0973	0957
1,7	0940	0925	0909	0893	0878	0863	0848	0833	0818	0804
1,8	0790	0775	0761	0748	0734	0721	0707	0694	0681	0669
1,9	0656	0644	0632	0620	0608	0596	0584	0573	0562	0551
2,0	0,0540	0529	0519	0508	0498	0488	0478	0468	0459	0449
2,1	0440	0431	0422	0413	0404	0396	0387	0379	0371	0363
2,2	0355	0347	0339	0332	0325	0317	0310	0303	0297	0290
2,3	0283	0277	0270	0264	0258	0252	0246	0241	0235	0229
2,4	0224	0219	0213	0208	0203	0198	0194	0189	0184	0180
2,5	0175	0171	0167	0163	0158	0154	0151	0147	0143	0139
2,6	0136	0132	0129	0126	0122	0119	0116	0113	0110	0107
2,7	0104	0101	0099	0096	0093	0091	0088	0086	0084	0081
2,8	0079	0077	0075	0073	0071	0069	0067	0065	0063	0061
2,9	0060	0058	0056	0055	0053	0051	0050	0048	0047	0046
3,0	0,0044	0043	0042	0040	0039	0038	0037	0036	0035	0034
3,1	0033	0032	0031	0030	0029	0028	0027	0026	0025	0025
3,2	0024	0023	0022	0022	0021	0020	0020	0019	0018	0018
3,3	0017	0017	0016	0016	0015	0015	0014	0014	0013	0013
3,4	0012	0012	0012	0011	0011	0010	0010	0010	0009	0009
3,5	0009	0008	0008	0008	0008	0007	0007	0007	0007	0006
3,6	0006	0006	0006	0005	0005	0005	0005	0005	0005	0004
3,7	0004	0004	0004	0004	0004	0004	0003	0003	0003	0003
3,8	0003	0003	0003	0003	0003	0002	0002	0002	0002	0002
3,9	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0002	0001	0001	0001

При $x \ge 4$ функция принимает значения $\varphi(x)=0$.

Приложение 2. Таблица значений функции Лапласа

$$\Phi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^x e^{-t^2}\,dt.$$

x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)	x	Φ(x)
0,00	0,0000	0,45	0,1736	0,90	0,3159	1,35	0,4115	1,80	0,4641	2,50	0,4938
0,01	0,0040	0,46	0,1772	0,91	0,3186	1,36	0,4131	1,81	0,4649	2,52	0,4941
0,02	0,0080	0,47	0,1808	0,92	0,3212	1,37	0,4147	1,82	0,4656	2,54	0,4945
0,03	0,0120	0,48	0,1844	0,93	0,3238	1,38	0,4162	1,83	0,4664	2,56	0,4948
0,04	0,0160	0,49	0,1879	0,94	0,3264	1,39	0,4177	1,84	0,4671	2,58	0,4951
0,05	0,0199	0,50	0,1915	0,95	0,3289	1,40	0,4192	1,85	0,4678	2,60	0,4953
0,06	0,0239	0,51	0,1950	0,96	0,3315	1,41	0,4207	1,86	0,4686	2,62	0,4956
0,07	0,0279	0,52	0,1985	0,97	0,3340	1,42	0,4222	1,87	0,4693	2,64	0,4959
0,08	0,0319	0,53	0,2019	0,98	0,3365	1,43	0,4236	1,88	0,4699	2,66	0,4961
0,09	0,0359	0,54	0,2054	0,99	0,3389	1,44	0,4251	1,89	0,4706	2,68	0,4963
0,10	0,0398	0,55	0,2088	1,00	0,3413	1,45	0,4265	1,90	0,4713	2,70	0,4965
0,11	0,0438	0,56	0,2123	1,01	0,3438	1,46	0,4279	1,91	0,4719	2,72	0,4967
0,12	0,0478	0,57	0,2157	1,02	0,3461	1,47	0,4292	1,92	0,4726	2,74	0,4969
0,13	0,0517	0,58	0,2190	1,03	0,3485	1,48	0,4306	1,93	0,4732	2,76	0,4971
0,14	0,0557	0,59	0,2224	1,04	0,3508	1,49	0,4319	1,94	0,4738	2,78	0,4973
0,15	0,0596	0,60	0,2257	1,05	0,3531	1,50	0,4332	1,95	0,4744	2,80	0,4974
0,16	0,0636	0,61	0,2291	1,06	0,3554	1,51	0,4345	1,96	0,4750	2,82	0,4976
0,17	0,0675	0,62	0,2324	1,07	0,3577	1,52	0,4357	1,97	0,4756	2,84	0,4977
0,18	0,0714	0,63	0,2357	1,08	0,3599	1,53	0,4370	1,98	0,4761	2,86	0,4979
0,19	0,0753	0,64	0,2389	1,09	0,3621	1,54	0,4382	1,99	0,4767	2,88	0,4980
0,20	0,0793	0,65	0,2422	1,10	0,3643	1,55	0,4394	2,00	0,4772	2,90	0,4981
0,21	0,0832	0,66	0,2454	1,11	0,3665	1,56	0,4406	2,02	0,4783	2,92	0,4982
0,22	0,0871	0,67	0,2486	1,12	0,3686	1,57	0,4418	2,04	0,4793	2,94	0,4984
0,23	0,0910	0,68	0,2517	1,13	0,3708	1,58	0,4429	2,06	0,4803	2,96	0,4985
0,24	0,0948	0,69	0,2549	1,14	0,3729	1,59	0,4441	2,08	0,4812	2,98	0,4986
0,25	0,0987	0,70	0,2580	1,15	0,3749	1,60	0,4452	2,10	0,4821	3,00	0,4987
0,26	0,1026	0,71	0,2611	1,16	0,3770	1,61	0,4463	2,12	0,4830	3,20	0,4993
0,27	0,1064	0,72	0,2642	1,17	0,3790	1,62	0,4474	2,14	0,4838	3,40	0,4997
0,28	0,1103	0,73	0,2673	1,18	0,3810	1,63	0,4484	2,16	0,4846	3,60	0,4998
0,29	0,1141	0,74	0,2703	1,19	0,3830	1,64	0,4495	2,18	0,4854	3,80	0,4999
0,30	0,1179	0,75	0,2734	1,20	0,3849	1,65	0,4515	2,20	0,4861	4,00	0,4999
0,31	0,1217	0,76	0,2764	1,21	0,3869	1,66	0,4505	2,22	0,4868	4,50	0,5000
0,32	0,1255	0,77	0,2794	1,22	0,3883	1,67	0,4525	2,24	0,4875	5,00	0,5000
0,33	0,1293	0,78	0,2823	1,23	0,3907	1,68	0,4535	2,26	0,4881		
0,34	0,1331	0,79	0,2852	1,24	0,3925	1,69	0,4545	2,28	0,4887	↓	↓
0,35	0,1368	0,80	0,2881	1,25	0,3944	1,70	0,4554	2,30	0,4893	$+\infty$	0,5
0,36	0,1406	0,81	0,2910	1,26	0,3962	1,71	0,4564	2,32	0,4898		
0,37	0,1443	0,82	0,2939	1,27	0,3980	1,72	0,4573	2,34	0,4904		
0,38	0,1480	0,83	0,2967	1,28	0,3997	1,73	0,4582	2,36	0,4909		
0,39	0,1517	0,84	0,2995	1,29	0,4015	1,74	0,4591	2,38	0,4913		
0,40	0,1554	0,85	0,3023	1,30	0,4032	1,75	0,4599	2,40	0,4918		
0,41	0,1591	0,86	0,3051	1,31	0,4049	1,76	0,4608	2,42	0,4922		
0,42	0,1628	0,87	0,3078	1,32	0,4066	1,77	0,4616	2,44	0,4927		
0,43	0,1654	0,88	0,3106	1,33	0,4082	1,78	0,4625	2,46	0,4931		
0,44	0,1700	0,89	0,3133	1,34	0,4099	1,79	0,4633	2,48	0,4934		

Приложение 3. Таблица значений $t_\gamma = t(\gamma, n)$.

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	2,78	4,60	8,61	20	2,093	2,861	3,883
6	2,57	4,03	6,86	25	2,064	2,797	3,745
7	2,45	3,71	5,96	30	2,045	2,756	3,659
8	2,37	3,50	5,41	35	2,032	2,720	3,600
9	2,31	3,36	5,04	40	2,023	2,708	3,558
10	2,26	3,25	4,78	45	2,016	2,692	3,527
11	2,23	3,17	4,59	50	2,009	2,679	3,502
12	2,20	3,11	4,44	60	2,001	2,662	3,464
13	2,18	3,06	4,32	70	1,996	2,649	3,439
14	2,16	3,01	4,22	80	1,991	2,640	3,418
15	2,15	2,98	4,14	90	1,987	2,633	3,403
16	2,13	2,95	4,07	100	1,984	2,627	3,392
17	2,12	2,92	4,02	120	1,980	2,617	3,374
18	2,11	2,90	3,97	∞	1,960	2,576	3,291
19	2,10	2,88	3,92				

Приложение 4. Таблица значений $q_\gamma = q(\gamma, n)$.

$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999	$n \backslash \gamma$	0,95	0,99	0,999
5	1,37	2,67	5,64	20	0,37	0,58	0,88
6	1,09	2,01	3,88	25	0,32	0,49	0,73
7	0,92	1,62	2,98	30	0,28	0,43	0,63
8	0,80	1,38	2,42	35	0,26	0,38	0,56
9	0,71	1,20	2,06	40	0,24	0,35	0,50
10	0,65	1,08	1,80	45	0,22	0,32	0,46
11	0,59	0,98	1,60	50	0,21	0,30	0,43
12	0,55	0,90	1,45	60	0,188	0,269	0,38
13	0,52	0,83	1,33	70	0,174	0,245	0,34
14	0,48	0,78	1,23	80	0,161	0,226	0,31
15	0,46	0,73	1,15	90	0,151	0,211	0,29
16	0,44	0,70	1,07	100	0,143	0,198	0,27
17	0,42	0,66	1,01	1500	0,115	0,160	0,211
18	0,40	0,63	0,96	200	0,099	0,136	0,185
19	0,39	0,60	0,92	250	0,089	0,120	0,162

Приложение 5. Критические точки распределения χ^2.

v *- число степеней свободы,* α *- уровень значимости.*

v \ α	0,20	0,10	0,05	0,02	0,01	0,001
1	1,642	2,706	3,841	5,412	6,635	10,827
2	3,219	4,605	5,991	7,824	9,210	13,815
3	4,642	6,251	7,815	9,837	11,345	16,266
4	5,989	7,779	9,488	11,668	13,237	18,467
5	7,289	9,236	11,070	13,388	15,086	20,515
6	8,558	10,645	12,592	15,033	16,812	22,457
7	9,803	12,017	14,067	16,622	18,475	24,322
8	11,030	13,362	15,507	18,168	20,090	26,125
9	12,242	14,684	16,919	19,679	21,666	27,877
10	13,442	15,987	18,307	21,161	23,209	29,588
11	14,631	17,275	19,675	22,618	24,795	31,264
12	15,812	18,549	21,026	24,054	24,217	32,909
13	16,985	19,812	22,362	25,472	27,688	34,528
14	18,151	21,064	23,685	26,783	29,141	36,123
15	19,311	22,307	24,996	28,259	30,578	37,697
16	20,465	23,542	26,296	29,633	32,000	39,252
17	21,615	24,769	27,587	30,995	32,409	40,790
18	22,760	25,989	28,869	32,346	34,805	42,312
19	23,900	27,204	30,144	33,678	36,191	43,820
20	25,038	28,412	31,410	35,020	37,566	45,315
21	26,171	29,615	32,671	36,343	38,932	46,797
22	27,301	30,813	33,924	37,659	40,289	48,268
23	28,429	32,007	35,172	38,968	41,638	49,728
24	29,553	33,196	36,415	40,270	42,980	51,179
25	30,675	34,382	37,652	41,566	42,314	52,620
26	31,795	35,563	38,885	42,856	45,642	54,052
27	32,912	36,741	40,113	44,140	46,963	55,476
28	34,027	37,916	41,337	45,419	48,278	56,893
29	35,139	39,087	42,557	46,693	49,588	58,302
30	36,250	40,256	43,773	47,962	50,892	59,703

Приложение 6. Значения $P_k = \dfrac{a^k}{k!}e^{-a}$ (Распределение Пуассона).

k \ a	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
0	0,9048	0,8187	0,7408	0,6703	0,6065	0,5488	0,4966	0,4493	0,4066
1	0,0905	0,1638	0,2222	0,2681	0,3033	0,3293	0,3476	0,3595	0,3659
2	0,0045	0,0164	0,0333	0,0536	0,0758	0,0988	0,1217	0,1438	0,1647
3	0,0002	0,0019	0,0033	0,0072	0,0126	0,0198	0,0284	0,0383	0,0494
4		0,0001	0,0002	0,0007	0,0016	0,0030	0,0050	0,0077	0,0111
5				0,0001	0,0002	0,0004	0,0007	0,0012	0,0020
6							0,0001	0,0002	0,0003

k \ a	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0,3679	0,1353	0,0498	0,0183	0,0067	0,0025	0,0009	0,0003	0,0001	0,0000
1	0,3679	0,2707	0,1494	0,0733	0,0337	0,0149	0,0064	0,0027	0,0011	0,0005
2	0,1839	0,2707	0,2240	0,1465	0,0842	0,0446	0,0223	0,0107	0,0050	0,0023
3	0,0613	0,1804	0,2240	0,1954	0,1404	0,0892	0,0521	0,0286	0,0150	0,0076
4	0,0153	0,0902	0,1680	0,1954	0,1755	0,1339	0,0912	0,0572	0,0337	0,0189
5	0,0031	0,0361	0,1008	0,1563	0,1755	0,1606	0,1277	0,0916	0,0607	0,0378
6	0,0005	0,0120	0,0504	0,1042	0,1462	0,1606	0,1490	0,1221	0,0911	0,0631
7	0,0001	0,0037	0,0216	0,0595	0,1044	0,1377	0,1490	0,1396	0,1171	0,0901
8		0,0009	0,0081	0,0298	0,0653	0,1033	0,1304	0,1396	0,1318	0,1126
9		0,0002	0,0027	0,0132	0,0363	0,0688	0,1014	0,1241	0,1318	0,1251
10			0,0008	0,0053	0,0181	0,0413	0,0710	0,0993	0,1186	0,1251
11			0,0002	0,0019	0,0082	0,0225	0,0452	0,0722	0,0970	0,1137
12			0,0001	0,0006	0,0034	0,0126	0,0263	0,0481	0,0728	0,0948
13				0,0002	0,0013	0,0052	0,0142	0,0296	0,0504	0,0729
14				0,0001	0,0005	0,0022	0,0071	0,0169	0,0324	0,0521
15					0,0002	0,0009	0,0033	0,0090	0,0194	0,0347
16						0,0003	0,0014	0,0045	0,0109	0,0217
17						0,0001	0,0006	0,0021	0,0058	0,0128
18							0,0002	0,0009	0,0029	0,0071
19							0,0001	0,0004	0,0014	0,0037
20								0,0002	0,0006	0,0019
21								0,0001	0,0003	0,0009
22									0,0001	0,0004
23										0,0002
24										0,0001

Рекомендуемая литература

1 Белько, И.В. Теория вероятностей и математическая статистика. Примеры и задачи: учеб. пособие / И.В. Белько, Г.П. Свирид; под ред. К.К. Кузьмича – Мн.:Новое знание, 2002. –250 с.

2 Высшая математика для экономистов: учеб.: в 3-х т. Т.2: теория вероятностей в экономике. Методы оптимизации и экономические модели / И.В. Гайшун. – Мн., 2000. – 623с.

3 Гмурман, В.Е. Руководство к решению задач по теории вероятностей и математической статистике: учеб.пос. – 11-е изд.,перераб. –М.,2008. – 404с. и издания предыдущих лет.

4 Гмурман, В.Е. Теория вероятностей и математическая статистика: учеб.пос. – 12-е изд., перераб. – М.,2008. – 479с. и издания предыдущих лет.

5 Крамер, Д. Математическая обработка данных в социальных науках: современные методы: учеб. пос.: пер. с англ. – М., 2007. – 288с.

6 Кремер, Н.Ш. Теория вероятностей и математическая статистика: учебник / Н.Ш. Кремер. – 3-е изд., перераб. и доп. – Москва: ЮНИТИ-ДАНА, 2009. – 551с.

7 Письменный, Д.Т. Конспект лекций по теории вероятностей и математической статистике / Д.Т. Письменный. – М.: Айрис-пресс, 2004. – 256с.

8 Рябушко, А.П. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб.пос.: в 4-х ч. Ч.4: Операционное исчисление. Элементы теории устойчивости. Теория вероятностей. Математическая статистика/ Под общ.ред. А.П. Рябушко. – 2-е изд., испр. – Мн., 2007. – 336с. и издания предыдущих лет.

9 Сборник задач по высшей математике для экономистов: уч. пос. / Под ред. В.И. Ермакова. – 2-е изд. – М., 2008. – 575с.

10 Теория вероятностей и математическая статистика: уч. пос. / Под ред. В.И. Ермакова. – М., 2008. – 287с.

Содержание

Учебное издание

Составители: Гладкий Иван Иванович
Каримова Татьяна Ивановна
Махнист Леонид Петрович
Тузик Татьяна Александровна

ТЕОРИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКАЯ СТАТИСТИКА

Задачи и упражнения

Ответственный за выпуск: Гладкий И.И.
Редактор: Строкач Т.В.

Подписано в печать 19.04.10. Формат 60x84 1/16. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 2,79. Уч. изд. л. 3,0. Заказ № 478. Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267