МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

**Учреждение образования
«Брестский государственный технический университет»**

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы
по разделам «Функции нескольких переменных»,
«Интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения»,
«Числовые и функциональные ряды» общего курса дисциплины
«Высшая математика» для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения (сокращенной)

Брест 2010

УДК 51(075.8)

В настоящей методической разработке приведены варианты контрольных заданий по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения» и «Числовые и функциональные ряды» общего курса дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения (сокращенной). Даны методические рекомендации, полезные для успешного выполнения контрольной работы.

Составители: **Гладкий И.И.**, доцент,
Дерачиц Н.А., ассистент
Лебедь С.Ф., доцент, к.ф.-м.н.
Махнист Л.П., доцент, к.т.н.

Рецензент: **Савчук В.Ф.**, зав. кафедрой информатики и прикладной математики УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

Организационно-методические указания

В контрольную работу по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения» и «Числовые и функциональные ряды» общего курса дисциплины «Высшая математика» включено восемь заданий. В нумерации задач первое число – номер задания (задачи), второе (после точки) – номер варианта.

Контрольная работа должна выполняться студентом в соответствии со своим вариантом. **Номер варианта определяется по двум последним цифрам шифра (номера зачетной книжки студента).**

При выполнении контрольной работы условия задач нужно записывать полностью. В случае, если задача имеет общую формулировку, ее условие следует переписывать, заменяя общие данные конкретными, соответствующими номеру варианта.

Решение всех задач приводить подробно и аккуратно, давать достаточные пояснения и делать необходимые рисунки и таблицы.

В конце каждой задачи должен быть ответ.

Вопросы учебной программы

1. Понятие функции двух переменных. Частные производные функции двух переменных.
2. Производная по направлению. Градиент.
3. Локальный экстремум функции двух переменных. Необходимые и достаточные условия.
4. Метод наименьших квадратов.
5. Первообразная и неопределенный интеграл.
6. Основные свойства неопределенного интеграла. Таблица интегралов.
7. Основные методы интегрирования: замена переменной и интегрирование по частям.
8. Задача о площади криволинейной трапеции. Определенный интеграл.
9. Свойства определенного интеграла.
10. Определенный интеграл с переменным верхним пределом интегрирования. Формула Ньютона-Лейбница.
11. Замена переменной и интегрирование по частям в определенном интеграле.
12. Приложения определенного интеграла в экономике.
13. Понятие несобственных интегралов первого и второго рода.
14. Понятие двойного интеграла, его свойства. Вычисление двойного интеграла по правильным областям.
15. Дифференциальные уравнения (ДУ) первого порядка. Задача Коши. Теорема существования (формулировка).
16. ДУ с разделяющимися переменными.

17. Линейные ДУ первого порядка. Однородные ДУ первого порядка.
18. ДУ второго порядка. Задача Коши. ДУ второго порядка, допускающие понижение порядка.
19. Линейные дифференциальные уравнения (ЛДУ). Свойства решений.
20. Линейная зависимость и независимость функций. Определитель Вронского.
21. Однородные ЛДУ второго порядка. Метод Эйлера.
22. Неоднородные ЛДУ второго порядка с постоянными коэффициентами и со специальной правой частью.
23. Числовой ряд и его сумма. Свойства сходящихся числовых рядов. Необходимый признак сходимости числового ряда.
24. Признаки сходимости числовых рядов с неотрицательными членами.
25. Знакопеременные ряды. Условная и абсолютная сходимость.
26. Знакочередующиеся ряды. Признак Лейбница.
27. Степенные ряды. Теорема Абеля. Интервал сходимости.
28. Свойства степенных рядов.
29. Разложение в степенные ряды функций e^x, $\sin x$, $\cos x$, $(1+x)^m$.
30. Приложения степенных рядов.

Задания контрольной работы

Задание 1

Задана функция $z = f(x, y)$. Требуется:

а) найти частные производные функции z;

б) найти градиент функции z в точке $M_0(x_0; y_0)$;

в) вычислить производную функции z в точке M_0 в направлении вектора $\vec{a}$;

г) вычислить эластичность функции z по x и по y в точке M_0;

д) исследовать на экстремум.

1.1	$z = x^2 + xy + y^2 - 3x - 6$;	$M_0(1; 2)$;	$\vec{a} = (3; 4)$.
1.2	$z = 2x^3 - xy^2 + 5x^2 + y^2$;	$M_0(1; -1)$;	$\vec{a} = (-3; 4)$.
1.3	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;	$M_0(2; 3)$;	$\vec{a} = (4; -3)$.
1.4	$z = -x^2 - xy - y^2 + 3x + 6$;	$M_0(2; -2)$;	$\vec{a} = (-4; -3)$.
1.5	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;	$M_0(-1; 2)$;	$\vec{a} = (6; -8)$.
1.6	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;	$M_0(3; -2)$;	$\vec{a} = (-8; 6)$.
1.7	$z = x^2 + xy + y^2 - 6x - 9y$;	$M_0(-2; 2)$;	$\vec{a} = (-4; 3)$.
1.8	$z = x^2 + 4xy + y^2 - 2y - 1$;	$M_0(-1; -1)$;	$\vec{a} = (6; -8)$.

1.9 $z = 6xy - 9x^2 - 9y^2 + 4x + 4y + 3$; $M_0(-1;-1)$; $\vec{a} = (12;5)$.

1.10 $z = 2x^3 - y^2 + 2xy + 2$; $M_0(-1;-1)$; $\vec{a} = (6;-8)$.

1.11 $z = y^2 + 4xy + x^2 - 2x + 1$; $M_0(-2;2)$; $\vec{a} = (12;5)$.

1.12 $z = x^2 - xy + y^2 - 4x + 2$; $M_0(1;-4)$; $\vec{a} = (-5;12)$.

1.13 $z = x^3 - 6xy - y^2 + 4$; $M_0(2;-2)$; $\vec{a} = (-6;8)$.

1.14 $z = y^3 + 3yx^2 - 15y - 12x + 5$; $M_0(-1;-1)$; $\vec{a} = (12;5)$.

1.15 $z = y^3 + 3yx^2 - 15y - 12x + 5$; $M_0(3;-2)$; $\vec{a} = (8;-6)$.

1.16 $z = 3x^2 - x^3 + 3y^2 + 4y$; $M_0(2;4)$; $\vec{a} = (8;15)$.

1.17 $z = x^2 + 2x + y^2 + 4y - 6$; $M_0(4;-1)$; $\vec{a} = (-6;8)$.

1.18 $z = x^2 - 6x + y^2 + 4y + 2$; $M_0(2;-1)$; $\vec{a} = (-8;15)$.

1.19 $z = 1 + 15x - 2x^2 - xy - 2y^2$; $M_0(2;3)$; $\vec{a} = (-8;-15)$.

1.20 $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 3$; $M_0(2;-3)$; $\vec{a} = (-15;8)$.

1.21 $z = 2xy - 3x^2 - 2y^2 + 10$; $M_0(-2;-3)$; $\vec{a} = (-8;-6)$.

1.22 $z = x^2 - xy + y^2 + 3x - 2y + 2$; $M_0(-1;-1)$; $\vec{a} = (-15;-8)$.

1.23 $z = x^2 - 2xy + 4y^2 + 10$; $M_0(-2;-2)$; $\vec{a} = (-3;-4)$.

1.24 $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 3$; $M_0(2;3)$; $\vec{a} = (6;-8)$.

1.25 $z = 3y^2 - y^3 + 3x^2 + 4x$; $M_0(2;3)$; $\vec{a} = (-3;-4)$.

1.26 $z = x^2 + xy + y^2 - 4x - 5y + 3$; $M_0(3;-2)$; $\vec{a} = (-12;5)$.

1.27 $z = y^3 - 6xy - x^2 + 5$; $M_0(1;-3)$; $\vec{a} = (-8;6)$.

1.28 $z = x^3 + 3xy^2 - 15x - 12y$; $M_0(1;-1)$; $\vec{a} = (-6;8)$.

1.29 $z = x^2 + y^2 + xy - 3y - 6x + 1$; $M_0(1;-2)$; $\vec{a} = (-4;-3)$.

1.30 $z = x^2 + y^2 + xy - 3y - 6x + 1$; $M_0(2;1)$; $\vec{a} = (8;15)$.

Задание 2

2.01-2.15 Приведены данные за определенный период по банкам категории B для сумм вклада от 50 тыс. до 500 тыс. долларов для юридических лиц. Найти зависимость вида $y = ax + b$ величины средней банковской ставки y по срочным валютным депозитам от срока вклада в месяцах x. Вычислить банковскую ставку для вкладов такого рода на срок i месяцев. На сколько в среднем увеличится процентная ставка при увеличении срока вклада на один месяц?

Срок вклада (мес.), x	1	2	3	4	5	6	9
% годовых, y	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Необходимые числовые данные приведены в таблице 1:

Таблица 1

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	i
2.01	9,56	10,94	12,00	11,74	12,14	13,14	14,17	7
2.02	9,26	10,64	11,70	11,34	11,84	12,84	13,87	8
2.03	9,82	10,63	11,98	11,85	12,36	13,47	14,39	10
2.04	9,94	11,34	12,40	12,14	12,54	13,54	14,57	11
2.05	10,56	11,93	13,02	12,70	13,12	14,14	15,18	13
2.06	8,55	9,93	11,99	10,73	11,13	12,15	13,16	12
2.07	8,61	9,81	11,97	10,76	11,25	12,30	13,41	13
2.08	9,76	10,53	11,65	11,93	12,74	13,51	14,50	11
2.09	10,46	11,83	12,92	12,61	13,02	14,18	13,78	10
2.10	9,62	10,03	11,38	11,25	11,76	12,87	13,79	8
2.11	8,85	10,23	12,29	11,03	11,43	12,45	13,46	7
2.12	10,35	11,73	12,82	12,51	12,83	13,85	14,98	11
2.13	11,05	12,44	13,52	13,23	13,54	14,76	15,63	10
2.14	9,70	10,52	11,86	11,52	12,22	13,24	14,01	8
2.15	9,62	10,82	11,96	12,70	11,50	12,22	13,02	7

2.16-2.30 Приведены данные о росте индекса Доу-Джонса и росте цены акций (долл.). Найти зависимость вида $y = ax + b$ между ростом цены акций y и ростом индекса x. Вычислить рост цены акции при росте индекса, равным x_0.

x	2,0	2,5	3,0	3,1	3,5	3,7	4,3
y (долл.)	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7

Необходимые числовые данные приведены в таблице 2:

Таблица 2

	y_1	y_2	y_3	y_4	y_5	y_6	y_7	x_0
2.16	4,4	4,5	4,6	4,6	4,7	4,8	4,9	2,6
2.17	4,3	4,2	4,4	4,5	4,6	4,8	5,0	2,7
2.18	4.5	4,6	4,7	4,8	4,7	4,9	5,1	2,8
2.19	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,6	4,8	2,9
2.20	4,7	4,8	4,9	5,0	4,9	5,1	5,2	3,2
2.21	5,5	6,6	5,6	5,6	5,8	5,9	6,0	3,3
2.22	4,5	5,1	5,2	5,4	5,3	5,2	6,2	3,4
2.23	6,3	6,6	6,8	6,7	7,0	6,9	7,1	3,6
2.24	2,3	4,4	3,4	3,2	3,6	3,7	4,2	3,8
2.25	5,2	6,3	5,3	5,2	5,6	5,7	5,9	3,9
2.26	2,4	2,6	2,7	2,8	2,9	3,0	3,4	4,0
2.27	3,7	3,8	3,9	4,0	4,1	4,6	4,8	4,1
2.28	6,0	6,3	6,5	6,1	6,6	6,8	7,3	4,2
2.29	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,7	4,9	2,1
2.30	4,8	4,9	5,0	5.1	5,2	5,4	5,7	2,3

Задание 3

Найти неопределённые интегралы.

	а)	б)	в)
3.01	$\int \frac{\cos x\,dx}{\sqrt{4-\sin^2 x}}$;	$\int (x+3)\mathrm{e}^{-x}\,dx$;	$\int \frac{(x-1)\,dx}{\sqrt{x}\left(4+\sqrt{x}\right)}$.
3.02	$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x-3}$;	$\int (2x-1)\mathrm{e}^{2x}\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(9+\sqrt{x}\right)}$.
3.03	$\int x^2\mathrm{e}^{x^3}\,dx$;	$\int (4x+2)\sin 2x\,dx$;	$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{4-x}$.
3.04	$\int \frac{x^2\,dx}{x^6-25}$;	$\int x\sin x\cos x\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(x+4\sqrt{x}+4\right)}$.
3.05	$\int \sin^3 x\cos x\,dx$;	$\int x^2\ln x\,dx$;	$\int \frac{\sqrt{x-1}\,dx}{x+3}$.
3.06	$\int \frac{\mathrm{e}^x\,dx}{4+\mathrm{e}^{2x}}$;	$\int (x+1)\cos 3x\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+2}\left(x-6\sqrt{x+2}+11\right)}$.
3.07	$\int \frac{\operatorname{arctg} x}{1+x^2}\,dx$;	$\int x\mathrm{e}^{-2x}\,dx$;	$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x\left(2-\sqrt{x}\right)}$.
3.08	$\int \frac{\sin x\,dx}{\sqrt{9-\cos^2 x}}$;	$\int (1-2x)\mathrm{e}^{3x}\,dx$;	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{x}+4}$.
3.09	$\int \frac{dx}{x\sqrt{\ln^2 x+2}}$;	$\int (4x-1)\mathrm{e}^{-3x}\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x-3}\,(x-4)}$.
3.10	$\int x\cdot\sqrt[3]{4+x^2}\,dx$;	$\int (x+2)\cos\frac{x}{2}\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\,(x+3)}$.
3.11	$\int \frac{1}{x^2}\cos\frac{1}{x}\,dx$;	$\int (1-3x)\sin\frac{x}{2}\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}\left(x-9\sqrt[3]{x}\right)}$.
3.12	$\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{1+x^2}}$;	$\int (2-x)\mathrm{e}^{-x}\,dx$;	$\int \frac{2\,dx}{\sqrt[3]{x-1}\left(x-1+36\sqrt[3]{x-1}\right)}$.
3.13	$\int \frac{\sin x\,dx}{\cos^2 x-4}$;	$\int (2-3x)\sin 2x\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(1+\sqrt[3]{x}\right)}$.
3.14	$\int \cos^4 x\sin x\,dx$;	$\int (2+3x)\mathrm{e}^{-\frac{x}{2}}\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}(x-3)}$.

	а)	б)	в)
3.15	$\int \frac{x\,dx}{\cos^2 x^2}$;	$\int (3x-4)e^{-\frac{x}{3}}\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x^2}\left(4+\sqrt[3]{x^2}\right)}$.
3.16	$\int \frac{\sin \ln x}{x}\,dx$;	$\int (x+2)\ln x\,dx$;	$\int \frac{\sqrt{x-1}\,dx}{(x-1)\left(x-2\sqrt{x-1}\right)}$.
3.17	$\int \frac{dx}{\cos^2 x\cdot\sqrt{4-tg^2 x}}$;	$\int (x+5)\sin 4x\,dx$;	$\int \frac{\left(\sqrt[4]{x}-1\right)dx}{\sqrt{x}-1}$.
3.18	$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt[3]{x^3+4}}$;	$\int (3x-1)\cos 4x\,dx$;	$\int \frac{\sqrt[3]{x}\,dx}{3\left(x+4\sqrt[3]{x}\right)}$.
3.19	$\int \frac{e^{\sqrt{x+1}}}{\sqrt{x+1}}\,dx$;	$\int (3x+4)e^{3x}\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\left(2\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}\right)}$.
3.20	$\int \frac{dx}{x\sqrt{4-\ln^2 x}}$;	$\int (3-x)\cos x\,dx$;	$\int \frac{x^2+1}{\sqrt{x-1}}\,dx$.
3.21	$\int \frac{e^x\,dx}{e^{2x}-9}$;	$\int (x+3)\sin 4x\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x}\left(\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}\right)}$.
3.22	$\int \frac{\sqrt[3]{\arcsin x+1}}{\sqrt{1-x^2}}\,dx$;	$\int x e^{x+2}\,dx$;	$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{2x+4}\left(\sqrt{2x+4}+7\right)}$.
3.23	$\int x\sin\left(1-x^2\right)dx$;	$\int x e^{2x-1}\,dx$;	$\int \frac{2x\,dx}{\sqrt{2x-1}}$.
3.24	$\int \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\,dx$;	$\int (x+5)e^{-2x}\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+2\right)}$.
3.25	$\int \frac{\sqrt{\operatorname{ctg} x}-1}{\sin^2 x}\,dx$;	$\int (4-x)\cos 5x\,dx$;	$\int \frac{x^2}{\sqrt{x+2}}\,dx$.
3.26	$\int \frac{x^2\,dx}{3x^3+4}$;	$\int (1+5x)\sin 2x\,dx$;	$\int \frac{x^3}{\sqrt{x-1}}\,dx$.
3.27	$\int \sqrt{\frac{\arcsin x}{1-x^2}}\,dx$;	$\int (7-2x)\cos\frac{x}{4}\,dx$;	$\int \frac{\sqrt{x}\,dx}{x+2}$.
3.28	$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{6-x^4}}$;	$\int x\sin(2x+3)\,dx$;	$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$.
3.29	$\int \frac{dx}{\sin^2 x\cdot\cos^2 x}$;	$\int (x+2)e^{-3x}\,dx$;	$\int \frac{dx}{(2-x)+\sqrt{1-x}}$.

	а)	б)	в)
3.30	$\int e^x \cos e^x \, dx$;	$\int (x-1)\cos(x-1)\,dx$;	$\int \frac{dx}{2\left(1+\sqrt{x+1}\right)}$.

Задание 4

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков товара, законы спроса и предложения на которые определяются функциями:

$$D: p = a - x^2, \qquad S: p = b + c\,x^2,$$

где x – количество товара, p – цена на этот товар.

Данные к задаче взять из таблицы 3.

Таблица 3

	4.01	**4.02**	**4.03**	**4.04**	**4.05**	**4.06**	**4.07**	**4.08**	**4.09**	**4.10**
a	18	35,6	49	38	100	88	22	23,3	34	32
b	6	14,8	13	32	46	13	12	17,7	10	12
c	2	0,3	3	0,5	5	2	1,5	0,4	0,5	0,25

	4.11	**4.12**	**4.13**	**4.14**	**4.15**	**4.16**	**4.17**	**4.18**	**4.19**	**4.20**
a	13,2	47	43	16	52	75	50	48	60	83
b	2,4	15	15	7	17	19	27,5	30	12	23
c	0,2	1	6	1,25	0,4	2,5	1,5	0,125	2	14

	4.21	**4.22**	**4.23**	**4.24**	**4.25**	**4.26**	**4.27**	**4.28**	**4.29**	**4.30**
a	150	78	70	66	43	19	51	52	55	70
b	40	46	15	21	13	6	27	7	10	54
c	0,1	7	1,2	4	0,2	2,25	5	4	0,25	3

Задание 5

Найти общее решение дифференциальных уравнений.

5.01 $y' + \sin x \cdot y = (2x-1)e^{\cos x}$.

5.02 $y' + \frac{2}{x}\cdot y = 3x^2 + 4x + 2$.

5.03 $x y' + y = e^x$.

5.04 $x^2 \cdot y' - 2x y = 3$.

5.05 $x y' - y = 2x \ln x$.

5.06 $x y' + y = 3x^2$.

5.07 $y' + tg\, x \cdot y = (6x^2 + 1)\cos x$.

5.08 $x y' - 2y = 2x^4$.

5.09 $\cos x \cdot y' - \sin x \cdot y = e^{-x}$.

5.10 $y' + \cos x \cdot y = \cos x$.

5.11 $x y' + 3y = 12\cdot(1+x)$.

5.12 $x y' - 2y = x^3 \cos x$.

5.13 $x \ln x \cdot y' - y = 3x^3 \ln^2 x$.

5.14 $(x+1)y' - y = e^x (x+1)^2$.

5.15 $y' - \frac{2y}{x+1} = \frac{(x+1)^2}{\cos^2 x}$.

5.16 $y' + \frac{2xy}{1+x^2} = \frac{2\sin 2x}{1+x^2}$.

5.17 $y' - ctgx \cdot y = 2x \sin x$.

5.18 $xy' + y = -2\ln x$.

5.19 $y' + 2xy = 2xe^{-x^2}$.

5.20 $(x^2+1)y' + 4xy = 3$.

5.21 $y' - 3x^2y = 3x^2e^{x^3}$.

5.22 $(x+1)y' + y = x^3 + x^2$.

5.23 $x^2y' + xy = -1$.

5.24 $y' + 2y = e^{-x}$.

5.25 $y' - 2xy = 3x\sqrt{x}\,e^{x^2}$.

5.26 $\cos x \cdot y' - \sin x \cdot y = 2x$.

5.27 $y' - tgx \cdot y = \dfrac{2}{\cos^3 x}$.

5.28 $y' - \dfrac{2}{x-2} \cdot y = 4(x-2)^3$.

5.29 $y' - \cos x \cdot y = (2x + \cos x)e^{\sin x}$.

5.30 $(x+1)^2y' + (x+1)y = 2$.

Задание 6

а) Решить задачу Коши.

б) Найти общее решение дифференциального уравнения

6.01 **а)** $y'' - 2y' + 5y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = 7$; **б)** $y'' - 4y' - 21y = 0$.

6.02 **а)** $y'' - y' - 2y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$; **б)** $y'' + 10y' + 25y = 0$.

6.03 **а)** $y'' + 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -4$; **б)** $y'' - 6y' + 10y = 0$.

6.04 **а)** $y'' + 4y' - 5y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 2$; **б)** $y'' + 4y' + 8y = 0$.

6.05 **а)** $y'' + 4y' + 4y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$; **б)** $y'' + 6y' = 0$.

6.06 **а)** $y'' - 3y' + 2y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 1$; **б)** $4y'' - 12y' + 9y = 0$.

6.07 **а)** $y'' + 9y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 3$; **б)** $y'' - 7y' + 12y = 0$.

6.08 **а)** $y'' + 2y' - 8y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = -2$; **б)** $y'' + 3y = 0$.

6.09 **а)** $y'' + 2y' + 17y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 5$; **б)** $y'' - 6y' - 7y = 0$.

6.10 **а)** $y'' - 5y' + 6y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$; **б)** $y'' - 4y' + 13y = 0$.

6.11 **а)** $y'' - 7y' + 10y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$; **б)** $y'' + 9y = 0$.

6.12 **а)** $y'' - 6y' + 10y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 1$; **б)** $y'' + 7y' + 6y = 0$.

6.13 **а)** $y'' + y' - 2y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$; **б)** $y'' + y' = 0$.

6.14 **а)** $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = -3$, $y'(0) = 2$; **б)** $y'' - 6y' + 25y = 0$.

6.15 **а)** $y'' - 3y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 3$; **б)** $y'' - 4y' + 20y = 0$.

6.16 **а)** $y'' + 10y' + 25y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -1$; **б)** $y'' + 2y = 0$.

6.17 **а)** $y'' - 2y' - 3y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$; **б)** $4y'' + 4y' + y = 0$.

6.18 **а)** $y'' + 4y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 2$; **б)** $y'' + 2y' - 15y = 0$.

6.19 **а)** $y'' + 8y' + 25y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 4$; **б)** $y'' - 11y' + 10y = 0$.

6.20 **а)** $y'' - 7y' - 8y = 0$, $y(0) = 3$, $y'(0) = 3$; **б)** $y'' + 5y = 0$.

6.21 а) $y'' - 8y' + 25y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$; б) $y'' + 7y' - 8y = 0$.

6.22 а) $y'' - 10y' + 16y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = 5$; б) $y'' - 2y' + 26y = 0$.

6.23 а) $y'' - 7y' + 6y = 0$, $y(0) = -2$, $y'(0) = 3$; б) $y'' + 2y' + 10y = 0$.

6.24 а) $y'' - 2y' + 10y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 4$; б) $y'' - 9y' + 20y = 0$.

6.25 а) $6y'' - y' - y = 0$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 1$; б) $y'' + 16y = 0$.

6.26 а) $y'' - 10y' + 9y = 0$, $y(0) = -4$, $y'(0) = 4$; б) $y'' - 2y' + 17y = 0$.

6.27 а) $y'' - 10y' + 29y = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = 0$; б) $y'' - 4y' = 0$.

6.28 а) $2y'' - 3y' + y = 0$, $y(0) = 0$, $y'(0) = -1$; б) $y'' + 2y' + 5y = 0$.

6.29 а) $y'' + y = 0$, $y(0) = 1$, $y'(0) = -2$; б) $y'' - 11y' - 12y = 0$.

6.30 а) $y'' + 3y' = 0$, $y(0) = 2$, $y'(0) = -3$; б) $4y'' - 2y' + 5y = 0$.

Задание 7

Найти общее решение дифференциального уравнения.

7.01 $y'' + 4y' - 12y = x^2 + x + 2$.

7.02 $y'' - 6y' + 9y = x^2 - 2x - 4$.

7.03 $y'' + 4y' = -x^2 + 3x + 6$.

7.04 $y'' - 2y' + 5y = x^2 - 4x - 8$.

7.05 $y'' - 5y' + 6y = x^2 + 5x + 10$.

7.06 $y'' - 4y' + 13y = -2x^2 - 6x - 12$.

7.07 $y'' - 4y = x^2 + 7x + 14$.

7.08 $y'' - 2y' + y = x^2 - 8x - 16$.

7.09 $y'' + 6y' + 9y = -x^2 + 9x + 18$.

7.10 $y'' - 2y' - 3y = x^2 - 10x + 9$.

7.11 $y'' + 2y' - 8y = x^2 + 11x - 8$.

7.12 $y'' - 5y' + 4y = -x^2 - 12x + 7$.

7.13 $y'' + y' - 6y = x^2 + 13x - 6$.

7.14 $y'' - 4y' + 3y = x^2 - 14x + 5$.

7.15 $y'' + 2y' + 10y = -2x^2 + 15x - 4$.

7.16 $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 8x + 1$.

7.17 $y'' - 4y' + 4y = -4x^2 + 7x - 2$.

7.18 $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 6x + 3$.

7.19 $y'' + 2y' + 37y = 3x^2 + 5x - 4$.

7.20 $y'' + 36y = x^2 - 4x + 5$.

7.21 $y'' + 2y' + y = 2x^2 + 3x - 6$.

7.22 $y'' - 3y' + 2y = x^2 - 2x + 7$.

7.23 $y'' - 12y' + 36y = 4x^2 - x + 8$.

7.24 $y'' - 8y' + 12y = x^2 + x + 6$.

7.25 $y'' - 4y' + 5y = -3x^2 - 2x + 5$.

7.26 $y'' + 6y' + 13y = x^2 - 3x + 2$.

7.27 $y'' - 6y' + 9y = -x^2 + 12x + 6$.

7.28 $y'' + 8y' + 25y = x^2 - 5x - 8$.

7.29 $6y'' - y' - y = -x^2 - 9x - 1$.

7.30 $y'' - 9y' + 20y = x^2 + 10x + 6$.

Задание 8

Найти интервал сходимости степенных рядов:

8.01 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+1)^n}{2^n}$.

8.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(x+6)^n}{\sqrt{n^2+1}}$.

8.02 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(x-3)^n}{5^n\cdot(n+1)}$.

8.03 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n-1}}{n(2n+3)}$.

8.04 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4^n(x+1)^n}{n}$.

8.05 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{9^n\cdot n}$.

8.06 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{n(x-1)^n}{3^n}$.

8.07 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+3)^n}{4^n\cdot n}$.

8.08 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+1)^n}{2^n(n+3)}$.

8.09 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n+1}{n+2}\right)^n\frac{(x-2)^n}{2^n}$.

8.10 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+8)^n}{n^2}$.

8.11 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(3n+2)^n(x-1)^n}{3^n\cdot n^n}$.

8.12 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{2n^2}$.

8.13 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+2)^n}{\sqrt{n+1}\cdot 2^n}$.

8.17 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+3)^n(n+2)$.

8.18 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-6)^n}{6^n\cdot n}$.

8.19 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-3)^n}{3^n\cdot n^n}$.

8.20 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}(x+1)^n}{n^2+1}$.

8.21 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n(n+1)}$.

8.22 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3^n(x+1)^n}{n\sqrt{n+2}}$.

8.23 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-1)^n}{2^n\cdot n^n}$.

8.24 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n+2)^n(x+4)^n}{(n+1)^n}$.

8.25 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x+1)^n}{\sqrt{n}\cdot 4^n}$.

8.26 $\sum_{n=1}^{\infty}(x+2)^n\cdot n$.

8.27 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x+5)^n}{(n+1)^2 2^n}$.

8.28 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(n+2)x^n}{n(n+1)}$.

8.14 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x-5)^n}{5^n}$.

8.15 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(x-4)^{n-1}}{2n-1}$.

8.29 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n(x-1)^n}{n(n+3)}$.

8.30 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{3^n(x+1)^n}{n\sqrt{n}}$.

Рекомендации для выполнения заданий

Задание 1

Задана функция $z = x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4$. Требуется:

а) найти частные производные функции z;

б) найти градиент функции z в точке $M_0 = (1;\ 2)$;

в) вычислить производную функции z в точке M_0 в направлении вектора $\vec{a} = (3;\ 4)$;

г) вычислить эластичность функции z по x и по y в точке M_0;

д) исследовать на экстремум.

Решение

а) Найдем частные производные первого и второго порядков функции z:

$$z'_x = \left(x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4\right)'_x = 2x - y - 1;$$

$$z'_y = \left(x^2 - xy + y^2 - x - 2y + 4\right)'_y = -x + 2y - 2;$$

$$z''_{xx} = \left(2x - y - 1\right)'_x = 2;$$

$$z''_{xy} = \left(2x - y - 1\right)'_y = -1;$$

$$z''_{yx} = \left(-x + 2y - 2\right)'_x = -1;$$

$$z''_{yy} = \left(-x + 2y - 2\right)'_y = 2.$$

б) Вычислим значения частных производных первого порядка в точке M_0:

$$z'_x(M_0) = (2x - y - 1)\big|_{(1;\ 2)} = 2\cdot 1 - 2 - 1 = -1;$$

$$z'_y(M_0) = (-x + 2y - 2)\big|_{(1;\ 2)} = -1 + 2\cdot 2 - 2 = 1.$$

Градиент функции $z = f(x;y)$ в точке M_0 есть вектор

$$grad\, z(M_0) = z'_x(M_0)\cdot\vec{i} + z'_y(M_0)\cdot\vec{j}.$$

Подставляя полученные значения, получаем

$$grad\, z(M_0) = -1 \cdot \vec{i} + 1 \cdot \vec{j} = (-1;\, 1).$$

в) Производная функции $z = f(x;\, y)$ в точке M_0 в направлении вектора $\vec{a}$ равна:

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{a}} = \frac{\partial z(M_0)}{\partial x} \cdot \cos\alpha + \frac{\partial z(M_0)}{\partial y} \cdot \cos\beta .$$

Найдем направляющие косинусы вектора $\vec{a}$:

$$(\cos\alpha;\, \cos\beta) = \left(\frac{a_x}{|\vec{a}|};\, \frac{a_y}{|\vec{a}|} \right) = \left(\frac{3}{\sqrt{3^2+4^2}};\, \frac{4}{\sqrt{3^2+4^2}} \right) = \left(\frac{3}{\sqrt{25}};\, \frac{4}{\sqrt{25}} \right) = \left(\frac{3}{5};\, \frac{4}{5} \right).$$

Тогда

$$\frac{\partial z(M_0)}{\partial \vec{a}} = -1 \cdot \frac{3}{5} + 1 \cdot \frac{4}{5} = \frac{1}{5} = 0{,}2 .$$

г) Вычислим эластичность функции z по x и по y в точке M_0:

$$E_{zx}(M_0) = \frac{z'_x(M_0)}{z(M_0)} \cdot x_0 ; \qquad E_{zy}(M_0) = \frac{z'_y(M_0)}{z(M_0)} \cdot y_0 .$$

Найдем значение функции z в точке M_0:

$$z(1;\, 2) = 1^2 - 1 \cdot 2 + 2^2 - 1 - 2 \cdot 2 + 4 = 2 .$$

Тогда имеем:

$$E_{zx}(1;\, 2) = \frac{-1}{2} \cdot 1 = -0{,}5 ; \qquad E_{zy}(1;\, 2) = \frac{1}{2} \cdot 2 = 1.$$

Это означает, что если переменную x увеличить на 1%, то значение функции z уменьшится на 0,5%; если же только значение y увеличить на 1%, то и значение функции z увеличится на 1%.

д) Исследуем функцию z на экстремум.

Найдем критические точки из системы:

$$\begin{cases} z'_x = 0; \\ z'_y = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x - y - 1 = 0; \\ -x + 2y - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1; \\ -x + 2(2x-1) - 2 = 0. \end{cases} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} y = 2x - 1; \\ 3x - 4 = 0. \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = \dfrac{5}{3}; \\ x = \dfrac{4}{3}. \end{cases}$$

Такая точка только одна, и ее координаты $\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3} \right)$.

Найдем значения вторых частных производных функции z в этой точке:

$$z''_{xx}\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3} \right) = 2 ; \quad z''_{xy}\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3} \right) = -1; \quad z''_{yx}\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3} \right) = -1; \quad z''_{yy}\left(\frac{4}{3};\, \frac{5}{3} \right) = 2 .$$

Составим определитель

$$\Delta=\begin{vmatrix} z''_{xx}\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right) & z''_{xy}\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right) \\ z''_{yx}\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right) & z''_{yy}\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right) \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=2\cdot 2-(-1)\cdot(-1)=3.$$

Так как этот определитель больше нуля, то в точке $\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$ существует экстремум.

Определим тип этого экстремума с помощью $z''_{xx}\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$. Так как значение этой производной больше нуля, то в точке $\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)$ – минимум.

Значение функции в точке экстремума равно:

$$z\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)=\left(\frac{4}{3}\right)^2-\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{3}+\left(\frac{5}{3}\right)^2-\frac{4}{3}-2\cdot\frac{5}{3}+4=\frac{5}{3}.$$

Ответ. б) $(-1;1)$**, в)** $0,2$**, г)** $E_{zx}=-0,5$, $E_{zy}=1$, **д)** $z_{\min}=z\left(\frac{4}{3};\frac{5}{3}\right)=\frac{5}{3}$.

Задание 2

В результате эксперимента для пяти значений аргумента x получены пять значений величины y:

x	-2	0	1	2	4
y	0,5	1	1,5	2	3

Методом наименьших квадратов найти функциональную зависимость между x и y в виде линейной функции $y=ax+b$. Найти $y(3)$ и среднее значение.

Решение

Находим следующие величины:

n	x	y	x^2	xy
1	-2	0,5	4	-1
2	0	1	0	0
3	1	1,5	1	1,5
4	2	2	4	4
5	4	3	16	12
$\sum$	5	8	25	16,5

Система для определения неизвестных параметров a и b имеет вид:

$$\begin{cases} a \cdot \sum x^2 + b \cdot \sum x = \sum x y; \\ a \cdot \sum x + b \cdot n = \sum y. \end{cases}$$

В нашем случае эта система запишется в виде, при условии $n = 5$:

$$\begin{cases} 25a + 5b = 16,5; \\ 5a + 5b = 8. \end{cases}$$

Решим систему по формулам Крамера:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 25 & 5 \\ 5 & 5 \end{vmatrix} = 25 \cdot 5 - 5 \cdot 5 = 100;$$

$$\Delta_a = \begin{vmatrix} 16,5 & 5 \\ 8 & 5 \end{vmatrix} = 16,5 \cdot 5 - 8 \cdot 5 = 42,5;$$

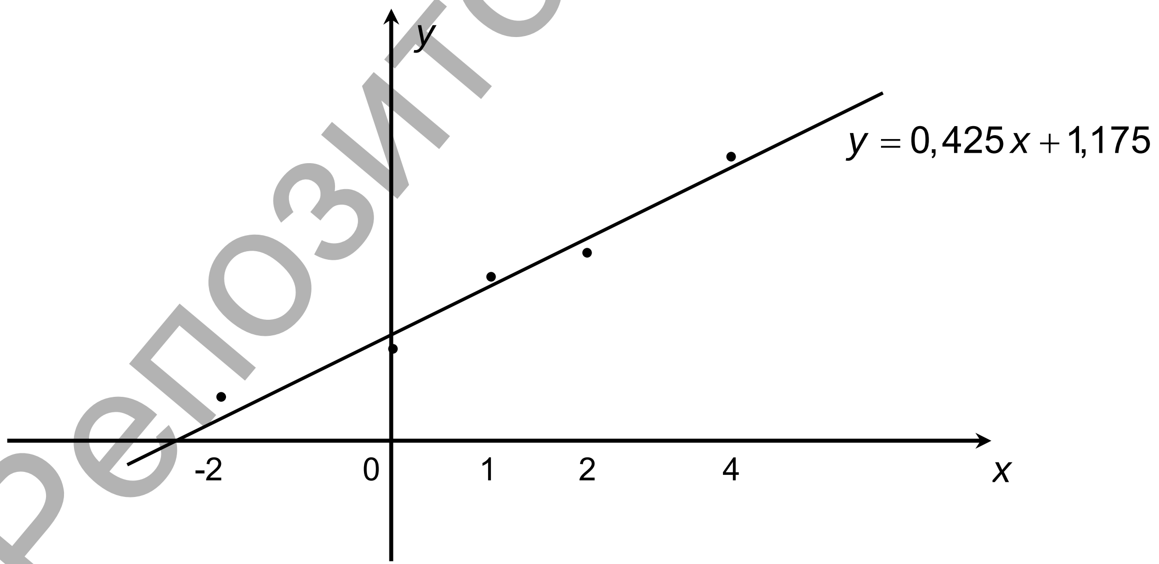
$$\Delta_b = \begin{vmatrix} 25 & 16,5 \\ 5 & 8 \end{vmatrix} = 25 \cdot 8 - 5 \cdot 16,5 = 117,5;$$

$$\begin{cases} a = \dfrac{\Delta_a}{\Delta} = \dfrac{42,5}{100} = 0,425; \\ b = \dfrac{\Delta_b}{\Delta} = \dfrac{117,5}{100} = 1,175. \end{cases}$$

Следовательно, искомая зависимость:

$$y = 0,425x + 1,175.$$

Построим график этой зависимости:



$y(3) = 0,425 \cdot 3 + 1,175 = 2,45$.

Среднее значение равно коэффициенту при переменной x, т.е. 0,425.

Ответ. $y = 0,425x + 1,175$; $y(3) = 2,45$; $x_{ср} = 0,425$.

Задание 3

Найти интегралы

а) $\int \frac{\sin 2x\ dx}{\sin^2 x-2}$; **б)** $\int x\cdot \operatorname{arctg} x\, dx$; **в)** $\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}}$.

Решение

а) Так как $\left(\sin^2 x\right)' = 2\sin x\cdot\cos x = \sin 2x$, то получим

$$\int \frac{\sin 2x}{\sin^2 x-2}dx = \int \frac{\left(\sin^2 x\right)' dx}{\sin^2 x-2} = \int \frac{d\left(\sin^2 x\right)}{\sin^2 x-2} = \int \frac{d\left(\sin^2 x-2\right)}{\sin^2 x-2} = \ln\left|\sin^2 x-2\right|+C .$$

б) К данному интегралу применим метод интегрирования по частям

$$\int x\cdot \operatorname{arctg} x\, dx = \left| \begin{array}{ll} u=\operatorname{arctg} x, & du=\left(\operatorname{arctg} x\right)' dx = \frac{dx}{x^2+1} \\ dv = x\,dx, & v=\int x\,dx=\frac{1}{2}x^2 \end{array} \right| =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{x^2dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int \frac{\left(x^2+1\right)-1}{x^2+1}dx =$$

$$= \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\int\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{1}{2}x^2 \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\left(x-\operatorname{arctg} x\right)+C =$$

$$= \frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x + C .$$

в) $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}-3\sqrt[4]{x}} = \left| \begin{array}{l} \sqrt[4]{x}=t,\ \sqrt{x}=t^2,\ x=t^4 \\ dx=\left(t^4\right)' dt = 4t^3dt \end{array} \right| = \int \frac{4t^3dt}{t^2-3t} = 4\int \frac{t^2dt}{t-3} =$$

$$= 4\int \frac{\left(t^2-9\right)+9}{t-3}dt = 4\int\left(t+3+\frac{9}{t-3}\right)dt = 4\left(\frac{1}{2}t^2+3t+9\ln\left|t-3\right|\right)+C =$$

$$= 2\sqrt{x}+12\sqrt[4]{x}+36\ln\left|\sqrt[4]{x}-3\right|+C .$$

Ответ. а) $\ln\left|\sin^2 x-2\right|+C$; **б)** $\frac{1}{2}\left(x^2+1\right)\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}x+C$;

в) $2\sqrt{x}+12\sqrt[4]{x}+36\ln\left|\sqrt[4]{x}-3\right|+C$.

Задание 4

Найти выигрыш потребителей и выигрыш поставщиков товара, законы спроса и предложения на которые определяются функциями:

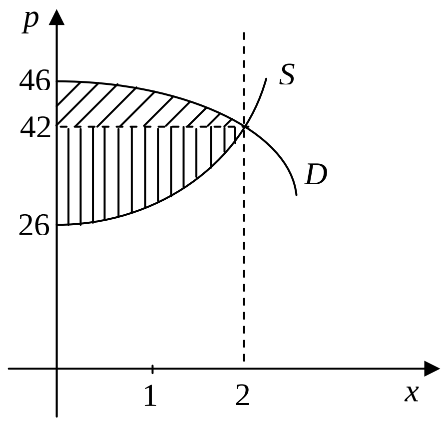
$$D: p = 46 - x^2\ ,\quad S: p = 26 + 4x^2\ ,$$

где x – количество товара, p – цена на этот товар.

Решение

Запишем уравнения спроса и предложения:

$$D: p = 46 - x^2, \qquad S: p = 26 + 4x^2.$$



Вычислим равновесную цену из уравнения

$$46 - x^2 = 26 + 4x^2.$$

Решая это уравнение, находим, что

$$x_0 = 2,$$

а

$$p_0 = 42.$$

Выигрыш потребителей равен площади фигуры, ограниченной кривой спроса D и прямой $p = p_0 = 42, x \geq 0$, т.е.

$$C = \int_0^2 \left(46 - x^2\right) dx - x_0 \cdot p_0 = \left(46x - \frac{1}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 - 2 \cdot 42 = \left(92 - \frac{8}{3}\right) - 84 = 5{,}33$$

Выигрыш поставщиков равен площади, заключенной между прямой p=42 и кривой предложения S, т.е.

$$P = p_0 x_0 - \int_0^2 \left(26 - 4x^2\right) dx = 42 \cdot 2 - \left(26x - \frac{4}{3}x^3\right)\Bigg|_0^2 = 84 - \left(52 - \frac{32}{3}\right) = 42{,}67.$$

Ответ. $C = 5{,}33$, $P = 42{,}67$.

Задание 5

Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y' - \frac{3}{x}y = x.$$

Решение

Это линейное дифференциальное уравнение первого порядка относительно y, т.к. y и y' входят в это уравнение в первой степени, и оно имеет вид:

$$y' + P(x)y = Q(x).$$

Решение будем искать в виде произведения двух функций

$$y = uv,$$

где $u = u(x)$ и $v = v(x)$ — неизвестные функции от переменной x. Тогда

$y' = u'v + v'u$. Подставив y и y' в исходное уравнение, получим

$$u'v + v'u - \frac{3}{x}uv = x \quad \text{или} \quad u'v + u\left(v' - \frac{3v}{x}\right) = x.$$

Функцию v найдем так, чтобы выражение в скобках равнялось нулю:

$$v' - \frac{3v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} - \frac{3v}{x} = 0, \quad \frac{dv}{dx} = \frac{3v}{x}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Разделим на v и умножим на dx левую и правую части уравнения:

$$\frac{dv}{v} = \frac{3}{x}dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Найдем частное решение уравнения:

$$\int \frac{dv}{v} = \int \frac{3}{x}dx, \quad \ln|v| = 3\ln|x|, \quad \ln|v| = \ln\left|x^3\right|, \quad v = x^3.$$

Подставим найденную функцию v в уравнение

$$u'v + u\left(v' - \frac{3v}{x}\right) = x,$$

$$u' \cdot x^3 + u \cdot 0 = x,$$

$$u' = \frac{1}{x^2} \quad \text{или} \quad \frac{du}{dx} = \frac{1}{x^2}.$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными. Умножим на dx левую и правую части уравнения:

$$du = \frac{1}{x^2}dx.$$

Получили уравнение с разделенными переменными. Найдем общее решение уравнения:

$$\int du = \int \frac{1}{x^2}dx,$$

$$u = \int x^{-2}dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C, \text{ где } C = const.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения будет иметь вид:

$$y = uv = \left(C - \frac{1}{x}\right)x^3 = Cx^3 - x^2.$$

Ответ. $y = Cx^3 - x^2$ - общее решение.

Задание 6

а) Решить задачу Коши

$$y'' + 3y' - 4y = 0, \; y(0) = 4, \; y'(0) = -1.$$

Решение

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$k^2 + 3k - 4 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются значения

$$k_1 = -4 \text{ и } k_2 = 1.$$

Так как корни характеристического уравнения действительные не совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = C_1 e^{k_1 \cdot x} + C_2 e^{k_2 \cdot x} = C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Неизвестные константы C_1 и C_2 найдем из условий $\begin{cases} y(0) = 4, \\ y'(0) = -1. \end{cases}$

Найдем y':

$$y'(x) = \left(C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}\right)' = -4C_1 e^{-4x} + C_2 e^{x}.$$

Тогда, подставляя начальные условия в $y(x)$ и $y'(x)$, получим

$$\begin{cases} C_1 e^{-4 \cdot 0} + C_2 e^{0} = 4, \\ -4C_1 e^{-4 \cdot 0} + C_2 e^{0} = -1, \end{cases} \text{ или } \begin{cases} C_1 + C_2 = 4, \\ -4C_1 + C_2 = -1. \end{cases}$$

Решая систему, найдем, что $C_1 = 1$ и $C_2 = 3$.

Значит, решение задачи Коши имеет вид:

$$y(x) = e^{-4x} + 3e^{x}$$

Ответ. $y(x) = e^{-4x} + 3e^{x}$.

б) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' + 10y' + 25y = 0.$$

Решение

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$k^2 + 10k + 25 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются значения

$$k_1 = k_2 = -5.$$

Так как корни характеристического уравнения – действительные совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = \left(C_1 x + C_2\right) e^{k \cdot x} = \left(C_1 x + C_2\right) e^{-5x},\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ. $y(x) = \left(C_1 x + C_2\right) e^{-5x}$, $C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

в) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 0.$$

Решение

Это линейное однородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами.

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$k^2 - 4k + 5 = 0.$$

Корнями характеристического уравнения являются значения

$$k_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{D}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{4 \pm 2i}{2} = 2 \pm i = \alpha \pm \beta i,$$

где $D = 4^2 - 4 \cdot 5 = -4 = 4 \cdot i^2$, так как $i^2 = -1$. Откуда имеем $\alpha = 2$ и $\beta = 1$.

Так как корни характеристического уравнения – пара комплексно сопряженных чисел, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x) = e^{\alpha \cdot x}\left(C_1 \cos(\beta x) + C_2 \sin(\beta x)\right) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Ответ. $y(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$.

Задание 7

а) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 10x^2 + 4x + 3.$$

Решение

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде суммы двух функций

$$y(x) = \bar{y}(x) + y^*(x),$$

где $\bar{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 0$, $y^*(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y'' - 4y' + 5y = 10x^2 + 4x + 3$.

Общим решением однородного дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 0$$

будет функция $\bar{y}(x) = e^{2x}\left(C_1 \cos x + C_2 \sin x\right),\ C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}$ (см. решение задания 6.в).

Найдем $y^*(x)$.

Рассмотрим правую часть исходного дифференциального уравнения

$$f(x) = 10x^2 + 4x + 3 = e^{0 \cdot x}\left(10x^2 + 4x + 3\right) =$$

$$= e^{0 \cdot x}\left((10x^2 + 4x + 3)\cos(0 \cdot x) + (10x^2 + 4x + 3)\sin(0 \cdot x)\right).$$

Правая часть уравнения является функцией специального вида

$$f(x) = e^{\alpha \cdot x}\left(P_n(x)\cos(\beta x) + Q_m(x)\sin(\beta x)\right)$$

Значит, частное решение $y^*(x)$ будет иметь вид

$$y^*(x) = x^t \cdot e^{\alpha \cdot x}\left(\bar{P}_s(x)\cos(\beta x) + \bar{Q}_s(x)\sin(\beta x)\right).$$

По условию имеем $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $P_n(x) = 10x^2 + 4x + 3$ и $Q_m(x) = 10x^2 + 4x + 3$.

Параметр t равен количеству совпадений числа $z = \alpha + \beta i$ с корнями характеристического уравнения.

В данном случае $z = 0 + 0 \cdot i = 0$ и $k_{1,2} = 2 \pm i$ (см. решение задания 6.в). Так как совпадений нет, то $t = 0$.

Степень многочленов $\bar{P}_s(x)$ и $\bar{Q}_s(x)$ определяется из условия $s = \max\{n, m\}$.

В данном примере $P_n(x) = 10x^2 + 4x + 3$ и $Q_m(x) = 10x^2 + 4x + 3$, значит, $n = 2$ и $m = 2$. Тогда $s = \max\{2, 2\} = 2$. Откуда

$$\bar{P}_s(x) = Ax^2 + Bx + C \text{ и } \bar{Q}_s(x) = Dx^2 + Ex + F.$$

Подставляя найденные параметры, получим

$$y^*(x) = x^0 \cdot e^{0 \cdot x}\left(\left(Ax^2 + Bx + C\right)\cos(0 \cdot x) + \left(Dx^2 + Ex + F\right)\sin(0 \cdot x)\right),$$

$$y^*(x) = 1 \cdot 1 \cdot \left(\left(Ax^2 + Bx + C\right) \cdot 1 + \left(Dx^2 + Ex + F\right) \cdot 0\right) = Ax^2 + Bx + C.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты A, B и C по методу неопределенных коэффициентов. Для этого найдем $(y^*)'$ и $(y^*)''$

$$(y^*)' = \left(Ax^2 + Bx + C\right)' = 2Ax + B,$$

$$(y^*)'' = (2Ax + B)' = 2A.$$

Так как $y^*(x)$ – это решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' + 5y = 10x^2 + 4x + 3,$$

то, подставляя в уравнение вместо y^*, $(y^*)'$ и $(y^*)''$ найденные выражения, получим

$$2A - 4(2Ax + B) + 5\left(Ax^2 + Bx + C\right) = 10x^2 + 4x + 3.$$

В левой части уравнения раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$5Ax^2 + (-8A + 5B)x + (2A - 4B + 5C) = 10x^2 + 4x + 3.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях уравнения при одинаковых степенях:

$$\begin{array}{c|c} x^2 & 5A=10 \\ x^1 & -8A+5B=4 \\ x^0 & 2A-4B+5C=3 \end{array}\Bigg\},$$

$$\begin{cases} A=2 \\ 5B=4+16 \\ -4B+5C=3-4 \end{cases} \quad \begin{cases} A=2 \\ 5B=20 \\ -4B+5C=-1 \end{cases} \quad \begin{cases} A=2 \\ B=4 \\ 5C=-1+16 \end{cases} \quad \begin{cases} A=2 \\ B=4 \\ 5C=15 \end{cases} \begin{cases} A=2 \\ B=4 \\ C=3 \end{cases}$$

Следовательно, частное решение исходного дифференциального уравнения примет вид

$$y^*(x)=2x^2+4x+3.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+2x^2+4x+3,\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ. $y(x)=e^{2x}\left(C_1\cos x+C_2\sin x\right)+2x^2+4x+3$, $C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$.

б) Найти общее решение дифференциального уравнения

$$y''-4y'=-12x^2+14x+6.$$

Решение

Это линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами и специальной правой частью.

Общее решение исходного дифференциального уравнения будем искать в виде суммы двух функций

$$y(x)=\bar{y}(x)+y^*(x),$$

где $\bar{y}(x)$ – общее решение соответствующего однородного дифференциального уравнения $y''-4y'=0$, $y^*(x)$ – частное решение неоднородного дифференциального уравнения $y''-4y'=-12x^2+14x+6$.

Найдем общее решение однородного дифференциального уравнения

$$y''-4y'=0.$$

Составим характеристическое уравнение, соответствующее дифференциальному уравнению

$$k^2-4k=0.$$

Корнями характеристического уравнения являются значения

$$k_1=0 \text{ и } k_2=4.$$

Так как корни характеристического уравнения – действительные не совпадающие числа, то общее решение дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1e^{k_1\cdot x}+C_2e^{k_2\cdot x}=C_1e^{0\cdot x}+C_2e^{4\cdot x}=C_1+C_2e^{4x},\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Найдем $y^*(x)$.

Частное решение $y^*(x)$ будет искать в виде (см. решение задания 7.а)

$$y^*(x) = x^t \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right).$$

Параметр t равен количеству совпадений числа $z = \alpha + \beta i$ с корнями характеристического уравнения.

В данном случае $z = 0$ и $k_1 = 0$. Значит, $t = 1$.

Следовательно,

$$y^*(x) = x^1 \cdot \left(Ax^2 + Bx + C\right) = Ax^3 + Bx^2 + Cx.$$

Вычислим неизвестные коэффициенты A, B и C по методу неопределенных коэффициентов. Для этого найдем $\left(y^*\right)'$ и $\left(y^*\right)''$

$$\left(y^*\right)' = \left(Ax^3 + Bx^2 + Cx\right)' = 3Ax^2 + 2Bx + C,$$

$$\left(y^*\right)'' = \left(3Ax^2 + 2Bx + C\right)' = 6Ax + 2B.$$

Так как $y^*(x)$ – это решение дифференциального уравнения

$$y'' - 4y' = -12x^2 + 14x + 6,$$

то, подставляя в уравнение вместо y^*, $\left(y^*\right)'$ и $\left(y^*\right)''$ найденные выражения, получим

$$6Ax + 2B - 4\left(3Ax^2 + 2Bx + C\right) = -12x^2 + 14x + 6.$$

В левой части уравнения раскроем скобки и перегруппируем слагаемые:

$$-12Ax^2 + (6A - 8B)x + (2B - 4C) = -12x^2 + 14x + 6.$$

Приравняем коэффициенты в левой и правой частях уравнения при одинаковых степенях:

$$\left.\begin{array}{l|l} x^2 & -12A = -12 \\ x^1 & 6A - 8B = 14 \\ x^0 & 2B - 4C = 6 \end{array}\right\}$$

$$\begin{cases} A = 1 \\ -8B = 14 - 6 \\ 2B - 4C = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ -8B = 8 \\ 2B - 4C = 6 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ -4C = 6 + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ -4C = 8 \end{cases} \quad \begin{cases} A = 1 \\ B = -1 \\ C = -2 \end{cases}$$

Следовательно, частное решение исходного дифференциального уравнения примет вид

$$y^*(x) = x^3 - x^2 - 2x.$$

Тогда общее решение исходного дифференциального уравнения имеет вид

$$y(x)=C_1+C_2e^{4x}+x^3-x^2-2x,\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}.$$

Ответ. $y(x)=C_1+C_2e^{4x}+x^3-x^2-2x,\ C_1,\ C_2\in\mathbb{R}$.

Задание 8

а) Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^n\cdot n^n}$.

Решение

Определим n-ый член ряда:

$$u_n(x)=\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^n\cdot n^n}.$$

Воспользуемся признаком Коши:

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\left|\frac{(2n-1)^n(x+1)^n}{2^n n^n}\right|}=|x+1|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{2n-1}{2n}=|x+1|.$$

По признаку Коши ряд будет сходиться, причем абсолютно, если

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|u_n|}<1,$$

$$|x+1|<1,$$

$$-1<x+1<1,$$

$$-1-1<x<1-1,$$

$$-2<x<0.$$

Итак, интервал $(-2;0)$ есть интервал сходимости исходного ряда.

Ответ. $(-2;0)$.

б) Найти интервал сходимости степенного ряда $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n(x-2)^n}{2^n\cdot(n+1)^2}$.

Решение

Определим n-ый и $(n+1)$-ый члены ряда:

$$u_n(x)=(-1)^{n-1}\frac{n(x-2)^n}{2^n\cdot(n+1)^2},\ u_{n+1}(x)=(-1)^n\frac{(n+1)\cdot(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}\cdot(n+2)^2}.$$

Воспользуемся признаком Д'Аламбера:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(n+1)(x-2)^{n+1}}{2^{n+1}(n+2)^2}\cdot\frac{2^n(n+2)^2}{(-1)^{n-1}n(x-2)^n}\right|=$$

$$=\left|x-2\right|\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{\left(n+1\right)^3}{2n\left(n+2\right)^2}=\frac{\left|x-2\right|}{2}\cdot\lim_{n\to\infty}\frac{n^3\left(1+\frac{1}{n}\right)^3}{n^3\left(1+\frac{2}{n}\right)^2}=\frac{\left|x-2\right|}{2}\cdot 1=\frac{\left|x-2\right|}{2}.$$

По признаку Д'Аламбера ряд будет сходиться, причем абсолютно, если

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|<1,$$

$$\frac{\left|x-2\right|}{2}<1,$$

$$\left|x-2\right|<2,$$

$$-2<x-2<2,$$

$$-2+2<x<2+2,$$

$$0<x<4.$$

Ответ. $(0;4)$.

Рекомендуемая литература

1 Жевняк, Р.М. Общий курс высшей математики: учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук, А.И. Марченко, В.Т. Унукович – Орша: Оршанская типография, 1996. – 320 с.

2 Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пос.: в 4-х ч. Ч. 2: Неопределенные и определенные интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения / Под общ. ред. А.П. Рябушко. – 4-е изд. – Минск : Высшая школа, 2008. – 396 с.

3 Кузнецов, А.В. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Е.И. Шилкина [и др.]. – Мн: Выш. шк., 1994. – 284 с.

4 Минюк, С.А. Высшая математика для экономистов: учеб. пос. / С.А. Минюк. – 2-е изд. испр. – Мн, 2007. – 512 с.

5 Сборник задач по высшей математике для экономистов: уч. пос. / Под ред. В.И. Ермакова. – 2-е изд. – М., 2008. – 575 с.

6 Яблонский, А.И. Высшая математика: Общий курс: учебник для студентов экономических специальностей вузов / А.И. Яблонский, А.В. Кузнецов, Е.И. Шилкина [и др.]. – 2-е изд., перераб. – Мн: Выш. шк., 2000. – 351 с.

Содержание

Учебное издание

Составители: Гладкий Иван Иванович
Дерачиц Наталия Александровна
Лебедь Светлана Федоровна
Махнист Леонид Петрович

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Методические рекомендации и варианты контрольной работы по разделам «Функции нескольких переменных», «Интегральное исчисление», «Дифференциальные уравнения», «Числовые и функциональные ряды» общего курса дисциплины «Высшая математика» для студентов экономических специальностей заочной формы обучения (сокращенной)

Ответственный за выпуск: Гладкий И.И.
Редактор: Строкач Т.В.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 16.11.2010. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 1,63. Уч. изд. л. 1,75. Заказ № 1113. Тираж 150 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267