Министерство образования Республики Беларусь

Учреждение образования
“Брестский государственный технический университет”

Кафедра высшей математики

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

**Методические указания и задания к контрольной работе по дисциплине ”Экономико-математические методы и модели”
для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения**

Брест 2004

УДК 330.115(075.8)
ББК 65.050я73
Г96

Учреждение образования
“Брестский государственный технический университет”
Кафедра высшей математики

Рекомендовано к изданию редакционно-издательским советом
Брестского государственного технического университета

С о с т а в и т е л и :
Гусева С.Т., доцент
Махнист Л.П., к.т.н., доцент
Рубанов В.С., к.ф.-м.н., доцент
Шамовская Г.В., ассистент

Р е ц е н з е н т :
зав. кафедрой алгебры и геометрии
Брестского государственного университета,
канд. физ.-мат.наук, доцент Савчук В.Ф.

Гусева С.Т., Махнист Л.П., Рубанов В.С., Шамовская Г.В.
Экономико-математические методы и модели: Методические указания и задания к контрольной работе по дисциплине ”Экономико-математические методы и модели” для студентов экономических специальностей заочной формы обучения – Брест: УО “БГТУ”, 2004. – 28 с.

В учебном издании предложены задания к контрольной работе по курсу “Экономико-математические методы и модели” для студентов экономических специальностей заочной формы обучения. Приведено подробное решение типовых задач по моделям динамического программирования, моделям управления запасами, цепям Маркова, элементам теории массового обслуживания, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

Для студентов экономических специальностей заочной формы обучения.

УДК 330.115(075.8)
ББК 65.050я73

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Учебное издание составлено в соответствии с программой дисциплины “Экономико-математические методы и модели”, утвержденной Советом Брестского государственного технического университета для специальностей:

- “Бухгалтерский учет, анализ и аудит”,
- “Коммерческая деятельность”,
- “Маркетинг”,
- “Мировая экономика и международные экономические отношения”,
- “Финансы и кредит”,
- “Экономика и управление на предприятии”

на основе Государственных образовательных стандартов в области высшей математики, экономико-математических методов и моделей для специалистов с высшим образованием по экономическим специальностям.

Круг тем, рассматриваемых в учебном издании, опирается на знания основных разделов дисциплины “Высшая математика”, таких как “Математическое программирование”, “Теория вероятностей и математическая статистика”, “Линейная алгебра”, “Математический анализ”. Основное содержание этих тем заключается в раскрытии понятий и методов математического моделирования экономических систем и процессов. В пособии, в соответствие с требованиями общеобразовательных стандартов, рассматриваются, прежде всего, общесистемные экономико-математические методы и модели, общие для всех перечисленных специальностей, такие как модели динамического программирования, управления запасами, марковских случайных процессов, систем массового обслуживания.

Круг вопросов определяет и содержание предлагаемой контрольной работы. В разделе I “Задания к контрольной работе по дисциплине “Экономико-математические методы и модели” предложены задачи по моделям динамического программирования, управления запасами, марковских случайных процессов, систем массового обслуживания.

В разделе II “Решение типового варианта” приводится подробное решение заданий, даются некоторые методические рекомендации полезные для успешного их выполнения.

При написании издания авторами широко использовались книги: “Экономико-математические методы и модели”, “Высшая математика.

Математическое программирование", "Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование" под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова [18, 11, 12], "Исследование операций в экономике" под ред. проф. Н.Ш. Кремера [10], "Теория игр. Исследование операций" Костевича Л.С., Лапко А.А. [8] и источники [3, 6, 15, 16].

Учебное издание подготовлено преподавателями кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета на основе курса лекций и практических занятий по дисциплине "Экономико-математические методы и модели" для студентов экономических специальностей зав. кафедрой, канд. физ.-мат. наук, доц. *Рубановым В.С.*, канд. техн. наук, доц. *Махнистом Л.П.*, доцентом кафедры *Гусевой С.Т.*, ассистентом *Шамовской Г.В.*

РАЗДЕЛ I. ЗАДАНИЯ К КОНТРОЛЬНОЙ РАБОТЕ ПО ДИСЦИПЛИНЕ “ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ”

1. Задача о замене оборудования

Задание № 1.1-1.30

В начале планового периода продолжительностью в N лет имеется оборудование возраста t. Известны стоимость $r(t)$ продукции, производимой в течение года с использованием этого оборудования; ежегодные расходы $\lambda(t)$, связанные с эксплуатацией оборудования; его остаточная стоимость s; стоимость p нового оборудования (сюда же включены затраты, связанные с установкой, наладкой и запуском оборудования) (табл. 1).

Требуется:

1) пользуясь функциональными уравнениями, составить матрицу максимальных прибылей $F_n(t)$ за N лет;

2) сформировать по матрице максимальных прибылей оптимальные стратегии замены оборудования данных возрастов T и T_1 лет в плановом периоде продолжительностью соответственно N и N_1 лет.

Таблица 1

Вар. №		**Возраст оборудования**										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
1, 16	$r(t)$	20	20	20	19	19	18	18	17	17	16	15
	$\lambda(t)$	10	11	12	12	13	13	14	14	15	15	15
	$N=$	10	$N_1=$	8	$T=$	7	$T_1=$	1	$s(t)=$	1	$p=$	10
2, 17	$r(t)$	22	22	21	21	21	20	20	19	19	19	18
	$\lambda(t)$	12	13	13	14	15	15	16	16	17	18	18
	$N=$	10	$N_1=$	6	$T=$	7	$T_1=$	4	$s(t)=$	2	$p=$	11
3, 18	$r(t)$	25	24	24	23	22	21	21	21	21	20	20
	$\lambda(t)$	13	13	14	15	15	16	16	17	18	19	20
	$N=$	10	$N_1=$	7	$T=$	8	$T_1=$	5	$s(t)=$	2	$p=$	13
4, 19	$r(t)$	28	27	27	26	25	25	24	23	23	22	21
	$\lambda(t)$	16	16	17	17	17	18	18	19	20	20	21
	$N=$	10	$N_1=$	8	$T=$	6	$T_1=$	5	$s(t)=$	0	$p=$	10
5, 20	$r(t)$	21	20	19	19	18	18	17	16	16	15	15
	$\lambda(t)$	11	11	11	12	12	13	13	13	14	14	15
	$N=$	10	$N_1=$	6	$T=$	8	$T_1=$	4	$s(t)=$	3	$p=$	10
6, 21	$r(t)$	24	24	24	23	23	22	21	21	21	20	20
	$\lambda(t)$	13	14	15	16	17	17	17	18	19	19	20
	$N=$	10	$N_1=$	9	$T=$	7	$T_1=$	6	$s(t)=$	0	$p=$	8

Вар. №		Возраст оборудования										
		0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
7, 22	$r(t)$	28	27	26	25	24	24	23	22	22	22	21
	$\lambda(t)$	15	15	16	17	17	18	19	20	20	21	21
	N=	10	N_1=	8	T=	6	T_1=	5	$s(t)$=	5	p=	17
8, 23	$r(t)$	20	20	19	18	17	16	16	15	15	14	13
	$\lambda(t)$	8	9	9	10	10	10	11	11	12	13	13
	N=	10	N_1=	7	T=	9	T_1=	4	$s(t)$=	2	p=	12
9, 24	$r(t)$	26	25	25	24	24	23	23	23	22	21	21
	$\lambda(t)$	15	15	16	16	17	17	18	19	19	20	21
	N=	10	N_1=	9	T=	6	T_1=	8	$s(t)$=	0	p=	6
10, 25	$r(t)$	23	23	22	22	21	20	20	20	19	18	18
	$\lambda(t)$	11	12	13	14	14	15	16	17	17	17	18
	N=	10	N_1=	6	T=	9	T_1=	3	$s(t)$=	1	p=	12
11, 26	$r(t)$	22	22	22	21	20	20	19	18	17	16	16
	$\lambda(t)$	12	12	12	13	13	14	14	14	15	15	16
	N=	10	N_1=	6	T=	8	T_1=	1	$s(t)$=	1	p=	10
12, 27	$r(t)$	27	26	25	25	25	24	24	23	22	22	21
	$\lambda(t)$	15	16	17	17	18	18	19	20	20	21	21
	N=	10	N_1=	8	T=	7	T_1=	3	$s(t)$=	0	p=	8
13, 28	$r(t)$	25	24	24	24	24	23	22	22	21	21	20
	$\lambda(t)$	12	13	14	15	15	16	17	18	18	19	20
	N=	10	N_1=	6	T=	6	T_1=	4	$s(t)$=	4	p=	9
14, 29	$r(t)$	30	29	29	28	27	26	25	23	21	20	19
	$\lambda(t)$	12	13	13	14	14	15	15	16	17	18	19
	N=	10	N_1=	7	T=	9	T_1=	4	$s(t)$=	0	p=	10
15, 30	$r(t)$	29	28	28	27	25	25	24	23	22	21	21
	$\lambda(t)$	14	14	15	16	17	17	18	19	20	21	21
	N=	10	N_1=	6	T=	6	T_1=	3	$s(t)$=	4	p=	14

2. Модель определения оптимального размера партии при непрерывном поступлении заказа

<u>Задание № 2.1-2.30</u>

Предположим, что спрос составляет ν единиц товара в год, которые поставляются равномерно и непрерывно со склада. Организационные издержки составляют K (у. е.) за одну партию, а издержки хранения равны s (у. е.) в расчете на одну единицу товара в год. Запасы на складе пополняются с некоторой производственной линии, которая работает со скоростью λ единиц товара в год. Производственная линия начинает действовать, как только уровень запасов на складе становится равным нулю, и продолжает работу до тех пор, пока не будет произведено q единиц товара (табл. 2).

Требуется:

1) найти размер партии, который минимизирует все затраты;

2) минимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и содержание запасов;

3) вычислить время, в течение которого продолжается поставка;

4) вычислить продолжительность цикла;

5) найти максимальный и средний уровень запасов при условии, что размер поставки оптимален.

6) нарисовать график изменения запасов;

7) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) оптимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов при увеличении (уменьшении) оптимальной партии поставки на α%;

8) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) оптимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов с изменением оптимальной партии поставки при увеличении (уменьшении) издержек хранения единицы продукции на β% и накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ%;

9) определить на сколько % изменятся (увеличатся или уменьшатся) оптимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и хранение запасов без изменения оптимальной партии поставки при увеличении (уменьшении) издержек хранения единицы продукции на β% и накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ%.

Таблица 2

Вар. №	λ	ν	K	s	α	β	γ
1, 16	6000	2000	20	0,1	85	75	80
2, 17	5900	2100	25	0,2	80	65	70
3, 18	5800	2200	30	0,3	75	55	60
4, 19	5700	2300	35	0,4	70	45	50
5, 20	5600	2400	40	0,5	65	35	40
6, 21	5500	2500	45	0,6	60	25	30
7, 22	5400	2600	50	0,7	55	15	20
8, 23	5300	2700	55	0,8	50	80	10
9, 24	5200	2800	60	0,9	45	70	75
10, 25	5100	2900	65	1,0	40	60	65
11, 26	5000	3000	70	1,1	35	50	55
12, 27	4900	3100	75	1,2	30	40	45
13, 28	4800	3200	80	1,3	25	30	35
14, 29	4700	3300	85	1,4	20	20	25
15, 30	4600	3400	90	1,5	15	10	15

3. Регулярные марковские цепи

<u>Задание № 3.1-3.30</u>

Предприятие A независимо от выполнения плана в предыдущем месяце в следующем план перевыполнит с вероятностью p, не выполнит с вероятностью q и выполнит план на 100% с вероятностью $r=1-p-q$. Предприятие B план перевыполнит с вероятностью $p+\varepsilon$, p, $p-\varepsilon$ соответственно, если в предыдущем месяце план перевыполнен, выполнен на 100% и не выполнен. Вероятности невыполнения плана при этом будут равны $q-\varepsilon$, q, $q+\varepsilon$ (табл. 3). Найти финальные вероятности для A и B и исследовать их.

Таблица 3

Вариант №	***p***	***q***	**ε**
1, 16	0,1	0,1	0,05
2, 17	0,2	0,15	0,05
3, 18	0,15	0,2	0,05
4, 19	0,2	0,15	-0,05
5, 20	0,15	0,2	-0,05
6, 21	0,2	0,2	-0,05
7, 22	0,25	0,15	0,1
8, 23	0,15	0,25	0,1
9, 24	0,25	0,15	-0,1
10, 25	0,15	0,25	-0,1
11, 26	0,15	0,15	0,1
12, 27	0,15	0,15	-0,1
13, 28	0,25	0,2	0,1
14, 29	0,25	0,2	-0,1
15, 30	0,2	0,25	0,1

4. Многоканальная СМО с отказами

<u>Задание № 4.1-4.30</u>

Имеется станция связи с n каналами, интенсивность потока заявок λ (заявки в минуту); среднее время обслуживания одной заявки $t_{об}$ (мин.), все потоки событий – простейшие (табл. 4). Найти финальные вероятности p_i (i=0, 1, 2, ..., n) состояний и характеристики эффективности СМО:

A – абсолютную пропускную способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени);

Q – относительную пропускную способность (среднюю долю пришедших заявок, обслуживаемых системой);

$P_{отк}$ – вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслуженной);

$N_з$ – среднее число занятых каналов;

$N_п$ – среднее число простаивающих каналов;

$k_з$ – коэффициент загрузки каналов;

$k_п$ – коэффициент простоя каналов.

Сколько требуется каналов для того, чтобы удовлетворить не менее q % поступающих заявок? И какая доля каналов при этом будет простаивать?

Таблица 4

Вариант №	***n***	$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{t_{об}}$	***q***
1, 16	4	3	3	50
2, 17	4	4	1	85
3, 18	4	3,5	2	60
4, 19	4	3,5	1	90
5, 20	4	2,5	3	60
6, 21	4	5	3	35
7, 22	4	4	2,5	50
8, 23	4	4	2	60
9, 24	4	3	3,5	45
10, 25	4	4	3	40
11, 26	5	5	1	85
12, 27	5	4,5	3	45
13, 28	5	3	1	95
14, 29	5	3	1,5	90
15, 30	4	4	3,5	35

РАЗДЕЛ II. РЕШЕНИЕ ТИПОВОГО ВАРИАНТА

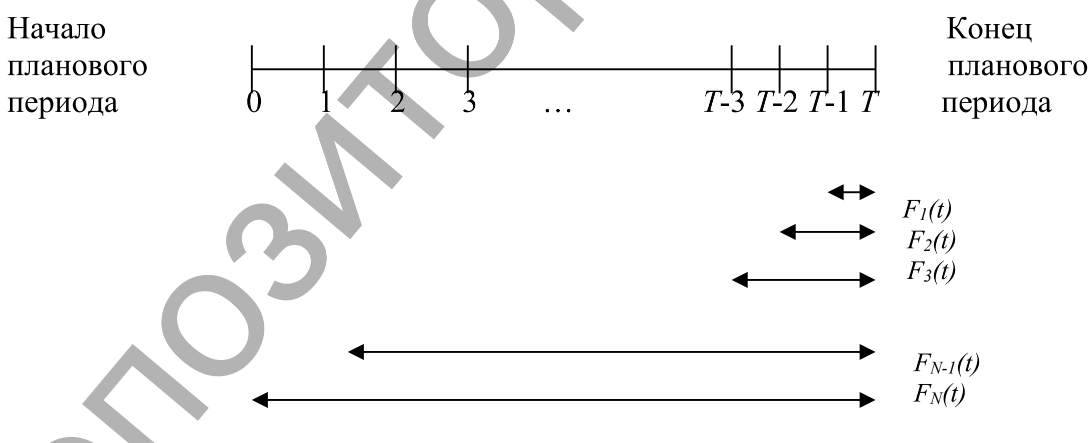
1. Задача о замене оборудования

<u>Решение задания № 1.1-1.30</u>

Исходные данные задания представлены в таблице:

	Возраст оборудования										
	0	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$r(t)$	30	30	29	29	29	28	28	27	27	26	24
$\lambda(t)$	10	10	12	13	14	15	16	17	18	19	20
N= 10		N_1= 8		T= 5		T_1= 6		$s(t)$= 2		p= 15	

Для решения задания применим принцип оптимальности Р. Беллмана. Рассмотрим интервалы времени, т. е. годы, планового периода от конца к началу. Обозначим функцию условно-оптимальных значений функции цели $F_k(t)$ – максимальную прибыль, которая будет получена от использования оборудования возраста t лет за последние k лет планового периода (см. рис. 1).



<u>Рис. 1</u>

Запишем функциональные уравнения для последнего года планового периода $F_1(t)$ и последних k лет планового периода $F_k(t)$ при исходных числовых значениях примера:

$$F_1(t)=\max_t\begin{cases} r(t)-\lambda(t) \\ s(t)-p+r(0)-\lambda(0)\end{cases}=\max_t\begin{cases} r(t)-\lambda(t) \\ 2-15+30-10\end{cases}=\max_t\begin{cases} r(t)-\lambda(t)\ \ (\text{сохранение}) \\ 7\ \ (\text{замена})\end{cases} \quad (1)$$

$$F_k(t)=\max_t\begin{cases} r(t)-\lambda(t)+F_{k-1}(t+1) \ (\textit{сохранение}) \\ 7+F_{k-1}(1) \ (\textit{замена}) \end{cases} \tag{2}$$

Пользуясь этими выражениями, будем последовательно вычислять значения максимальной прибыли $F_k(t)$ и записывать их в табл. 1. Первую строку получим, придавая параметру t в равенстве (1) значения 0, 1, 2, …, 10 и используя исходные данные. Например, при t=0

$$F_1(0)=\max_t\begin{cases} r(0)-\lambda(0) \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ (\textit{замена}) \end{cases}=\max_t\begin{cases} 30-10 \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ (\textit{замена}) \end{cases}=20 \ (\textit{сохранение}).$$

Аналогично расчет ведется до t=9:

$$F_1(9)=\max_t\begin{cases} r(9)-\lambda(9) \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ (\textit{замена}) \end{cases}=\max_t\begin{cases} 26-19 \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ (\textit{замена}) \end{cases}=7 \ (\textit{сохранние}).$$

Заметим, что если прибыль от нового оборудования равна прибыли от старого, то старое лучше сохранить еще на год. При t=10

$$F_1(10)=\max_t\begin{cases} r(10)-\lambda(10) \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ (\textit{замена}) \end{cases}=\max_t\begin{cases} 24-20 \ (\textit{сохранение}) \\ 7 \ (\textit{замена}) \end{cases}=7 \ (\textit{замена}).$$

Из табл. 1 видно, что $r(t)$-$\lambda(t)$ с ростом t убывает. Поэтому при t>9 оптимальной будет политика замены оборудования. Чтобы различать в результате какой политики получается условно-оптимальное значение прибыли, будем эти значения разграничивать (до t=9 включительно оптимальной является политика сохранения). Для заполнения второй строки табл. 1. используем формулу (2) для k=2:

$$F_2(t)=\max_t\begin{cases} r(t)-\lambda(t)+F_1(t+1) \ (\textit{сохранение}) \\ 7+F_1(1) \ (\textit{замена}) \end{cases}=\max_t\begin{cases} r(t)-\lambda(t)+F_1(t+1) \ (\textit{сохранение}) \\ 27 \ (\textit{замена}) \end{cases}.$$

Придавая параметру t значения 0, 1, 2, …, 10, используя исходные данные и значения $F_1(t+1)$ из первой строки таблицы, заполним вторую строку. Например, при t=4

$$F_2(4)=\max_t\begin{cases} r(4)-\lambda(4)+F_1(5) \\ 27 \end{cases}=\max_t\begin{cases} 29-14+13 \ (\textit{сохранение}) \\ 27 \ (\textit{замена}) \end{cases}=28 \ (\textit{сохранение}).$$

Для третьей строки таблицы используем формулу (2) для k=3:

$$F_3(t) = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) + F_2(t+1) & (\textit{сохранение}) \\ 7 + F_2(1) & (\textit{замена}) \end{cases} = \max_t \begin{cases} r(t) - \lambda(t) + F_2(t+1) & (\textit{сохранение}) \\ 44 & (\textit{замена}) \end{cases}$$

и т. д.

Таблица 1

t	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
$F_1(t)$	20	20	17	***16***	***15***	13	12	10	9	7	7
$F_2(t)$	40	37	***33***	***31***	28	27	27	27	27	27	27
$F_3(t)$	57	***53***	***48***	44	44	44	44	44	44	44	44
$F_4(t)$	73	***68***	61	60	***60***	60	60	60	60	60	60
$F_5(t)$	88	81	77	***76***	75	***75***	75	75	75	75	75
$F_6(t)$	101	97	***93***	91	***90***	88	88	88	88	88	88
$F_7(t)$	117	***113***	108	***106***	104	104	104	104	104	104	104
$F_8(t)$	133	128	***123***	120	120	120	***120***	120	120	120	120
$F_9(t)$	148	***143***	137	136	135	135	135	135	135	135	135
$F_{10}(t)$	163	157	153	151	150	***150***	150	150	150	150	150

Пусть, например, в начале планового периода имелось оборудование возраста T=5 лет. Разработаем политику "замен" на десятилетний период, доставляющий максимальную прибыль. Информация для этого представлена в табл. 1. Максимальная прибыль, которую можно получить за N=10 лет при условии, что в начале планового периода имелось оборудование возраста 5 лет, находится в табл. 1 на пересечении столбца t=5 строки $F_{10}(t)$; она составляет 150 единиц.

Значение максимальной прибыли $F_{10}(5)$=150 записано в области "политики замены". Это значит, что для достижения в течение 10 лет максимальной прибыли в начале первого года оборудование надо заменить. В течение первого года новое оборудование постареет на год, т.е., заменив оборудование и проработав на нем 1 год, мы за 9 лет до конца планового периода будем иметь оборудование возраста 1 год. Из табл. 1 берем $F_9(1)$=143. Это значение располагается в области "политики сохранения", т. е. во втором году планового периода надо сохранить оборудование возраста 1 год, и, проработав на нем год, за 8 лет до конца планового периода будем иметь оборудование возраста 2 года.

Значение $F_8(2)$=123 помещено в области сохранения. Работаем на оборудовании еще год. Теперь до конца планового периода осталось 7 лет, а возраст оборудования составляет 3 года. Находим $F_7(3)$=106. Это область сохранения. Работаем на оборудовании еще год. Его возраст становится равным 4 годам. До конца планового периода остается 6 лет. Определяем $F_6(4)$=90. Это область сохранения. Работаем на оборудовании еще год. Его возраст становится равным 5 годам. До конца планового периода остается 5 лет. Определяем $F_5(5)$=75. Это область замен. Заменяем оборудование на новое. Проработаем на нем в течение пятого года. Оно постареет на год. До конца планового периода остается 4 года. Продолжая подобные рассуждения, получим, что $F_4(1)$=68, $F_3(2)$=48, $F_2(3)$=31, $F_1(4)$=15 расположены в области сохранения. Разработанную политику изобразим следующей цепочкой:

$$F_{10}(5) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{1-год}} F_9(1) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{2-год}} F_8(2) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{3-год}} F_7(3) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{4-год}} F_6(4) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{5-год}}$$

$$F_5(5) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{6-год}} F_4(1) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{7-год}} F_3(2) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{8-год}} F_2(3) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{9-год}} F_1(4) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{10-год}}$$

Из табл. 1 можно найти оптимальную стратегию замены оборудования с любым начальным состоянием от 0 до 10 лет и на любой плановый период, не превосходящий 10 лет. Например, найдем “политику замен” на плановый период в N_1=8 лет, если вначале имелось оборудование шестилетнего возраста (T_1=6):

$$F_8(6) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{1-год}} F_7(1) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{2-год}} F_6(2) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{3-год}} F_5(3) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{4-год}}$$

$$F_4(4) \xrightarrow[\text{замена}]{\text{5-год}} F_3(1) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{6-год}} F_2(2) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{7-год}} F_1(3) \xrightarrow[\text{сохран.}]{\text{8-год}}$$

■

2. Модель определения оптимального размера партии при непрерывном поступлении заказа

<u>**Решение задания № 2.1-2.30**</u>

Исходные данные: λ=4000; ν=2000; K=20; s=0,1; α=50; β=1; γ=4.

Товар поступает на склад с производственной линии с постоянной интенсивностью λ=4000 ед. в год. На склад товар поступает партиями размером q ед. Пополнение склада происходит в каждом цикле за время τ_1, а потребление – за $\tau=\tau_1+\tau_2$. Абсолютная интенсивность увеличения запасов определяется разностью λ-ν, где ν=2000 ед. в год – интенсивность расходования запасов. Максимальный уровень запасов за время τ_1 возрастет на величину $p=(\lambda-\nu)\tau_1$. Так как $\tau_1=\dfrac{q}{\lambda}$, величина среднего запаса равна $(\lambda - \nu)\dfrac{q}{2\lambda}$. Учитывая, что запас p, накопленный в интервале τ_1, полностью расходуется за время τ_2, имеем $p=\nu\tau_2$. Тогда получим $\nu\tau_2 = (\lambda - \nu)\dfrac{q}{\lambda}$. Следовательно, $\tau_2 = (\lambda - \nu)\dfrac{q}{\lambda\nu}$. Поэтому

$$\tau = \tau_1 + \tau_2 = \frac{q}{\lambda} + (\lambda - \nu)\frac{q}{\lambda\nu} = \frac{q}{\nu}.$$

Определим суммарные затраты, связанные с организацией заказов, и содержанием запасов, приходящиеся на один цикл: $L_ц = K + s\cdot(\lambda - \nu)\dfrac{q}{2\lambda}\cdot\tau = K + s\cdot(\lambda-\nu)\dfrac{q^2}{2\lambda\nu}$. Разделив это выражение на длину цикла $\tau = \dfrac{q}{\nu}$, получим величину издержек в единицу времени:

$$L = \frac{K\nu}{q} + (\lambda - \nu)\frac{sq}{2\lambda}.$$

Оптимальный объем партии поставки q^*, минимизирующий общие затраты, вычислим, приравнивая к нулю производную:

$$\left(\frac{dL}{dq} = -\frac{K\nu}{q^2} + \frac{s(\lambda-\nu)}{2\lambda} = 0\right) \Rightarrow \left(q^2 = \frac{2K\nu}{s\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}\right).$$

Следовательно, $q^* = \sqrt{\dfrac{2K\nu\lambda}{s(\lambda-\nu)}} = \sqrt{\dfrac{2K\nu}{s\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}}$. Тогда оптимальный интервал возобновления заказов: $\tau^* = \dfrac{q^*}{\nu} = \sqrt{\dfrac{2K}{s\nu\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}}$.

Найдем оптимальные издержки в единицу времени:

$$L^* = \frac{K\nu}{q^*} + (\lambda-\nu)\frac{sq^*}{2\lambda} = K\nu\sqrt{\frac{s\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}{2K\nu}} + \frac{s\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}{2}\cdot\sqrt{\frac{2K\nu}{s\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}} =$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{2Ks\nu\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)}+\frac{1}{2}\sqrt{2Ks\nu\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)}=\sqrt{2Ks\nu\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)}$$

или $L^*=q^*\left(\frac{K\nu}{(q^*)^2}+\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)\frac{s}{2}\right)=q^*\left(\frac{K\nu}{(q^*)^2}+\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)\frac{s}{2}\right)=sq^*\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right).$

1) Размер партии, который минимизирует все затраты:

$$q^*=\sqrt{\frac{2K\nu}{s\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)}}=\sqrt{\frac{2\cdot 20\cdot 2000}{0{,}1\left(1-\frac{2000}{4000}\right)}}=\sqrt{\frac{80000}{0{,}05}}=\sqrt{1600000}\approx 1265 \text{ ед. товара.}$$

2) Минимальные среднегодовые издержки на размещение заказов и содержание запасов составят:

$$L^*=sq^*\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)=0{,}1\cdot 1265\cdot(1-0{,}5)=63{,}25 \text{ (у. е. в год).}$$

3) Продолжительность поставки: $\tau_1=\frac{q^*}{\lambda}=\frac{1265}{4000}\approx 0{,}3163$ года, что составляет 0,3163·365≈115 дней.

4) Продолжительность цикла: $\tau^*=\frac{q^*}{\nu}=\frac{1265}{2000}\approx 0{,}6325$ года, что составляет 0,6325·365≈231 день.

5) Максимальный уровень запасов:

$$p^*=(\lambda-\nu)\tau_1=\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)q^*=\frac{1265}{2}\approx 632 \text{ ед. товара.}$$

Средний уровень запасов:

$$\frac{p^*}{2}=\frac{1}{2}(\lambda-\nu)\tau_1=\frac{(\lambda-\nu)q^*}{2\lambda}=\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)\frac{q^*}{2}=\frac{1265}{4}\approx 316 \text{ ед. товара.}$$

6) График изменения запасов изображен на рис. 2. Заметим, что масштаб выбирается в зависимости от того, как соотносятся полученные значения τ^* и τ_1.

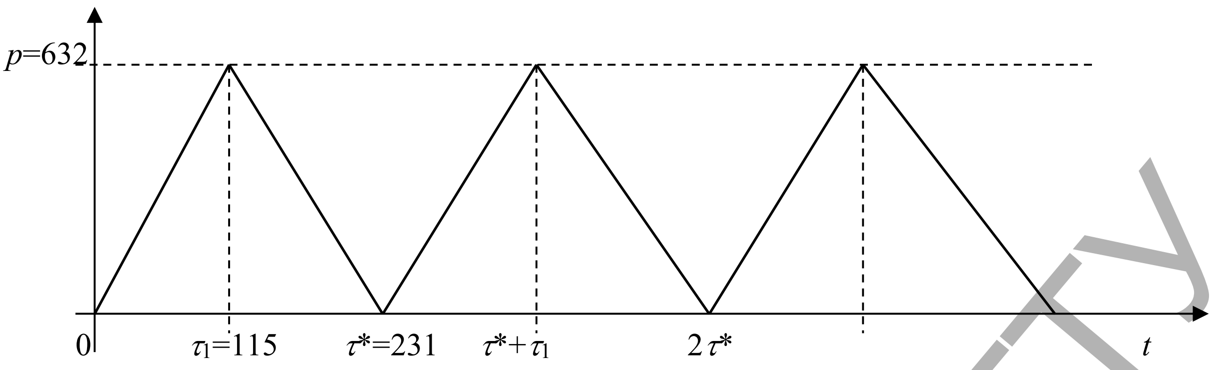


Рис. 2

7) Заметим, что

$$\frac{L}{L^*}=\frac{\frac{K\nu}{q}+\frac{sq}{2}\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)}{sq^*\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)}=\frac{2K\nu}{s\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)(q^*)^2}\cdot\frac{1}{2\left(\frac{q}{q^*}\right)}+\frac{q}{2q^*}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\varepsilon}+\varepsilon\right)=\frac{\varepsilon^2+1}{2\varepsilon},$$

где $\varepsilon=\dfrac{q}{q^*}$.

Тогда в случае увеличения оптимальной партии поставки на α=50%, получим $\varepsilon=\frac{1+0{,}5}{1}=1{,}5$. Следовательно, $\frac{L}{L^*}=\frac{1{,}5^2+1}{2\cdot 1{,}5}=\frac{3{,}25}{3}\approx 1{,}083$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 8,3%.

В случае уменьшения оптимальной партии поставки на α=50%, получим $\varepsilon=\frac{1-0{,}5}{1}=0{,}5$. Следовательно, $\frac{L}{L^*}=\frac{0{,}5^2+1}{2\cdot 0{,}5}=\frac{1{,}25}{1}=1{,}25$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 25%.

8) Учитывая, что

$$\frac{q}{q^*}=\frac{\sqrt{\dfrac{2K\nu}{s\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)}}}{\sqrt{\dfrac{2K^*\nu}{s^*\left(1-\frac{\nu}{\lambda}\right)}}}=\sqrt{\frac{K}{K^*}\cdot\frac{s^*}{s}}=\sqrt{\frac{\eta}{\delta}},$$

где $\delta = \dfrac{s}{s^*}$, $\eta = \dfrac{K}{K^*}$, получим

$$\frac{L}{L^*} = \frac{\sqrt{2Ks\nu\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}}{\sqrt{2K^*s^*\nu\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}} = \sqrt{\frac{K}{K^*}\cdot\frac{s}{s^*}} = \sqrt{\eta\delta}\,.$$

Тогда в случае, увеличения издержек хранения единицы продукции на β=1%, и увеличения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=4%, получим $\delta = \dfrac{1+0{,}01}{1} = 1{,}01$, $\eta = \dfrac{1+0{,}04}{1} = 1{,}04$. Следовательно, $\dfrac{q}{q^*} = \sqrt{\dfrac{\eta}{\delta}} = \sqrt{\dfrac{1{,}04}{1{,}01}} \approx \sqrt{1{,}0297} \approx 1{,}0147$ и $\dfrac{L}{L^*} = \sqrt{\eta\delta} = \sqrt{1{,}04\cdot 1{,}01} \approx 1{,}0249$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 2,5%, при соответствующем увеличении оптимальной партии поставки на 1,5%.

В случае, уменьшения издержек хранения единицы продукции на β=1%, и уменьшения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=4%, получим $\delta = \dfrac{1-0{,}01}{1} = 0{,}99$, $\eta = \dfrac{1-0{,}04}{1} = 0{,}96$. Следовательно, $\dfrac{q}{q^*} = \sqrt{\dfrac{\eta}{\delta}} = \sqrt{\dfrac{0{,}96}{0{,}99}} \approx 0{,}9847$ и $\dfrac{L}{L^*} = \sqrt{\eta\delta} = \sqrt{0{,}96\cdot 0{,}99} \approx 0{,}9749$, что влечет уменьшение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 2,5%, при соответствующем уменьшении оптимальной партии поставки на 1,5%.

9) Заметим, что

$$\frac{L}{L^*} = \frac{\dfrac{K\nu}{q^*} + \dfrac{sq^*}{2}\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)}{s^*q^*\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)} = \frac{2K^*\nu}{s^*\left(1-\dfrac{\nu}{\lambda}\right)(q^*)^2}\cdot\frac{K}{2K^*} + \frac{s}{2s^*} = \frac{1}{2}\left(\frac{K}{K^*} + \frac{s}{s^*}\right) = \frac{\eta+\delta}{2},$$

где $\delta = \dfrac{s}{s^*}$, $\eta = \dfrac{K}{K^*}$.

Тогда в случае, увеличения издержек хранения единицы продукции на β=1%, и увеличения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=4%, получим $\delta = \frac{1+0{,}01}{1} = 1{,}01$, $\eta = \frac{1+0{,}04}{1} = 1{,}04$. Следовательно, $\frac{L}{L^*} = \frac{\eta+\delta}{2} = \frac{1{,}04+1{,}01}{2} = 1{,}025$, что влечет увеличение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 2,5% без изменения оптимальной партии поставки.

Тогда в случае, уменьшения издержек хранения единицы продукции на β=1%, и уменьшения накладных расходов, связанных с размещением заказа и поставкой партии на γ=4%, получим $\delta = \frac{1-0{,}01}{1} = 0{,}99$, $\eta = \frac{1-0{,}04}{1} = 0{,}96$. Следовательно, $\frac{L}{L^*} = \frac{\eta+\delta}{2} = \frac{0{,}96+0{,}99}{2} = 0{,}975$, что влечет уменьшение оптимальных среднегодовых издержек на размещение заказов и хранение запасов на 2,5% без изменения оптимальной партии поставки. ■

3. Регулярные марковские цепи

<u>Решение задания № 3.1-3.30</u>

Пусть p=0,7, q=0,2, ε=–0,1. Множество состояний предприятий A и B следующее:

ε_1 – план перевыполнен,

ε_2 – выполнен на 100%,

ε_3 – не выполнен.

Для предприятий A и B переходные матрицы имеют вид

$$P_{\text{A}}=\begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \end{bmatrix} \end{array}; \quad P_{\text{B}}=\begin{array}{c} \\ \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \varepsilon_3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}1 & 0{,}3 \\ 0{,}7 & 0{,}1 & 0{,}2 \\ 0{,}8 & 0{,}1 & 0{,}1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Так как для предприятия A переходная матрица не зависит от номера строки, то матрица финальных вероятностей совпадает с матрицей P_{A}. Тогда $p_1^A = 0{,}7$, $p_2^A = 0{,}1$, $p_3^A = 0{,}2$. Чтобы найти финальные вероятности для предприятия B, необходимо решить следующую систему линейных уравнений:

$$\begin{cases} \overline{p} \cdot P = \overline{p} \\ p_1 + p_2 + \ldots + p_n = 1, \end{cases}$$

где P – переходная матрица, $\overline{p} = (p_1\, p_2 \ldots p_n)$ – вектор-строка, n – количество состояний.

Тогда

$$\begin{cases} 0{,}6p_1 + 0{,}7p_2 + 0{,}8p_3 = p_1 \\ 0{,}1p_1 + 0{,}1p_2 + 0{,}1p_3 = p_2 \\ 0{,}3p_1 + 0{,}2p_2 + 0{,}1p_3 = p_3 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1, \end{cases}$$

где p_1, p_2, p_3 – искомые вероятности.

Третье уравнение этой системы можно отбросить, так как оно является следствием первых двух. Решая оставшиеся уравнения, получаем

$$\begin{cases} -0{,}4p_1 + 0{,}7p_2 + 0{,}8p_3 = 0 \\ 0{,}1p_1 - 0{,}9p_2 + 0{,}1p_3 = 0 \\ p_1 + p_2 + p_3 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_1 - 9p_2 + p_3 = 0 \\ -4p_1 + 7p_2 + 8p_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ -10p_2 = -1 \\ 11p_2 + 12p_3 = 4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} p_1 + p_2 + p_3 = 1 \\ p_2 = \dfrac{1}{10} \\ 12p_3 = \dfrac{29}{10} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p_1^B = \dfrac{79}{120} \\ p_2^B = \dfrac{1}{10} \\ p_3^B = \dfrac{29}{120}. \end{cases}$$

Выводы. Доля выполнения плана на 100% у обоих предприятий одна и та же $\left(p_2^A = p_2^B = 0{,}1\right)$, доля перевыполнения плана у предприятия B меньше, чем у предприятия A ($p_1^B = \dfrac{79}{120} = 0{,}6583 < p_1^A = 0{,}7$).

■

4. Многоканальная СМО с отказами

<u>Решение задания № 4.1-4.30</u>

Состояния системы массового обслуживания (СМО), пронумеруем по числу заявок, находящихся в системе (в данном случае оно совпадает с числом занятых каналов):

ε_0 – в СМО нет ни одной заявки,

ε_1 – в СМО находится одна заявки (один канал занят, остальные свободны),

ε_2 – в СМО находится две заявки (два канала заняты, остальные свободны),

...

ε_n – в СМО находится n заявок (все n каналов заняты).

Граф состояний СМО представлен на рис. 3.

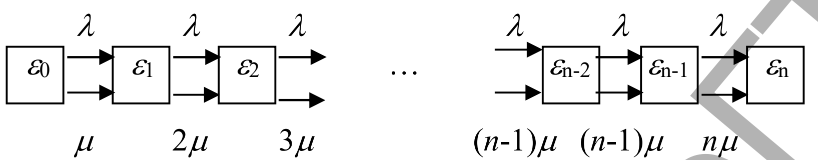


Рис. 3

Приведем основные расчетные соотношения для n-канальной СМО с отказами (задача Эрланга):

- формулы для расчета финальных вероятностей:

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}}, \text{ где } \rho = \frac{\lambda}{\mu}, \ \mu = \frac{1}{t_{об}}; \quad (1)$$

$$p_k = \frac{\rho^k p_0}{k!}, \ k = 1, \ 2, \ ..., \ n; \quad (2)$$

- $P_{отк}$ – вероятность того, что пришедшая заявка получит отказ (не будет обслуженной):

$$P_{отк}=p_n; \quad (3)$$

- Q – относительная пропускная способность (средняя доля пришедших заявок, обслуживаемых системой):

$$Q=1-p_n; \quad (4)$$

- A – абсолютная пропускная способность (среднее число заявок, обслуживаемых в единицу времени):

$$A=\lambda Q; \quad (5)$$

- $N_з$ – среднее число занятых каналов:

$$N_з = \sum_{k=0}^{n} kp_k = \frac{A}{\mu};\qquad (6)$$

- $N_п$ – среднее число простаивающих каналов:

$$N_п = \sum_{k=0}^{n} (n-k) p_k = n - N_з;\qquad (7)$$

- $k_з$ – коэффициент загрузки каналов:

$$k_з = \frac{N_з}{n};\qquad (8)$$

- $k_п$ – коэффициент простоя каналов:

$$k_п = \frac{N_п}{n}.\qquad (9)$$

Оценим эффективность функционирования АТС при следующих числовых значениях переменных величин: n=6 (каналов), λ=4 (заявки в мин.), $t_{об}$=1,5 (мин.) и q=80 %.

Определим параметр $\rho = \frac{\lambda}{\mu} = \lambda \cdot t_{об} = 4 \cdot 1{,}5 = 6$ ($\mu = \frac{1}{t_{об}} = \frac{1}{1{,}5} = \frac{2}{3}$). Вычисления в соответствии с формулами (1) - (9) сведем в таблицу:

k	ρ^k	***k!***	$\rho^k/k!$	p_k	kp_k
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1	1	1,0	0,0041	0,0000
1	6	1	6,0	0,0246	0,0246
2	36	2	18,0	0,0738	0,1476
3	216	6	36,0	0,1476	0,4428
4	1296	24	54,0	0,2214	0,8856
5	7776	120	64,8	0,2656	1,3280
6	46656	720	64,8	0,.2656	1,5936
∑			244,6	1,0027	4,4222

Вычисления начинаются с заполнения первых четырех столбцов. Сумма элементов четвертого столбца дает знаменатель выражения (1) для определения p_0. Тогда

$$p_0 = \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!} \right)^{-1} = \frac{1}{\sum_{k=0}^{n} \frac{\rho^k}{k!}} = \frac{1}{244{,}6} = 0{,}0041\,.$$

Далее находим элементы пятого столбца, умножая на величину p_0 соответствующие элементы четвертого столбца. Вычислив значения p_k, рассчитывают элементы последнего столбца. Элементы пятого столбца суммируют для контроля вычислений. Их сумма должна быть равна единице (с допустимыми в пределах точности расчетов отклонениями). Сумма элементов шестого столбца есть в соответствии с выражением (6) среднее число занятых каналов:

$$N_з=4{,}42.$$

Используя выражения (7) - (9), находим:

- среднее число простаивающих каналов:

$$N_п=n-N_з=6-4{,}42=1{,}58;$$

- коэффициент загрузки каналов:

$$k_з = \frac{N_з}{n} = \frac{4{,}42}{6} = 0{,}737\,;$$

- коэффициент простоя каналов:

$$k_п=1-k_з=1-0{,}737=0{,}263.$$

Последнее число в пятом столбце дает вероятность отказа:

$$P_{отк}=p_6=0{,}2656.$$

Тогда относительная пропускная способность:

$$Q=1-p_6=1-0{,}2656=0{,}7344,$$

а абсолютная пропускная способность:

$$A=\lambda Q=4\cdot 0{,}7344=2{,}9376.$$

Анализ полученных результатов. Значение p_0=0,0041 означает, что в среднем 0,4 % всего времени работы все 6 каналов одновременно будут свободны. В среднем будут постоянно заняты $N_з$=4,42 каналов связи. Как показывает коэффициент загрузки $k_з$=0,737, в среднем каждый канал занят 73,7 % рабочего времени. В тоже время величина $P_{отк}$=0,2656 говорит о том, что из каждых 100 вызовов 26,56 % получат отказ. Относительная пропускная способность Q=0,7344 говорит о том, что 6 каналов не гарантируют удовлетворение q=80 % поступающих заявок.

Рассчитаем характеристики СМО для n=7:

k	ρ^k	$k!$	$\rho^k/k!$	p_k	kp_k
1	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	1	1	1,0	0,0033	0,0000
1	6	1	6,0	0,0200	0,0200
2	36	2	18,0	0,0600	0,1200
3	216	6	36,0	0,1200	0,3600
4	1296	24	54,0	0,1799	0,7196
5	7776	120	64,8	0,2159	1,0795
6	46656	720	64,8	0,2159	1,2954
7	279936	5040	55,5	0,1849	1,2943
∑			300,1	0,9999	4,8888

- вероятность того, что в системе нет ни одной заявки

$$p_0 = \frac{1}{300,1} = 0,0033\,;$$

- среднее число занятых каналов $N_з$=4,89;
- среднее число простаивающих каналов $N_п$=n-$N_з$=7-4,89=2,11;
- коэффициент загрузки каналов

$$k_з = \frac{N_з}{n} = \frac{4,89}{7} = 0,699\,;$$

- коэффициент простоя каналов $k_п$=1-$k_з$=1-0,699=0,301, т.е. доля простаивающих каналов составит 30,1 %;
- вероятность отказа $P_{отк}$=p_7=0,1849;
- относительная пропускная способность Q=1-p_7=1-0,1849=0,8151, т.е. в среднем 81,51 % заявок будут удовлетворены;
- абсолютная пропускная способность $A=\lambda Q$=4·0,8151=3,2604.

Выводы. Для удовлетворения q=80 % заявок необходимо 7 каналов. В этом случае доля простаивающих каналов составит 30,1 %.

■

ЛИТЕРАТУРА

1. Абчук В.А. Экономико-математические методы: Элементарная математика и логика. Методы исследования операций. – СПб.: Союз, 1999. – 320 с.

2. Балашевич В.А., Андронов А.М. Экономико-математическое моделирование производственных систем: Учебное пособие для студентов инженерно-экономических и экономических специальностей вузов. – Мн.: Университетское, 1995. – 240 с.

3. Венцель Е.С. Исследование операций: задачи, принципы, методология. – М., Наука, 1988. – 208 с.

4. Глухов В.В., Медников М.Д., Коробко С.В. Математические методы и модели для менеджмента. – СПб.: Издательство “Лань”, 2000. – 480 с. – (Учебники для вузов. Специальная литература.).

5. Замков О.О. , Толстопятенко А.В., Черемных Ю.Н. Математические методы в экономике: Учебник. 2-е изд. – М.: МГУ им. М.В. Ломоносова, Издательство “Дело и Сервис”, 1999. – 368 с.

6. Колемаев В.А., Староверов О.В., Турундаевский В.Б. Теория вероятностей и математическая статистика: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – М.: Высш., шк., 1991. – 400 с.

7. Конюховский П.В. Математические методы исследования операций в экономике – СПб.: Издательство “Питер”, 2000. – 208 с.

8. Костевич Л.С., Лапко А.А.. Теория игр. Исследование операций: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. – Мн., Выш. шк., 1981. – 231 с.

9. Красс М.С., Чупрынов Б.П. Основы математики и ее приложения в экономическом образовании: Учебник. – 2-е изд., испр. – М.: Дело, 2000. – 688 с.

10. Кремер Н.Ш., Путко Б.А., Тришин И.М., Фридман М.Н. Исследование операций в экономике: Учебное пособие для вузов. / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1997. – 407 с.

11. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. Высшая математика. Математическое программирование: Учебник для студентов экономических специальностей вузов. / Под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова. – Минск: Выш. шк., 1994. – 286 с.

12. Кузнецов А.В., Сакович В.А., Холод Н.И. и др. Сборник задач и упражнений по высшей математике. Математическое программирование: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. / Под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова. – Минск.: Выш. шк., 1995. – 382 с.

13.Лабскер Л.Г., Бабешко Л.О. Теория массового обслуживания в экономической сфере: Учебное пособие для вузов. / Под ред. проф. Н.Ш. Кремера. – М.: Банки и биржи, ЮНИТИ, 1998. – 319 с.

14.Малыхин В.И. Математическое моделирование экономики: Учебно-практическое пособие. – М.: Изд-во УРАО, 1998. – 160 с.

15.Мацкевич И.П., Свирид Г.П. Высшая математика: Теория вероятностей и математическая статистика: Учебник для студентов экономических специальностей вузов. – Мн.: Выш. шк., 1993. – 269 с.

16.Тернер Д. Вероятность, статистика и исследование операций. – М., "Статистика", 1976 – 431 с.

17.Федосеев В.В., Гармаш А.Н., Дайитбегов Д.М. и др. Экономико-математические методы и прикладные модели: Учебное пособие для вузов. / Под ред. проф. В.В. Федосеева. – М.: ЮНИТИ, 1999. – 391 с.

18.Холод Н.И., Кузнецов А.В., Жихар Я.Н. и др. Экономико-математические методы и модели: Учебное пособие для студентов экономических специальностей вузов. / Под общ. ред. проф. А.В. Кузнецова, 2-е изд. – Мн.: БГЭУ, 2000. – 412 с.

19.Шелобаев С.И. Математические методы и модели в экономике, финансах, бизнесе: Учебное пособие для вузов. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2000. – 367 с.

20.Шикин Е.В., Чхартишвили А.Г. Математические методы и модели в управлении: Учеб. пособие. – М.: Дело, 2002. – 440 с. – (Сер. "Наука управления").

Учебное издание

Гусева Светлана Тадеушевна,
Махнист Леонид Петрович,
Рубанов Владимир Степанович,
Шамовская Галина Владимировна

ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ И МОДЕЛИ

Методические указания и задания к контрольной работе
по дисциплине ”Экономико-математические методы и модели”
для студентов экономических специальностей
заочной формы обучения

Редактор ***Т.В. Строкач***

Ответственный за выпуск *В.С. Рубанов*

Компьютерный набор *Л.П. Махнист*

Технический редактор *А.Д. Никитчик*

Подписано в печать ____.____.2004. Формат 60×84 1/16
Бумага писч. Усл. п. л. ____. Уч. изд. л. ____. Тираж ____ экз.
Заказ № ____

Отпечатано на ризографе УО “Брестский государственный технический университет”
224017, Брест, ул. Московская, 267