МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Кафедра высшей математики

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Задания и методические рекомендации по выполнению заданий из курса «Высшая математика» для студентов экономических специальностей дневной формы обучения

Часть I

Брест 2010

УДК 51(075.8)

В методических рекомендациях предложены задания по разделам «Элементы линейной и векторной алгебры», «Основы аналитической геометрии», «Предел и непрерывность», «Дифференциальное исчисление функций одной переменной» из курса «Высшая математика» для студентов экономических специальностей дневной формы обучения. Приведены подробные решения типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

Издаются в 2-х частях. Часть I.

Составители: Гладкий И.И., старший преподаватель,
Каримова Т.И., к.ф.-м.н., доцент,
Махнист Л.П., к.т.н., доцент,
Рубанов В.С., к.ф.-м.н., доцент,
Юхимук Т.Ю., ассистент

Рецензент: Мирская Е.И., доцент кафедры информатики и прикладной математики учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

I. Практические задания по разделу «Элементы линейной и векторной алгебры»

№1. Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix} 3 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & -3 \\ 1 & -5 & 0 & -4 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

2. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}$

3. $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 5 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -3 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

5. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ -1 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 5 & 3 \end{vmatrix}$

6. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 & -3 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & 5 \\ 2 & 1 & 4 & 1 \end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix} 0 & -5 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

8. $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$

9. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 & 5 \\ 2 & 2 & 4 & 1 \\ -1 & 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 4 \end{vmatrix}$

№2. Решить систему линейных уравнений методом обратной матрицы.

1. $\begin{cases} 3x + 5y + 2z = -7; \\ x + y - 5z = -6; \\ x + 2y - 4z = -8. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 4y - 5z = 2; \\ 4x - 3y + z = 7; \\ x + 4y - 4z = 0. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x - 3y + z = 4; \\ x + 2y + z = 10; \\ 2x - 3y + z = 1. \end{cases}$

6. $\begin{cases} 2x + 5y - 5z = -9; \\ x + y + z = 4; \\ 3x + 2y - 4z = -1. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x - 3y - 5z = -7; \\ 2x + 2y + z = 9; \\ x + 4y + 3z = 5. \end{cases}$

8. $\begin{cases} 2x + 5y + z = 7; \\ x + 2y - 4z = -5; \\ 2x + 4y + z = 8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-5y+z=-6; \\ 2x+y-2z=-4; \\ 2x+3y-2z=4. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} x+5y+2z=4; \\ 2x+y-2z=2; \\ 3x+2y-2z=6. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 4x-5y+3z=-1; \\ x+y-2z=-5; \\ 3x-4y+z=-8. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} 2x+y-3z=-3; \\ 4x+2y-4z=2; \\ x+2y+z=7. \end{cases}$

№3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

1. $\begin{cases} x-3y+2z=2; \\ 2x+6y-3z=5; \\ 3x+4y-2z=5. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 2x-y-6z=1; \\ 3x-2y-8z=1; \\ x-4y+5z=-2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} 7x+2y-9z=-2; \\ 2x-3y+7z=-4; \\ 5x-4y+8z=-7. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} 3x+y-4z=-7; \\ 4x-2y-2z=-6; \\ x+5y-5z=2. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 2x+3y+z=-4; \\ x+4y+3z=-7; \\ 2x+3y+5z=4. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 5x+3y+2z=5; \\ 4x+2y+3z=-1; \\ 2x+y+4z=-8. \end{cases}$

4. $\begin{cases} x-2y-3z=4; \\ 3x+5y+2z=1; \\ 2x-3y-4z=2. \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 3x-3y-2z=-3; \\ x-4y+z=-8; \\ 3x+2y-5z=8. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 5x+4y+3z=10; \\ 4x+2y+z=6; \\ 3x-4y-5z=-2. \end{cases}$ 10. $\begin{cases} x+3y+2z=-4; \\ 3x+y-5z=9; \\ x-2y-4z=10. \end{cases}$

№4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

1. $\begin{cases} 2x-3y+2z=8; \\ 2x-8y+7z=13; \\ x-3y+2z=1. \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 3x-9y+4z=10; \\ 2x+y-6z=-7; \\ -4x+5y+3z=-1. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x-2y+2z=1; \\ 2x-3y+9z=11; \\ 3x-5y+3z=4. \end{cases}$ 7. $\begin{cases} x+3y-4z=-5; \\ 2x+y-2z=-2; \\ -4x+5y-z=3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} 3x+y-3z=-9; \\ 2x+8y-6z=-8; \\ x-5y+2z=-1. \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 2x+3y-z=1; \\ 2x+y-2z=-2; \\ 5x+5y-z=-4. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x - y + 2z = 4; \\ 2x - 3y + 7z = 11; \\ 7x + 5y - 6z = 9. \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 9y - 7z = -2; \\ 2x - 3y + 2z = 5; \\ 4x + 5y - 6z = -7. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x + 3y - z = 5; \\ 2x + 4y - z = 6; \\ 5x + 2y + 3z = 8. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 3x + 2y - 5z = -4; \\ 2x + 3y + 4z = 7; \\ x + 2y - 3z = -8. \end{cases}$

№5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.
2. $A = \begin{bmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.
3. $A = \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$.
4. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$.
5. $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$.
6. $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -6 & 2 \end{bmatrix}$.
7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -3 \end{bmatrix}$.
8. $A = \begin{bmatrix} -2 & 8 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.
9. $A = \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ -3 & 3 \end{bmatrix}$.
10. $A = \begin{bmatrix} 9 & -1 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$.

II. Практические задания по разделу «Основы аналитической геометрии»

№1. Даны векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$. Вычислить $(\vec{a} - 2\vec{b}) \cdot (\vec{b} + 2\vec{a})$:

1. $\vec{a} = (1;4;5)$; $\vec{b} = (3;4;-2)$.
2. $\vec{a} = (2;-4;1)$; $\vec{b} = (1;2;-4)$.
3. $\vec{a} = (3;5;1)$; $\vec{b} = (-2;4;-3)$.
4. $\vec{a} = (1;2;3)$; $\vec{b} = (3;4;5)$.
5. $\vec{a} = (2;4;-5)$; $\vec{b} = (-3;1;5)$.
6. $\vec{a} = (5;-3;2)$; $\vec{b} = (1;4;3)$.
7. $\vec{a} = (-1;-3;5)$; $\vec{b} = (2;5;-2)$.
8. $\vec{a} = (3;-1;1)$; $\vec{b} = (2;3;-3)$.
9. $\vec{a} = (5;-2;1)$; $\vec{b} = (-4;1;3)$.
10. $\vec{a} = (3;-1;5)$; $\vec{b} = (5;4;-3)$.

№2. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки A и B:

1.	A(-2;4), B(3;2).	6.	A(-4;3), B(1;2).
2.	A(3;1), B(4;-5).	7.	A(2;3), B(-5;-2).
3.	A(4;5), B(1;-2).	8.	A(1;1), B(5;3).
4.	A(1;3), B(-2;4).	9.	A(2;-3), B(4;3).
5.	A(5;1), B(1;-1).	10.	A(-3;4), B(-5;2).

№3. Даны координаты вершин треугольника ABC. Найти площадь треугольника, если:

1.	A(2;-1), B(3;2), C(6;1).	6.	A(1;2), B(-1;1), C(1;-1).
2.	A(1;4), B(3;2), C(2;1).	7.	A(-2;1), B(4;5), C(3;2).
3.	A(4;3), B(2;-4), C(2;1).	8.	A(3;3), B(4;-2), C(2;4).
4.	A(-3;1), B(4;2), C(1;3).	9.	A(1;3), B(-2;-2), C(1;1).
5.	A(5;-3), B(-4;2), C(1;1).	10.	A(4;5), B(-2;3), C(1;2).

№4. Найти расстояние от точки D до плоскости, проходящей через точки A, B и C:

1. A(-9;8;-5), B(-7;9;-6), C(-8;6;-4), D(1;2;0).
2. A(3;-1;2), B(4;2;3), C(4;-3;-2), D(-1;1;2).
3. A(1;2;3), B(2;2;4), C(3;1;-2), D(2;3;2).
4. A(4;-2;1), B(-5;1;4), C(3;1;2), D(1;3;4).
5. A(4;-2;5), B(3;1;4), C(2;-3;2), D(1;2;1).
6. A(6;-1;4), B(4;1;2), C(5;-3;5), D(4;2;3).
7. A(3;4;-5), B(5;5;-6), C(2;2;-4), D(5;1;-4).
8. A(6;-3;4), B(4;-6;3), C(8;-4;1), D(6;-4;1).
9. A(3;7;-4), B(4;5;-3), C(2;3;1), D(5;-4;1).
10. A(-2;1;-4), B(-4;5;-3), C(1;2;-2), D(1;7;1).

№5. Установить взаимное расположение прямой L и плоскости β:

1. $L: \dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-1}{4};\quad \beta:\ x+2y+3z+5=0.$
2. $L: \dfrac{x+6}{4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{2};\quad \beta:\ 2x+3y+4z+1=0.$
3. $L: \dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+4}{4};\quad \beta:\ 3x-2y-z+5=0.$
4. $L: \dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{4};\quad \beta:\ 2x+5y-4z+3=0.$
5. $L: \dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4};\quad \beta:\ 3x+4y-3z+10=0.$
6. $L: \dfrac{x-2}{-4}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z-1}{3};\quad \beta:\ 5x+2y+3z-7=0.$

7. $L: \frac{x-5}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-4}{2}$; $\beta: 2x-4y-3z-2=0$.

8. $L: \frac{x-4}{-1} = \frac{y+2}{2} = \frac{z-1}{3}$; $\beta: x-2y+5z+7=0$.

9. $L: \frac{x+3}{4} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+5}{5}$; $\beta: 3x+2y-2z-3=0$.

10. $L: \frac{x-2}{-4} = \frac{y+5}{3} = \frac{z-3}{2}$; $\beta: 2x-3y+4z-4=0$.

III. Практические задания по разделу «Предел и непрерывность»

№1. Вычислить предел:

а)

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{2x^2-5x-7}{3x^2+x-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+5x+2}$.
3. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{2x^2-9x+9}{x^2-5x+6}$.
4. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{5x-x^2-4}{x^2-2x-8}$.
5. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-3x-4}{x^2-7x+12}$.
6. $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-2x-8}{2x^2-7x-4}$.
7. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{4x^2+7x+3}{2x^2+x-1}$.
8. $\lim\limits_{x\to -5}\frac{x^2+2x-15}{2x^2+7x-15}$.
9. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{2x^2+9x+10}{4x+8}$.
10. $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x^2-x-6}{x^2+7x+10}$.

б)

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x^3-2x+1}{2x^3+3x^2+2}$.
2. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{4x-x^4+5}{4x^3+8x-1}$.
3. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^7+5x^3-9x}{3x^2-11x-2}$.
4. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x^3-7x^2+3}{2+2x-x^3}$.
5. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{6-5x^2+2x}{x^8+6x^2-3x}$.
6. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x+x^6}{x^2-3x+4}$.
7. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^2-8x+1}{x^7+x-2}$.
8. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1+4x-x^4}{x+3x^2+2x^4}$.
9. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x^3+7x-1}{3x^4+2x-2}$.
10. $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{3x^4-2x^3-7}{3x^4+3x+10}$.

№2. Вычислить предел:

1. $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{x+4}-3}{\sqrt{x-1}-2}$.
2. $\lim\limits_{x\to 7}\frac{\sqrt{x-3}-2}{\sqrt{x+2}-3}$.
6. $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^3-27}{\sqrt{3x}-x}$.
7. $\lim\limits_{x\to -4}\frac{\sqrt{x+20}-4}{x^3+64}$.

3. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{5+x}-2}{\sqrt{8-x}-3}$.

4. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2-\sqrt{x}}{\sqrt{6x+1}-5}$.

5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-3x+2}{\sqrt{5-x}-\sqrt{x+1}}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{3x}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}$.

9. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-3}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{9+x}-3}{x^2+x}$.

№3. Вычислить предел:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^3 x-\cos x}{4x^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin(x-3)}{x^2-9}$.

3. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}2x-\sin 2x}{x^2}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x+\sin 3x}{x\sin x}$.

5. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 x-\cos^2 2x}{x^2}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 3x}{x\sin 2x}$.

7. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\operatorname{tg}x}-\dfrac{1}{\sin x}\right)$.

8. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{\operatorname{tg}(x+5)}{x^2-25}$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x-\sin^2 x}{x^2}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{1-\cos 8x}$.

№4. Вычислить предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции:

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}6x}{2x^2-3x}$.

2. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+6x^2)}{x^3-3x^2}$.

3. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sin(x-2)}{x^3-8}$.

4. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{6x}-1}{\sin 3x}\right)$.

5. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\operatorname{tg}(x+6)}{x^2-36}$.

6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{4x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^3-27}{\operatorname{tg}(x-3)}$.

8. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{e^{2x}-1}{\operatorname{tg}x}\right)$.

9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+3x)}{\sin 5x}$.

10. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin 7x}{\operatorname{arctg}4x}$.

№5. Исследовать функцию на непрерывность и построить её график:

1. $f(x)=\begin{cases}-x-1, & \textit{при } x\le -1;\\ 1-x^2, & \textit{при } -1<x\le 1;\\ x, & \textit{при } x>1.\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}-x, & \textit{при } x\le -1;\\ 1-x^2, & \textit{при } -1<x\le 1;\\ x-1, & \textit{при } x>1.\end{cases}$

2. $f(x)=\begin{cases}-5, \text{ при } x\le -2;\\ -x^2, \text{ при } -2<x\le 2;\\ 2x-3, \text{ при } x>2.\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}1-x^2, \text{ при } x\le 0;\\ 1-x, \text{ при } 0<x\le 3;\\ 3, \text{ при } x>3.\end{cases}$

3. $f(x)=\begin{cases}x+3, \text{ при } x\le -4;\\ 0, \text{ при } -4<x\le 0;\\ \sqrt{x}, \text{ при } x>0.\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}\sqrt{1-x}, \text{ при } x\le 1;\\ 0, \text{ при } 1<x\le 4;\\ x-3, \text{ при } x>4.\end{cases}$

4. $f(x)=\begin{cases}1, \text{ при } x<1;\\ (x-3)^2, \text{ при } 1\le x\le 5;\\ \frac{1}{3}(x+7), \text{ при } x>5.\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}x+1, \text{ при } x<0;\\ 2, \text{ при } 0\le x\le 2;\\ x^2-2, \text{ при } x>2.\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}x+1, \text{ при } x\le 0;\\ (x+1)^2, \text{ при } 0<x\le 1;\\ 5, \text{ при } x>1.\end{cases}$.

10. $f(x)=\begin{cases}x+6, \text{ при } x<-2;\\ -x^2-1, \text{ при } -2\le x\le 2;\\ x-7, \text{ при } x>2.\end{cases}$.

IV. Практические задания по разделу «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

№1. Найти производную функции:

1. $y=8x^3+\frac{6}{x^4}-\frac{4}{x}+\sqrt[7]{x^5}$.
2. $y=3\sqrt{x^3}+5x^5-\frac{2}{x}+\sqrt[9]{x^2}$.
3. $y=4x^4+\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{x}-5\sqrt{2}$.
4. $y=\frac{2}{x^6}-4x^2+6\sqrt[3]{x^7}-\frac{5}{x}$.
5. $y=\frac{8}{x^2}-2x^3+\sqrt{x^5}+\sqrt[7]{3}$.
6. $y=3x^3+\sqrt[3]{x^4}-\frac{2}{x^4}-\frac{1}{x}$.
7. $y=2\sqrt{x^5}-3x^4+\sqrt[3]{x^8}-\frac{4}{x}$.
8. $y=3x^3-2\sqrt{7}-\sqrt[5]{x^4}+\frac{4}{x}$.
9. $y=3\sqrt[4]{x^3}-\frac{1}{x^5}-5x^2-\frac{4}{x}$.
10. $y=-x^3+\frac{7}{x^4}+\sqrt{x^3}-\sqrt[4]{5}$.

№2. Найти производную функции:

1. $y=(3x-5)^2\arcsin 4x^3$.
2. $y=\lg(2-x)\cdot\arcsin^5 5x$.
3. $y=\arccos x^2\cdot\operatorname{ctg}7x^3$.
4. $y=\cos\sqrt{x}\cdot e^{(2x+3)^2}$.
5. $y=\operatorname{tg}^4 3x\cdot\operatorname{arctg}7x^2$.
6. $y=\log_5(x^4-2x)\cdot\sqrt[3]{\cos 5x}$.
7. $y=\operatorname{tg}^6 2x\cdot\cos 5x^3$.
8. $y=\ln^4(2x+4)\cdot\operatorname{arcctg}\sqrt{2x}$.
9. $y=\sqrt[3]{(3x-4)^8}\cdot\sin 5x^2$.
10. $y=\sqrt{\sin 6x}\cdot e^{-\cos x^3}$.

№3. Найти производную функции:

1. $y=\dfrac{\log_5(3x-7)}{\mathrm{ctg}\,7x^4}$.

2. $y=\dfrac{\sin^5\left(4\sqrt{x}\right)}{\lg(x^3-5x+1)}$.

3. $y=\dfrac{\sqrt{x^2-3x+7}}{2\mathrm{ctg}\sqrt{x}}$.

4. $y=\dfrac{\sqrt[5]{\ln(2x-5)}}{x^5+\sqrt[3]{2x}}$.

5. $y=\dfrac{e^{\cos^3 x}}{\sqrt[5]{x^6+\sin 2x}}$.

6. $y=\dfrac{(x^2+2x-1)^2}{e^{3\cos 3x}}$.

7. $y=\dfrac{7\log_4(5x-3)}{(3x-2)^2}$.

8. $y=\dfrac{\log_2(x+4)}{\cos^5 x}$.

9. $y=\dfrac{e^{\sqrt{\sin 2x}}}{\left(x^2+5x+2\sqrt{2}\right)^3}$.

10. $y=\dfrac{3\mathrm{tg}^4(2x+1)}{\lg\sqrt[3]{5x+2}}$.

№4. Найти предел, используя правило Лопиталя:

1. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln(x+5)}{\sqrt[4]{3+x}}$.

2. $\lim\limits_{x\to1}\ln x\cdot\ln(x-1)$.

3. $\lim\limits_{x\to0}\left(1-e^{2x}\right)\cdot\mathrm{ctg}x$.

4. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{e^{x^2}-1}{\cos x-1}$.

5. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x\cos x-\sin x}{x^3}$.

6. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos x^2}{x^2-\sin x^2}$.

7. $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\ln x}{\sqrt[3]{x}}$.

8. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\mathrm{tg}x-x}{x-\sin x}$.

9. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\ln\cos x}{x}$.

10. $\lim\limits_{x\to0}(1-\cos x)\cdot\mathrm{ctg}x$.

№5. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума функции, максимум и минимум функции, промежутки вогнутости, выпуклости, точки перегиба графика функции:

1. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}x^2-6x+1$.

2. $y=x^3+9x^2+15x-3$.

3. $y=\dfrac{2}{3}x^3-9x^2+28x+5$.

4. $y=\dfrac{4}{3}x^3+6x^2-16x+9$.

5. $y=2x^3-15x^2+36x-8$.

6. $y=\dfrac{2}{3}x^3-8x^2+30x-6$.

7. $y=3x^3+\dfrac{9}{2}x^2-18x+10$.

8. $y=2x^3-21x^2+36x+7$.

9. $y=x^3+12x^2+36x-4$.

10. $y=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{3}{2}x^2-4x+2$.

V. Решение практических заданий по разделу «Элементы линейной и векторной алгебры»

№1. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix}$.

Решение

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -3 \\ 2 & 2 & -2 & 0 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -11 & 1 & -7 \\ -1 & 4 & -1 & 1 \\ 2 & -4 & -2 & -8 \end{vmatrix} \overset{2)}{=} a_{11} \cdot A_{11} + a_{12} \cdot A_{12} + a_{13} \cdot A_{13} + a_{14} \cdot A_{14} \overset{3)}{=}$$

$$= a_{11} \cdot A_{11} \overset{4)}{=} 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -11 & 1 & -7 \\ 4 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & -8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -11 & 1 & -7 \\ 4 & -1 & 1 \\ -4 & -2 & -8 \end{vmatrix} \overset{5)}{=} \begin{vmatrix} -11 & 1 & -7 \\ -7 & 0 & -6 \\ -26 & 0 & -22 \end{vmatrix} \overset{6)}{=}$$

$$= a_{12} \cdot A_{12} + a_{22} \cdot A_{22} + a_{32} \cdot A_{32} \overset{7)}{=} a_{12} \cdot A_{12} \overset{8)}{=} 1 \cdot (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} -7 & -6 \\ -26 & -22 \end{vmatrix} =$$

$$= -\begin{vmatrix} -7 & -6 \\ -26 & -22 \end{vmatrix} \overset{9)}{=} -\left((-7)\cdot(-22) - (-6)\cdot(-26)\right) = -(154 - 156) = -(-2) = 2$$

1) Получим нули в первой строке с помощью элементов первого столбца. Первый столбец переписываем без изменений. На месте элемента $a_{12} = 3$ получим нуль. Для этого каждый элемент первого столбца умножим на (-3) и прибавим к соответствующим элементам второго столбца. Третий столбец переписываем без изменений, так как элемент $a_{13} = 0$. На месте элемента $a_{14} = 4$ получим нуль, умножая каждый элемент первого столбца на (-4) и прибавляя к соответствующим элементам четвёртого столбца.

2) Разложим полученный определитель по элементам первой строки.

3) Так как элементы a_{12}, a_{13}, a_{14} – нулевые, то и произведения $a_{12} \cdot A_{12}$, $a_{13} \cdot A_{13}$, $a_{14} \cdot A_{14}$ тоже будут равны нулю.

4) a_{11} - элемент на пересечении 1-ой строки и 1-го столбца, а A_{11} - его алгебраическое дополнение.

5) Получим нули во втором столбце с помощью элементов первой строки. Первую строку переписываем без изменений. На месте элемента $a_{22} = -1$ получим нуль, для чего каждый элемент первой строки умножим на 1 и прибавим к соответствующим элементам второй строки. На месте элемента $a_{32} = -2$ получим нуль, умножая каждый элемент первой строки на 2 и прибавляя к соответствующим элементам третьей

строки.

6) Разложим полученный таким образом определитель по элементам второго столбца.

7) Так как элементы a_{22}, a_{32} – нулевые, то и произведения $a_{22} \cdot A_{22}$ è $a_{32} \cdot A_{32}$ тоже будут равны нулю.

8) a_{12} - элемент на пересечении 1-ой строки и 2-го столбца, а A_{12} - его алгебраическое дополнение.

9) Полученный определитель второго порядка вычисляем следующим образом: из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычитаем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Ответ: 2.

№2. Решить систему линейных уравнений матричным методом.

$$\begin{cases} x + 3y + 4z = 1; \\ 2x + 5y + 4z = -2; \\ 3x + y - 3z = 5. \end{cases}$$

Решение

Запишем систему уравнений в виде матричного уравнения:

$$A \cdot X = B, \tag{1}$$

где $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Из уравнения (1) следует, что

$$X = A^{-1} \cdot B. \tag{2}$$

Матрицу A^{-1} найдём по формуле:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det \grave{A}} \cdot \begin{bmatrix} \grave{A}_{11} & A_{21} & A_{31} \\ \grave{A}_{12} & A_{22} & A_{32} \\ \grave{A}_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix}.$$

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = \left(1 \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 4\right) - \left(3 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot (-3)\right) =$$

$$= -15 + 36 + 8 - (60 + 4 - 18) = 29 - 46 = -17 \neq 0.$$

Найдём алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 5 \cdot (-3) - 1 \cdot 4 = -15 - 4 = -19;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2}\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & -3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}2 & 4\\3 & -3\end{vmatrix} = -\left(2\cdot(-3)-3\cdot 4\right) = -\left(-6-12\right) = -\left(-18\right) = 18;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3}\begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 1\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}2 & 5\\3 & 1\end{vmatrix} = 2\cdot 1-3\cdot 5 = 2-15 = -13;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\1 & -3\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}3 & 4\\1 & -3\end{vmatrix} = -\left(3\cdot(-3)-1\cdot 4\right) = -\left(-9-4\right) = -\left(-13\right) = 13;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\3 & -3\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 4\\3 & -3\end{vmatrix} = 1\cdot(-3)-3\cdot 4 = -3-12 = -15;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 3\\3 & 1\end{vmatrix} = -\left(1\cdot 1-3\cdot 3\right) = -\left(1-9\right) = -\left(-8\right) = 8;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix}3 & 4\\5 & 4\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}3 & 4\\5 & 4\end{vmatrix} = 3\cdot 4-5\cdot 4 = 12-20 = -8;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix}1 & 4\\2 & 4\end{vmatrix} = -\begin{vmatrix}1 & 4\\2 & 4\end{vmatrix} = -\left(1\cdot 4-2\cdot 4\right) = -\left(4-8\right) = -\left(-4\right) = 4;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 & 3\\2 & 5\end{vmatrix} = 1\cdot 5-2\cdot 3 = 5-6 = -1.$$

Таким образом,

$$A^{-1} = \frac{1}{-17}\cdot\begin{bmatrix}-19 & 13 & -8\\18 & -15 & 4\\-13 & 8 & -1\end{bmatrix}.$$

Подставляя A^{-1} и B в формулу (2), найдем вектор неизвестных:

$$X = \frac{1}{-17}\cdot\begin{bmatrix}-19 & 13 & -8\\18 & -15 & 4\\-13 & 8 & -1\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}1\\-2\\5\end{bmatrix} = \frac{1}{-17}\cdot\begin{bmatrix}(-19)\cdot 1+13\cdot(-2)+(-8)\cdot 5\\18\cdot 1+(-15)\cdot(-2)+4\cdot 5\\(-13)\cdot 1+8\cdot(-2)+(-1)\cdot 5\end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{-17}\cdot\begin{bmatrix}-19-26-40\\18+30+20\\-13-16-5\end{bmatrix} = \frac{1}{-17}\cdot\begin{bmatrix}-85\\68\\34\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}5\\-4\\2\end{bmatrix}.$$

Ответ: $(5;\,-4;\,2)$.

№3. Решить систему линейных уравнений по формулам Крамера.

$$\begin{cases}x+3y+4z=1;\\2x+5y+4z=-2;\\3x+y-3z=5.\end{cases}$$

Решение

Запишем систему уравнений в виде матричного уравнения:

$$A \cdot X = B,$$

где $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{bmatrix}$, $X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$.

Если определитель основной матрицы системы отличен от нуля, то решение системы можно найти по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta}; \ y = \frac{\Delta_2}{\Delta}; \ z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ – определитель матрицы A; Δ_1 – определитель, полученный из Δ заменой первого столбца столбцом свободных членов; Δ_2 – определитель, полученный из Δ заменой второго столбца столбцом свободных членов; Δ_3 – определитель, полученный из Δ заменой третьего столбца столбцом свободных членов.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 3 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 1 \cdot 4 - \left(3 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 3 \cdot (-3)\right) =$$

$$= -15 + 36 + 8 - (60 + 4 - 18) = 29 - 46 = -17 \neq 0.$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -2 & 5 & 4 \\ 5 & 1 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 \cdot 4 - \left(5 \cdot 5 \cdot 4 + 1 \cdot 1 \cdot 4 + (-2) \cdot 3 \cdot (-3)\right) =$$

$$= -15 + 60 - 8 - (100 + 4 + 18) = 37 - 122 = -85.$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 2 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & -3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-2) \cdot (-3) + 1 \cdot 4 \cdot 3 + 2 \cdot 5 \cdot 4 - \left(3 \cdot (-2) \cdot 4 + 5 \cdot 1 \cdot 4 + 2 \cdot 1 \cdot (-3)\right) =$$

$$= 6 + 12 + 40 - (-24 + 20 - 6) = 58 + 10 = 68.$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 5 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 5 + 1 \cdot 2 \cdot 1 + (-2) \cdot 3 \cdot 3 - \left(3 \cdot 5 \cdot 1 + 2 \cdot 3 \cdot 5 + (-2) \cdot 1 \cdot 1\right) =$$

$$= 25 + 2 - 18 - (15 + 30 - 2) = 9 - 43 = -34.$$

Отсюда:

$$x = \frac{-85}{-17} = 5; \ y = \frac{68}{-17} = -4; \ z = \frac{-34}{-17} = 2.$$

Ответ: $(5; -4; 2)$.

№4. Решить систему линейных уравнений методом Гаусса.

$$\begin{cases} x+3y+4z=1; \\ 2x+5y+4z=-2; \\ 3x+y-3z=5. \end{cases}$$

Решение

Запишем расширенную матрицу $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right]$. Приведём матрицу к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 5 & 4 & -2 \\ 3 & 1 & -3 & 5 \end{array}\right] \overset{1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & -8 & -15 & 2 \end{array}\right] \overset{2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & 4 & 1 \\ 0 & -1 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 17 & 34 \end{array}\right].$$

1) Первую строку матрицы переписываем без изменений. Элементы первой строки матрицы умножим на (-2) и прибавим ко второй строке. Затем элементы первой строки матрицы умножим на (-3) и прибавим к третьей строке.

2) Первую и вторую строку матрицы переписываем без изменений. Элементы второй строки матрицы умножим на (-8) и прибавим к третьей строке.

Получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x+3y+4z=1; \\ \quad -y-4z=-4; \\ \qquad 17z=34. \end{cases}$$

Из последнего уравнения системы получаем:

$$z=\frac{34}{17}=2.$$

Подставив найденное значение во второе уравнение, получим:

$$y=4-4z=4-4\cdot 2=-4.$$

Из первого уравнения системы найдем:

$$x=1-4z-3y=1-4\cdot 2-3\cdot(-4)=1-8+12=5.$$

Ответ: $(5;\,-4;\,2)$.

№5. Найти собственные значения и собственные векторы матрицы.

$$A=\begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Решение

Для нахождения собственных значений матрицы *A* составим характеристическое уравнение

$$|A-\lambda E|=0.$$

Запишем матрицу $A-\lambda E$:

$$A-\lambda E=\begin{bmatrix}4 & 3\\ 1 & 2\end{bmatrix}-\lambda\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4-\lambda & 3\\ 1 & 2-\lambda\end{bmatrix}.$$

Найдем ее определитель:

$$|A-\lambda E|=\begin{vmatrix}4-\lambda & 3\\ 1 & 2-\lambda\end{vmatrix}=0. \qquad (3)$$

$$(4-\lambda)\cdot(2-\lambda)-1\cdot 3=0 \quad\Leftrightarrow\quad \lambda^2-6\lambda+5=0.$$

Решая это уравнение, найдем корни: $\lambda_1=1$; $\lambda_2=5$.

Для определения собственных векторов запишем уравнение (3) в виде системы уравнений:

$$\begin{cases}(4-\lambda)x_1+3x_2=0,\\ x_1+(2-\lambda)x_2=0.\end{cases}$$

Найдём собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_1=1$, для этого вместо λ подставим в систему λ_1:

$$\begin{cases}3x_1+3x_2=0,\\ x_1+x_2=0.\end{cases}\Leftrightarrow x_1+x_2=0.$$

Пусть x_1 – базисная переменная, x_2 – свободная переменная. Положим $x_1=t,\ t\in R, t\neq 0$, тогда $x_2=-t$. Значит, собственным вектором матрицы *A*, соответствующим собственному значению $\lambda_1=1$, будет вектор $\vec{x}_1=\begin{bmatrix}t\\ -t\end{bmatrix},\ t\in R, t\neq 0$.

Найдём собственный вектор, соответствующий собственному значению $\lambda_2=5$. Для этого вместо λ подставим в систему λ_2:

$$\begin{cases}-x_1+3x_2=0,\\ x_1-3x_2=0.\end{cases}\Leftrightarrow x_1-3x_2=0.$$

Пусть x_1 – базисная переменная, x_2 – свободная переменная. Положим $x_1=c, c\in R, c\neq 0$, тогда $x_2=3c$. Значит, собственным вектором матрицы *A*, соответствующим собственному значению $\lambda_2=5$, будет вектор $\vec{x}_2=\begin{bmatrix}c\\ 3c\end{bmatrix},\ c\in R, c\neq 0$.

Ответ: $\lambda_1=1,\ \vec{x}_1=\begin{bmatrix}t\\ -t\end{bmatrix};\ \lambda_2=5,\ \vec{x}_2=\begin{bmatrix}c\\ 3c\end{bmatrix},\ t, c\in R, t\neq 0, c\neq 0$.

VI. Решение практических заданий по разделу «Основы аналитической геометрии»

№1. Даны векторы $\vec{a}=(3;-2;-5)$ и $\vec{b}=(1;2;-2)$. Вычислить $(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+2\vec{a})$.

Решение

Так как линейные операции над векторами сводятся к соответствующим линейным операциям над их координатами, то:

$(\vec{a}-2\vec{b})=(3;-2;-5)-2\cdot(1;2;-2)=(3;-2;-5)-(2;4;-4)=(1;-6;-1)$.

$(\vec{b}+2\vec{a})=(1;2;-2)+2\cdot(3;-2;-5)=(1;2;-2)+(6;-4;-10)=(7;-2;-12)$.

Если $\vec{a}=(x_a,y_a,z_a)$ и $\vec{b}=(x_b,y_b,z_b)$, то их скалярное произведение находят по формуле:

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=x_a\cdot x_b+y_a\cdot y_b+z_a\cdot z_b.$$

Тогда:

$(\vec{a}-2\vec{b})\cdot(\vec{b}+2\vec{a})=(1;-6;-1)\cdot(7;-2;-12)=1\cdot7+(-6)\cdot(-2)+(-1)\cdot(-12)=$

$=7+12+12=31$.

Ответ: 31.

№2. Найти угловой коэффициент прямой, проходящей через точки A(-5;1) и B(-3;4).

Решение

Уравнение прямой *AB* найдем по формуле:

$$\frac{x-x_a}{x_b-x_a}=\frac{y-y_a}{y_b-y_a},$$

где $A(x_a;y_a)$, $B(x_b;y_b)$.

Подставляя координаты точек A и B, получим

$$\frac{x-(-5)}{-3+5}=\frac{y-1}{4-1}\Leftrightarrow\frac{x+5}{2}=\frac{y-1}{3}\Leftrightarrow 3\cdot(x+5)=2\cdot(y-1)\Leftrightarrow 3x+13=2y.$$

Из последнего уравнения выразим y:

$$y=\frac{3}{2}x+\frac{13}{2}=1{,}5x+6{,}5.$$

Откуда получим, что угловой коэффициент прямой *AB* равен

$$k_{AB}=1{,}5.$$

Ответ: 1,5.

№3. Даны координаты вершин треугольника $A(-3;5)$, $B(-4;2)$, $C(3;-1)$. Найти площадь треугольника ABC.

Решение

Площадь треугольника ABC найдём по формуле:

$$S_{\Delta ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CH,$$

где AB – длина стороны треугольника, CH – длина высоты, проведенной к стороне AB.

Найдём длину стороны AB:

$$AB = \sqrt{(-4-(-3))^2+(2-5)^2} = \sqrt{(-1)^2+(-3)^2} = \sqrt{10}\,.$$

Длина высоты CH есть расстояние от точки C до прямой AB.

Составим уравнение прямой AB, как уравнение прямой, проходящей через заданные точки:

$$AB: \frac{x-(-3)}{-4-(-3)} = \frac{y-5}{2-5} \Leftrightarrow \frac{x+3}{-1} = \frac{y-5}{-3} \Leftrightarrow (-3)\cdot(x+3) = (-1)\cdot(y-5) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 3x - y + 14 = 0.$$

Расстояние от точки $M_0(x_0;y_0)$ до прямой $Ax+By+C=0$ найдем по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Тогда длина высоты CH равна:

$$CH = \frac{|3\cdot 3 - 1\cdot(-1)+14|}{\sqrt{3^2+(-1)^2}} = \frac{|9+1+14|}{\sqrt{9+1}} = \frac{24}{\sqrt{10}}.$$

Отсюда:

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}\cdot\sqrt{10}\cdot\frac{24}{\sqrt{10}} = \frac{24}{2} = 12.$$

Ответ: 12.

№4. Найти расстояние от точки $D(1;7;1)$ до плоскости, проходящей через точки $A(2;5;3)$, $B(-1;4;2)$ и $C(-2;3;2)$.

Решение

Уравнение плоскости, проходящей через три заданные точки, имеет вид:

$$\begin{vmatrix} x-x_1 & y-y_1 & z-z_1 \\ x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix} = 0.$$

Тогда уравнение плоскости ABC будет:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-3 \\ -1-2 & 4-5 & 2-3 \\ -2-2 & 3-5 & 2-3 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Вычислим определитель, разложив его по элементам первой строки:

$$\begin{vmatrix} x-2 & y-5 & z-3 \\ -3 & -1 & -1 \\ -4 & -2 & -1 \end{vmatrix} = (x-2)\cdot\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -2 & -1 \end{vmatrix} - (y-5)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -1 \end{vmatrix} + (z-3)\cdot\begin{vmatrix} -3 & -1 \\ -4 & -2 \end{vmatrix} =$$

$$= -(x-2)+(y-5)+2(z-3) = -x+y+2z-9.$$

Таким образом, уравнение плоскости запишется в виде:

$$x - y - 2z + 9 = 0.$$

Расстояние от точки $D(x_0, y_{0,} z_0)$ до плоскости $AB\tilde{N}: Ax + By + Cz + D = 0$ найдем по формуле:

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Имеем:

$$d = \frac{|1 \cdot 1 - 1 \cdot 7 - 2 \cdot 1 + 9|}{\sqrt{1^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{|1 - 7 - 2 + 9|}{\sqrt{1 + 1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{6}}.$$

Ответ: $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

№5. Установить взаимное расположение прямой $L: \frac{x-3}{-3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z+6}{4}$ и плоскости $\beta: 4x + 5y + z - 4 = 0$.

Решение

Для того, чтобы установить взаимное расположение прямой L и плоскости β, решим систему:

$$\begin{cases} \frac{x-3}{-3} = \frac{y-4}{6} = \frac{z+6}{4} \\ 4x + 5y + z - 4 = 0. \end{cases}$$

Запишем уравнение прямой L в параметрическом виде:

$$\begin{cases} x = 3 - 3t, \\ y = 4 + 6t, \\ z = -6 + 4t. \end{cases}$$

Полученные выражения для x, y, z подставим в уравнение плоскости β:

$$4(3 - 3t) + 5(4 + 6t) + (-6 + 4t) - 4 = 0 \Leftrightarrow 22t + 22 = 0 \Leftrightarrow t = -1.$$

Так как система имеет единственное решение, то прямая пересекает плоскость. Найдем координаты точки пересечения. Для этого подставим найденное значение t в параметрическое уравнение прямой:

$$\begin{cases} x = 3 - 3 \cdot (-1) = 6, \\ y = 4 + 6 \cdot (-1) = -2, \\ z = -6 + 4 \cdot (-1) = -10. \end{cases}$$

Таким образом, координаты точки пересечения прямой и плоскости $(6; -2; -10)$.

Ответ: Прямая пересекает плоскость в точке $(6; -2; -10)$

VII. Решение практических заданий по разделу «Предел и непрерывность»

№1. Вычислить предел:

$$\text{а) } \lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{2x^2+x-1};\quad \text{б) } \lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-6x+5}{2x^5+4x^2-8}.$$

Решение

а) При $x=-1$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то есть мы имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$.

Разложим числитель и знаменатель на множители.

Квадратное уравнение $x^2-5x-6=0$ имеет корни (-1) и 6. Значит,

$$x^2-5x-6=(x+1)(x-6).$$

Квадратное уравнение $2x^2+x-1=0$ имеет корни (-1) и $0{,}5$. Значит,

$$2x^2+x-1=2(x+1)(x-0{,}5)=(x+1)(2x-1).$$

Тогда:

$$\lim_{x\to -1}\frac{x^2-5x-6}{2x^2+x-1}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to -1}\frac{(x+1)(x-6)}{(x+1)(2x-1)}=\lim_{x\to -1}\frac{x-6}{2x-1}=\frac{-1-6}{-2-1}=\frac{-7}{-3}=\frac{7}{3}.$$

Ответ: $\frac{7}{3}$.

б) При $x\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, то есть мы имеем неопределённость вида $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^3-6x+5}{2x^5+4x^2-8}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^5\left(\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right)}{x^5\left(2+\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^5}\right)}=\frac{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{3}{x^2}-\frac{6}{x^4}+\frac{5}{x^5}\right)}{\lim\limits_{x\to\infty}\left(2+\frac{4}{x^3}-\frac{8}{x^5}\right)}=\frac{0}{2}=0,$$

так как $\frac{3}{x^2},\left(-\frac{6}{x^4}\right),\frac{5}{x^5},\frac{4}{x^3},\left(-\frac{8}{x^5}\right)$ стремятся к нулю при $x\to\infty$.

Ответ: 0.

№2. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}$.

Решение

При $x=3$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то есть мы имеем неопределённость вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределённости умножим числитель и знаменатель на выражение, сопряжённое числителю:

$$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{4x-3}-3}{x^2-9}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{4x-3}-3\right)\cdot\left(\sqrt{4x-3}+3\right)}{\left(x^2-9\right)\cdot\left(\sqrt{4x-3}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{4x-3}\right)^2-3^2}{(x-3)\cdot(x+3)\cdot\left(\sqrt{4x-3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{4x-12}{(x-3)\cdot(x+3)\cdot\left(\sqrt{4x-3}+3\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 3}\frac{4(x-3)}{(x-3)\cdot(x+3)\cdot\left(\sqrt{4x-3}+3\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{4}{(x+3)\cdot\left(\sqrt{4x-3}+3\right)}=$$

$$=\frac{4}{(3+3)\cdot\left(\sqrt{4\cdot 3-3}+3\right)}=\frac{4}{6\cdot 6}=\frac{4}{36}=\frac{1}{9}.$$

Ответ: $\frac{1}{9}$.

№3. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{3x\,\mathrm{tg}x}{\sin^2 x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{3x\,\mathrm{tg}x}{\sin^2 x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x\cdot\frac{\sin x}{\cos x}}{\sin^2 x}=\left[\frac{0}{0}\right]=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\cos x\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{3x}{\cos x\cdot\left(\frac{\sin x}{x}\right)\cdot x}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{3}{\cos x}=\frac{3}{1}=3,$$

так как $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ (первый замечательный предел), $\lim\limits_{x\to 0}\cos x=1$.

Ответ: 3.

№4. Вычислить предел $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{e^{2x}-1}$, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin x)}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{2x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{2}=\frac{1}{2}=0{,}5,$$

так как $\ln(1+\sin x)\sim\sin x$, $e^{2x}-1\sim 2x$, $\sin x\sim x$ при $x\to 0$.

Ответ: $0{,}5$.

№5. Исследовать функцию на непрерывность и построить её график:

$$f(x)=\begin{cases}2-x,\ \text{ï ðè}\ x\le -2;\\ x^2,\ \text{ï ðè}\ -2<x\le 2;\\ 5,\ \text{ï ðè}\ x>2.\end{cases}$$

Решение

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;2)$, $(2;\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями. Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=-2$ и $x_2=2$.

Для точки $x_1=-2$ имеем:

$$f(-2-0)=\lim_{x\to-2-0} f(x)=\lim_{x\to-2-0}(2-x)=4,$$

$$f(-2+0)=\lim_{x\to-2+0} f(x)=\lim_{x\to-2+0} x^2=4,$$

$$f(x_1)=f(-2)=2-x\Big|_{x=-2}=4.$$

Так как $f(-2-0)=f(-2+0)=f(-2)$, то функция $f(x)$ в точке $x_1=-2$ является непрерывной.

Для точки $x_2=2$ имеем:

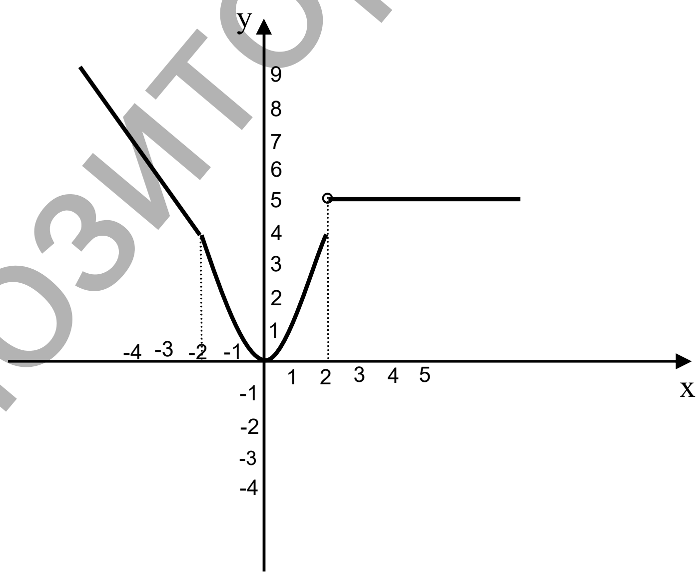
$$f(2-0)=\lim_{x\to2-0} f(x)=\lim_{x\to2-0} x^2=4,$$

$$f(2+0)=\lim_{x\to2+0} f(x)=\lim_{x\to2+0} 5=5,$$

$$f(x_2)=f(2)=x^2\Big|_{x=2}=4.$$

Так как $\lim\limits_{x\to2-0} f(x)\neq\lim\limits_{x\to2+0} f(x)$, но оба существуют и конечны, то функция $f(x)$ в точке $x_2=2$ имеет разрыв первого рода со скачком функции: $|4-5|=1$.

График функции имеет вид:



VIII. Решение практических заданий по разделу «Дифференциальное исчисление функций одной переменной»

№1. Найти производную функции $y=3x^5-5\sqrt{x}-\sqrt[5]{x^4}+\dfrac{4}{x}+2$.

Решение

$$y' = \left(3x^5 - 5\sqrt{x} - \sqrt[5]{x^4} + 4x^{-1} + 2\right)' = \left(3x^5 - 5x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{4}{5}} + 4x^{-1} + 2\right)' =$$

$$= \left(3x^5\right)' - \left(5x^{\frac{1}{2}}\right)' - \left(x^{\frac{4}{5}}\right)' + \left(4x^{-1}\right)' + (2)' = 3\cdot 5x^4 - 5\cdot\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} + 4\cdot(-1)x^{-2} =$$

$$= 15x^4 - \frac{5}{2}x^{-\frac{1}{2}} - \frac{4}{5}x^{-\frac{1}{5}} - 4x^{-2} = 15x^4 - \frac{5}{2\sqrt{x}} - \frac{4}{5\sqrt[5]{x}} - \frac{4}{x^2}.$$

№2. Найти производную функции $y = \sin^3(3x)\cdot\ln(x - 3x^2)$.

Решение

$$y' = \left(\sin^3(3x)\right)'\cdot\ln(x-3x^2) + \sin^3(3x)\cdot\left(\ln(x-3x^2)\right)' =$$

$$= 3\sin^2(3x)\cdot\left(\sin(3x)\right)'\cdot\ln(x-3x^2) + \sin^3(3x)\cdot\frac{1}{x-3x^2}\cdot\left(x-3x^2\right)' =$$

$$= 9\sin^2(3x)\cdot\cos(3x)\cdot\ln\left(x-3x^2\right) + \sin^3(3x)\cdot\frac{1}{x-3x^2}\cdot(1-6x) =$$

$$= 9\sin^2(3x)\cdot\cos(3x)\cdot\ln(x-3x^2) + \sin^3(3x)\cdot\frac{1-6x}{x-3x^2}.$$

№3. Найти производную функции $y = \dfrac{\operatorname{tg}(\ln 2x)}{\sqrt{x^2+9x}}$.

Решение

$$y' = \left(\frac{\operatorname{tg}(\ln 2x)}{\sqrt{x^2+9x}}\right)' = \frac{\left(\operatorname{tg}(\ln 2x)\right)'\cdot\sqrt{x^2+9x} - \operatorname{tg}(\ln 2x)\cdot\left(\sqrt{x^2+9x}\right)'}{\left(\sqrt{x^2+9x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2(\ln 2x)}\cdot(\ln 2x)'\cdot\sqrt{x^2+9x} - \operatorname{tg}(\ln 2x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+9x}}\cdot\left(x^2+9x\right)'}{\left(\sqrt{x^2+9x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\frac{1}{\cos^2(\ln 2x)}\cdot\frac{1}{2x}\cdot(2x)'\cdot\sqrt{x^2+9x} - \operatorname{tg}(\ln 2x)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x^2+9x}}\cdot(2x+9)}{\left(\sqrt{x^2+9x}\right)^2} =$$

$$= \frac{\dfrac{2\sqrt{x^2+9x}}{2x\cdot\cos^2(\ln 2x)} - \dfrac{\operatorname{tg}(\ln 2x)\cdot(2x+9)}{2\sqrt{x^2+9x}}}{\left(\sqrt{x^2+9x}\right)^2}.$$

№4. Найти предел, используя правило Лопиталя: $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 8x}{x-\sin x}$.

Решение

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 8x}{x-\sin x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to 0}\frac{(1-\cos 8x)'}{(x-\sin x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{8\sin 8x}{1-\cos x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(8\sin 8x)'}{(1-\cos x)'} = \lim_{x\to 0}\frac{64\cos 8x}{\sin x} = \infty.$$

Ответ: ∞.

№5. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума функции, максимум и минимум функции, промежутки вогнутости и выпуклости, точки перегиба графика функции

$$y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x + 12.$$

Решение

Функция $y = \frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x + 12$ определена на всей числовой прямой.

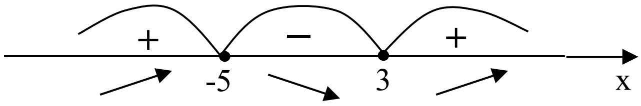
Найдём критические точки функции из равенства $y' = 0$:

$$y' = \left(\frac{1}{3}x^3 + x^2 - 15x + 12\right)' = x^2 + 2x - 15,$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0.$$

Откуда получим, что $x_1 = 3$ и $x_2 = -5$ – критические точки функции y.

Эти точки разбивают область определения функции y на промежутки $(-\infty;-5)$, $(-5;3)$, $(3;+\infty)$. Определим знак производной y' на каждом из этих промежутков:



Т.о., функция y возрастает на промежутках $(-\infty;-5)$ и $(3;+\infty)$ и убывает на промежутке $(-5;3)$. При этом точка $x = -5$ является точкой максимума функции, а точка $x = 3$ – её точкой минимума.

Максимум и минимум функции:

$$y_{\max} = y(-5) = \frac{1}{3}\cdot(-5)^3 + (-5)^2 - 15\cdot(-5) + 12 = \frac{211}{3},$$

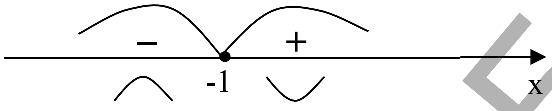
$$y_{\min} = y(3) = \frac{1}{3}\cdot 3^3 + 3^2 - 15\cdot 3 + 12 = -15.$$

Для определения промежутков выпуклости и вогнутости функции находим вторую производную и приравниваем её к нулю:

$$y'' = \left(x^2 + 2x - 15\right)' = 2x + 2.$$

$$2x + 2 = 0 \Leftrightarrow x = -1.$$

Точка $x = -1$ разбивает область определения функции y на промежутки $(-\infty;-1)$ и $(-1;+\infty)$. Определим знак второй производной y'' на каждом из этих промежутков:



Т.о., график функции y является выпуклым на промежутке $(-\infty;-1)$ и вогнутым на промежутке $(-1;+\infty)$.

$$y(-1) = \frac{1}{3}(-1)^3 + (-1)^2 - 15\cdot(-1) + 12 = -\frac{1}{3} + 1 + 15 + 12 = \frac{83}{3},$$

точка $M\left(-1;\frac{83}{3}\right)$ является точкой перегиба графика функции.

Рекомендуемая литература

1. Гурский, Е.И. Основы линейной алгебры и аналитической геометрии / Е.И. Гурский. − Мн.: Выш. шк., 1982. − 272 с.

2. Гусак, А.А. Аналитическая геометрия и линейная алгебра: Справочное пособие к решению задач / А.А. Гусак. − Мн.: ТетраСистемс, 2003. − 288 с.

3. Гусак, А.А. Высшая математика: в 2-х частях / А.А. Гусак. − Мн.: ТетраСистемс, 2000-2001. − Т.1 544 с., Т.2. – 442 с.

4. Ермаков, В.И. Сборник задач по высшей математике для экономистов: Учебное пособие / Под ред. В.И. Ермакова. – М.: ИНФРА-М, 2002. – 575 с. – (Сер. “Высшее образование”).

5. Жевняк, Р. М. Общий курс высшей математики: учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / Р.М. Жевняк, А.А. Карпук, А.И. Марченко, В.Т. Унукович. – Орша: Оршанская типография, 1996. – 320 с.

6. Красс, М.С. Математика для экономических специальностей: учебник / М.С. Красс. – М.: ИНФРА-М, 1998. – 464 с.

7. Кремер, Н.Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 471 с.

8. Кузнецов, А.В. Высшая математика: Общий курс: учебник для студентов экономических специальностей вузов. / Под общ. ред. проф. А.И. Яблонского. – Мн: Выш. шк., 1993. – 349 с.

9. Кузнецов, А.В. Сборник задач и упражнений по высшей математике: Общий курс: учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / А.В. Кузнецов, Д.С. Кузнецова, Е.И. Шилкина [и др.] – Мн: Выш. шк., 1994. – 284 с.

10. Малыхин, В.И. Математика в экономике: учебник / В.И. Малыхин. – М.: ИНФРА-М, 1999. – 356 с.

11. Минюк, С.А. Высшая математика: учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов / С.А. Минюк, Е.А. Ровба. – Гродно: ГрГУ, 2000. – 394 с.

12. Индивидуальные задания по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко, I-IIч. − Мн.: Выш. шк., 2004-2008. − Ч.1 304 с., Ч.2. – 367 с.

Содержание

Учебное издание

Составители:

Гладкий Иван Иванович,
Каримова Татьяна Ивановна,
Махнист Леонид Петрович,
Рубанов Владимир Степанович,
Юхимук Татьяна Юрьевна

ВЫСШАЯ МАТЕМАТИКА

Задания и методические рекомендации по выполнению заданий из курса «Высшая математика» для студентов экономических специальностей дневной формы обучения

Часть I

Ответственный за выпуск: Махнист Л.П.
Редактор: Строкач Т.В.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 21.04.2010 г. Формат 60x84 1/16. Бумага «Снегурочка».
Усл. п. л. 1,63. Уч. изд. л. 1,75. Заказ № 482. Тираж 100 экз.
Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.