

К ОПРЕДЕЛЕНИЮ УСИЛИЙ В КРУГОВЫХ ТРЕХШАРНИРНЫХ АРКАХ, НАГРУЖЕННЫХ ВЕРТИКАЛЬНЫМИ РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЗАВИСИМОСТИ НАГРУЗКАМИ

Снеговые нагрузки на покрытия цилиндрической формы с учетом разного сдувания (опадения) снега с зон покрытий с различными углами наклона могут распределяться по параболической зависимости [1]. Расчет таких покрытий, которые широко применяются, может быть сведен к расчету арочных систем [2]. Поэтому расчет круговых трехшарнирных арок на действие нагрузок, распределенных по параболической зависимости, актуален и представляет интерес.

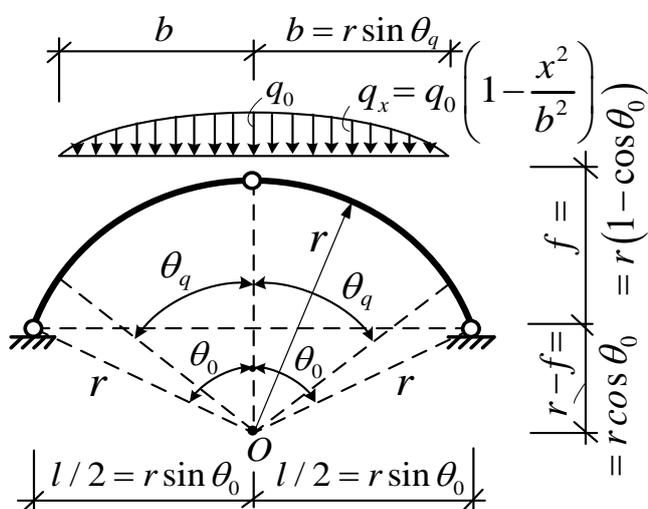


Рисунок 1 – Расчетная схема

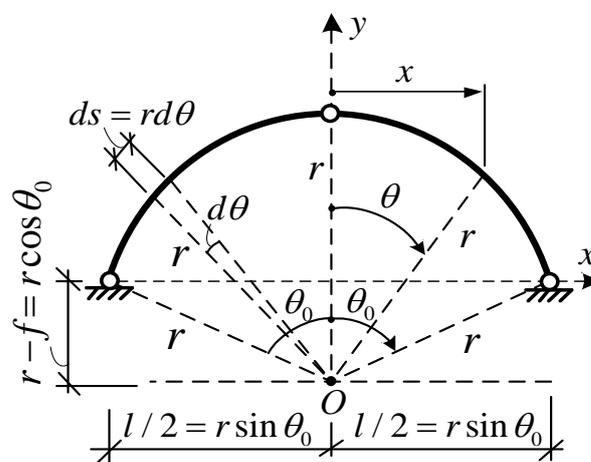


Рисунок 2 – Системы координат

Рассматриваются трехшарнирные арки кругового очертания постоянной жесткости пролетом l (рисунок 1), вертикальными статическими, распределенными по параболической зависимости нагрузками. Получим для них выражения внутренних сил – изгибающих моментов, поперечных и продольных сил – в произвольном сечении системы. Расчет выполним статическим методом.

Так как оси арок изменяются по окружности, получение и интегрирование зависимостей удобно выполнять в полярной системе координат (рисунок 2). За полюс примем точку O в центре окружности, а в качестве оси для отсчета угла (θ) (по часовой стрелке) примем вертикальную ось y . Зависимость между декартовой (x, y) и полярной (r, θ) системами координат принимает вид:

$$x = r \sin \theta; \quad y = r (\cos \theta - \cos \theta_0). \quad (1)$$

Геометрические соотношения здесь определяется зависимостями:

$$ds = r d\theta. \quad r = \frac{l^2 / 4 + f^2}{2f}. \quad \operatorname{tg} \theta_0 = \frac{l}{2(r - f)}. \quad (2)$$

Найдем опорные реакции из уравнений равновесия всей арки и ее полуарок (рисунок 3).

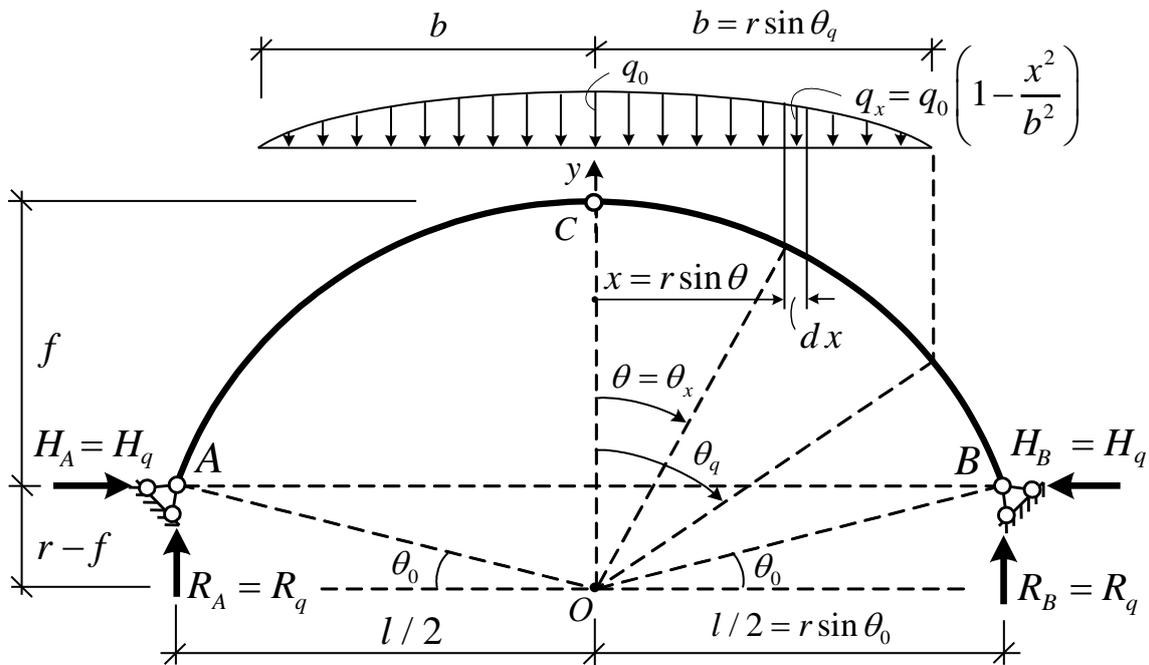


Рисунок 3 – Расчетная схема арки для определения опорных реакций

Для определения опорной реакции R_A составим сумму моментов всех сил, действующих на арку, относительно опорной точки B . Выполнив интегрирование и решив уравнение, получим:

$$\sum M_A = 0; \quad -R_B l + \int_{-b}^b q_0 \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) \left(x + \frac{l}{2}\right) dx = 0; \quad R_B = \frac{2}{3} q_0 b.$$

$$\sum M_C^{лев} = 0; \quad H_B \cdot f - R_A \cdot \frac{l}{2} + \int_0^b q_0 \left(1 - \frac{x^2}{b^2}\right) x dx = 0; \quad H_B = \frac{q_0 b}{f} \left(\frac{l}{3} - \frac{b}{4}\right).$$

Ввиду симметричности системы:

$$R_A = R_B = R_q = \frac{2}{3} q_0 b. \quad H_A = H_B = H_q = \frac{q_0 b}{f} \left(\frac{l}{3} - \frac{b}{4}\right). \quad (2)$$

Для получения выражений внутренних сил в сечении x (θ_x) от действия внешней нагрузки, распределенной по параболической зависимости, рассмотрим равновесие отсеченных частей арки относительно сечений и выразим внутренние силы через опорные реакции и внешнюю нагрузку (рисунок 4).

На участке 1 при рассмотрении левой части арки изгибающий момент в сечении можно выразить только через опорные реакции:

$$M_{q(1)} = R_B \left(\frac{l}{2} + x\right) - H_q y = R_q \left(\frac{l}{2} + r \sin \theta\right) - H_q (r \cos \theta - r + f). \quad (7)$$

В полярной системе координат будем иметь:

$$M_{q(1)} = R_q \frac{l}{2} + H_q (r - f) + R_q r \sin \theta - H_q r \cos \theta. \quad (8)$$

Изгибающий момент в сечении, расположенном на участке действия распределенной нагрузки (участок 2), выразим из правой части арки через опорные реакции и распределенную нагрузку, интегрируя элементарную нагрузку на бесконечно малом участке dx в пределах действия нагрузки:

$$M_{q(2)} = -H_q \cdot y + R_B \left(\frac{l}{2} - x \right) - q_0 \int_x^b \left(1 - \frac{x_{qx}^2}{b^2} \right) (x_{qx} - x) dx_{qx} =$$

$$= -H_q \cdot y + R_q \left(\frac{l}{2} - x \right) - q_0 \left[\frac{1}{2} (b^2 - x^2) - x (b - x) - \frac{b^2}{4} \left(1 - \frac{x^4}{b^4} \right) + \frac{x}{3b^2} (b^3 - x^3) \right]$$

или в полярной системе координат:

$$M_{q(2)} = \frac{1}{2} R_q l + H_q r \cos \theta_0 - \frac{1}{4} q_0 b^2 + \left(-R_q r + \frac{2}{3} q_0 b r \right) \sin \theta -$$

$$- H_q r \cos \theta - \frac{1}{2} q_0 r^2 \sin^2 \theta + \frac{1}{12} q_0 r^4 \sin^4 \theta.$$

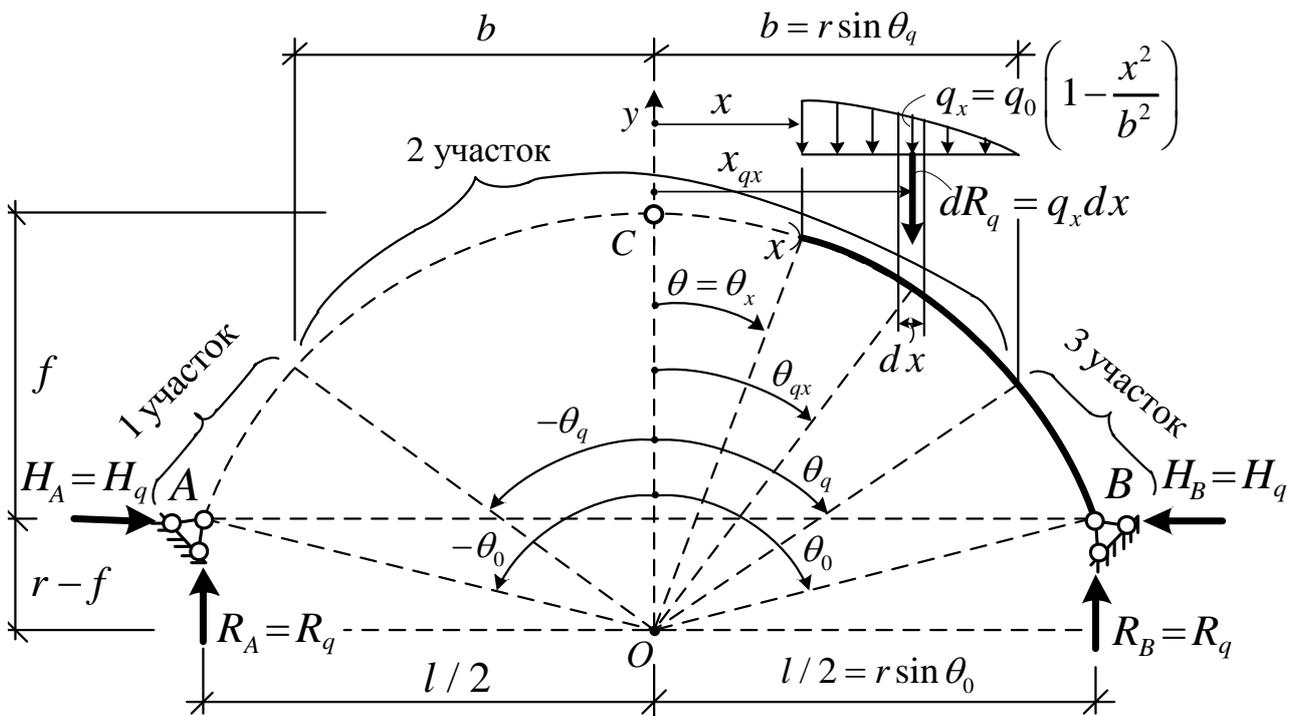


Рисунок 4 – Отсеченная правая часть арки

На участке 3 (без распределенной нагрузки) изгибающий момент в сечении найдем из рассмотрения правой части:

$$M_{q(3)} = R_q \left(\frac{l}{2} - x \right) - H_q y = R_q \left(\frac{l}{2} - r \sin \theta \right) - H_q [r \cos \theta - (r - f)] =$$

$$= R_q \frac{l}{2} + H_q (r - f) - R_q r \sin \theta - H_q r \cos \theta.$$

Поперечная сила на участках 1, 2 и 3 определится зависимостями:

$$Q_{q(1)} = H_q \sin \theta + R_q \cos \theta;$$

$$Q_{q(2)} = -R_q \cos \theta + H_q \sin \theta + \left[q_0 r \int_{\theta}^{\theta_q} \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right) \cos \theta d\theta \right] \cos \theta =$$

$$= H_q \sin \theta + \left(\frac{2}{3} q_0 b - R_q \right) \cos \theta - q_0 r \sin \theta \cos \theta + q_0 \frac{r^3}{3b^2} \sin^3 \theta \cos \theta;$$

$$Q_{q(3)} = H_q \sin \theta - R_q \cos \theta.$$

Продольная сила на участках 1, 2 и 3 определяется зависимостями:

$$N_{q(1)} = R_q \sin \theta - H_q \cos \theta;$$

$$N_{q(2)} = -R_q \sin \theta - H_q \cos \theta + \left[q_0 r \int_{\theta}^{\theta_q} \left(1 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{b^2} \right) \cos \theta d\theta \right] \sin \theta =$$

$$= \left(\frac{2}{3} q_0 b - R_q \right) \sin \theta - H_q \cos \theta - q_0 r \sin^2 \theta + q_0 \frac{r^3}{3b^2} \sin^4 \theta;$$

$$N_{q(3)} = -R_q \sin \theta - H_q \cos \theta.$$

На основе этих зависимостей выполним расчет усилий – изгибающих моментов M , поперечных и продольных сил Q и N – в сечениях арки, представленной на рисунке 3, с шагом $\Delta\theta = 10^\circ$ и построим эпюры усилий (рисунок 4) (ввиду симметричности системы покажем все для половины арки).

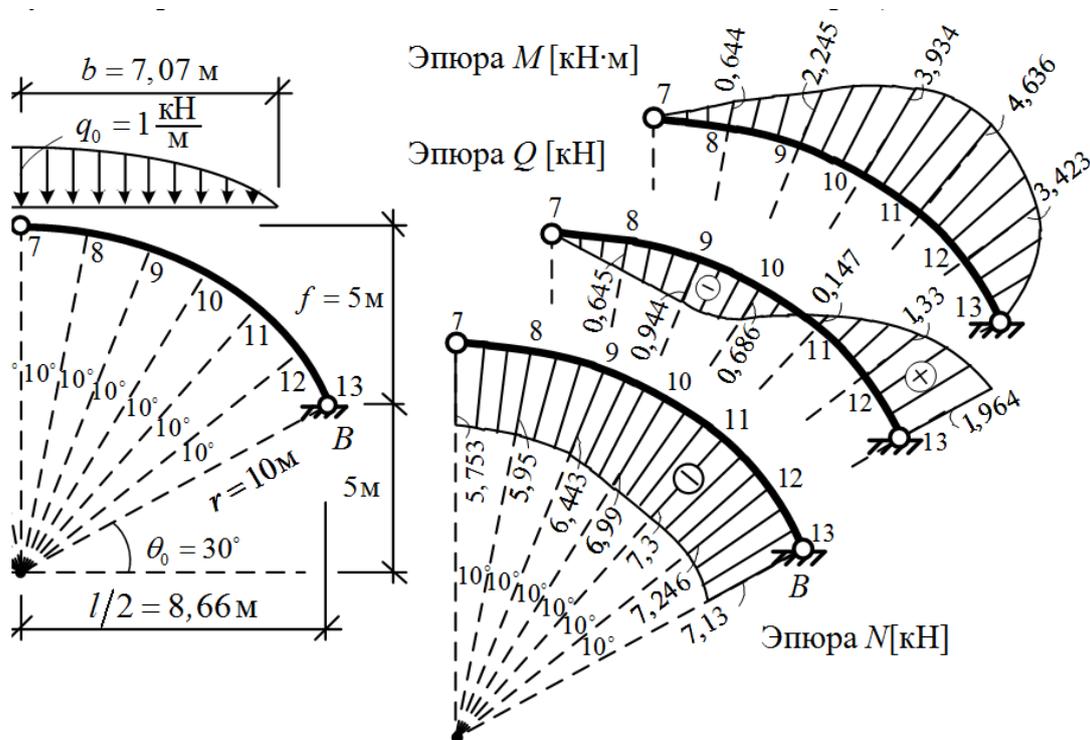


Рисунок 3 – Расчетная схема арки

Рисунок 4 – Эпюры внутренних сил

Список цитированных источников

1. Воздействия на конструкции. Общие воздействия. Ветровые воздействия. СН 2.01.05-2019. – Минск : Стройтехнорм, 2020. – 120 с.
2. Строительная механика. Стержневые системы: учебник для вузов / А. Ф. Смирнов [и др.] ; под ред. А. Ф. Смирнова. – М. : Стройиздат, 1981. – 512 с.