

## ФРАКТАЛЬНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ ФЕРМ

**Е. Г. Борд**, канд. физ.-мат. наук, доцент,  
**Е. А. Емельянова**, студент

*Новосибирский государственный архитектурно-строительный  
университет (Сибстрин), г. Новосибирск, Российская Федерация*

Ключевые слова: статически определимые конструкции, фермы, фрактальные множества, системы Линденмайера.

В статье представлены первые результаты построения статически определимых ферм, имеющих фрактальную структуру.

В настоящей работе описаны способы построения различных статически определимых ферм, которые в пределе стремятся к заполнению областей на плоскости, свойства которых соответствуют свойствам объектов фрактальной геометрии, впервые изученных в [1]. Для описания алгоритма построения используется способ формализации, предложенный в работе [2] и известный в настоящее время как система Линденмайера или L-система. Несмотря на широкую известность работ [1] и [2], попыток применения алгоритмов генерации фрактальных объектов в целях архитектурного проектирования известно немного. Среди прочих работ по этой теме можно выделить статью [3], автор которой взял на себя обязанность напомнить читателям тезис Мандельброта из работы [1] о фрактальной природе башни Эйфеля.

Процесс построения фермы с помощью L-системы начинается с изображения одного стержня, которое генерируется правилом  $'F'$  и принимается в качестве первого исполняемого действия (аксиомы). Построение фермы, имеющей форму правильного треугольника, реализуется L-системой  $'F ++F ++F'$  или  $'F --F --F'$ , здесь в соответствии с обозначениями [2] символом  $' +'$  кодируется изменение направления, в котором движется перо, на угол  $\pi/3$  против часовой стрелки символом  $' -'$  кодируется поворот на тот же угол по часовой стрелке.

Статически определимая ферма получается в результате последовательного добавления к имеющейся конструкции двух, не лежащих на одной прямой, стержней, соединенных между собой неподвижным шарниром. Узлы крепления добавленных стержней к имеющейся конструкции при этом выбираются произвольно. Добавление двух стержней, соединенных шарниром, к имеющейся конструкции удобно кодировать отдельными, поименованными правилами:  $'R':' ++F ++F'$  и  $'L':' --F --F'$ , эти правила должны применяться поочередно, чтобы не перерисовывать изображенные ранее стержни. Многократное применение последовательности правил реализуется с помощью рекурсивного вызова поименованного правила, при этом глубина рекурсии

задается отдельным параметром. Двухпоясная ферма с треугольной решеткой, изображенная на рисунке 1, получена исполнением аксиомы 'FO' и однократного исполнения рекурсивного правила 'O':'OLR', соединительные шарниры в узлах фермы здесь и ниже не изображаются.

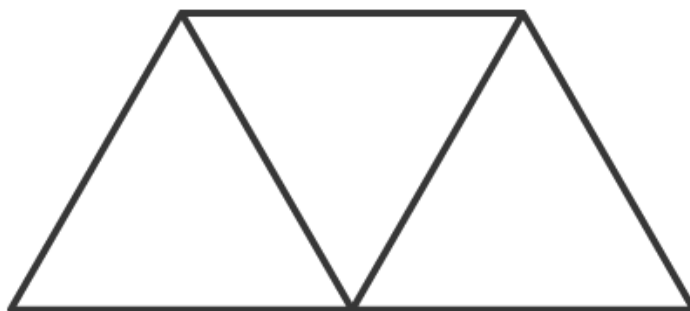


Рисунок 1 – Элементарная ферма, построенная в результате применения L-системы: 'FO'; 'O':'OLR'; с глубиной рекурсии 1

Классические фрактальные кривые, такие как кривая Коха и кривая Серпинского, порождаются L-системой вида: 'FP', 'O': 'CP-O-P', 'P': 'CO+P+O' с различным величинами углов поворота элементов; для кривой Коха этот угол равен  $\pi/4$ , для кривой Серпинского –  $\pi/3$ ; в обоих случаях элементарное построение реализуется отрезком заданной постоянной длины. На рисунках 2–5 представлены результаты построения статически определимых ферм, генерируемых L-системами вида: 'FP', 'O': 'CP-O-P', 'P': 'CO+P+O' с углом поворота элементов  $\pi/3$ . Различные варианты построения при этом возникают в результате применения разных комбинаций поворотов, переносов и объединений элементарной фермы, изображенной на рисунке 1.

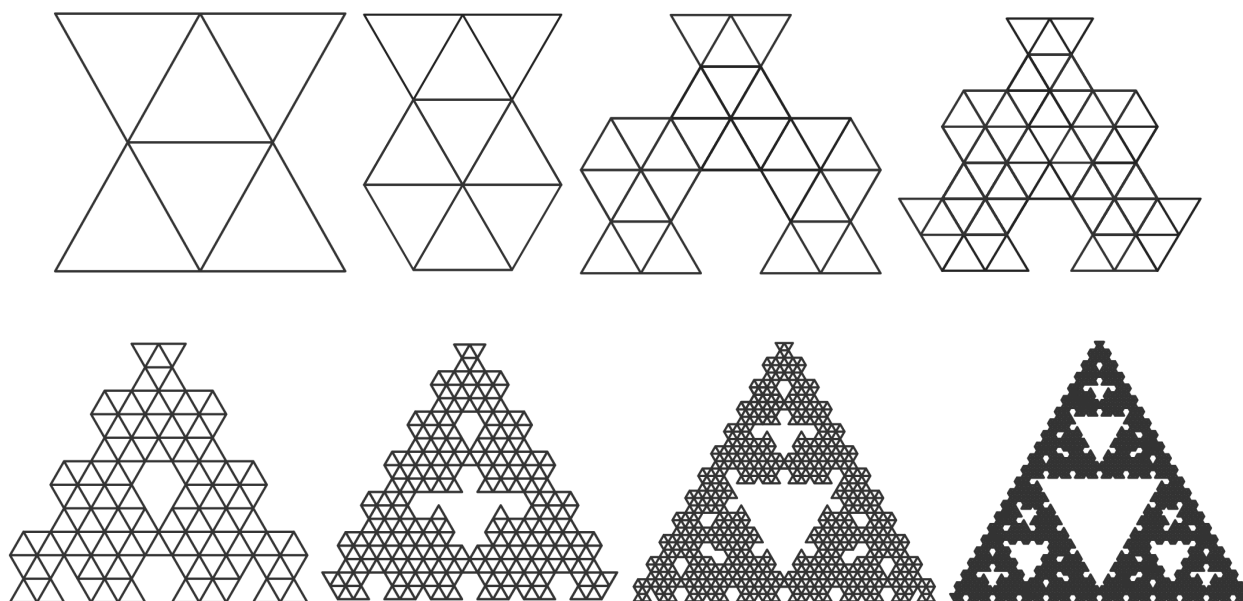


Рисунок 2 – Статически определимая фрактальная ферма. Глубина рекурсии увеличивается от 1 до 8

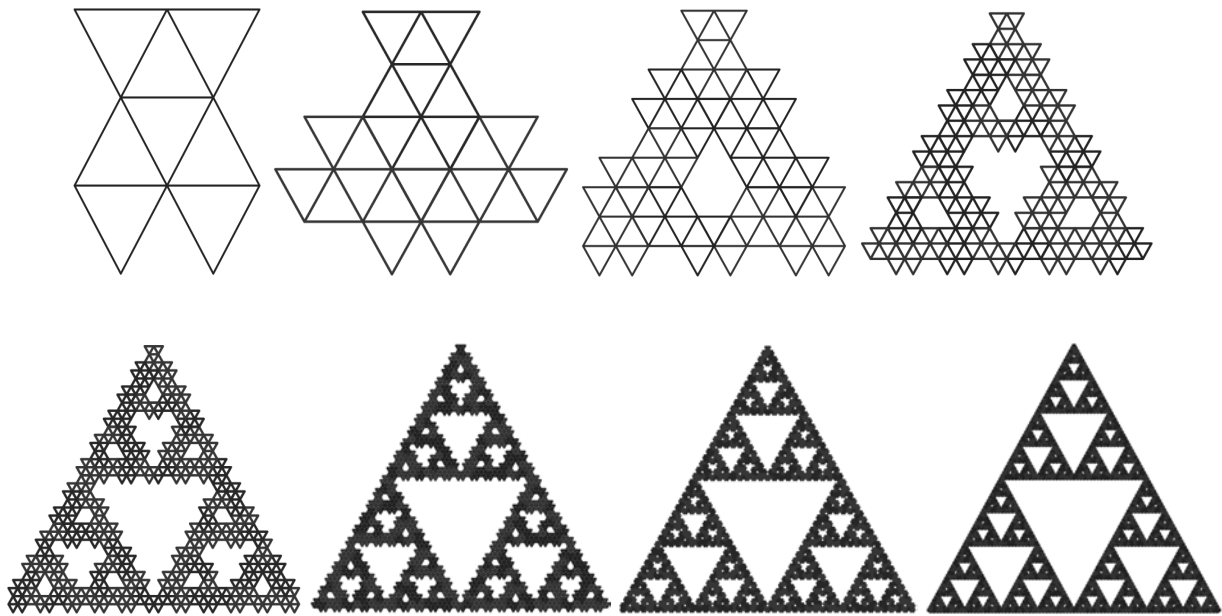


Рисунок 3 – Статически определяемая фрактальная ферма.  
Глубина рекурсии увеличивается от 1 до 8

Несмотря на то, что для построения конструкций, представленных на рисунках 2–5, использовалась L-система, генерирующая кривую Серпинского, при достаточной глубине рекурсии фермы 2–5 стремятся заполнить фрактальную область, напоминающую треугольник Серпинского. Такое поведение объясняется двумя причинами. Во-первых, в выполненном построении используется элемент конечной „толщины“, в результате чего заполнение плоскости происходит быстрее, чем в случае классической кривой Серпинского. Во-вторых, визуальное сходство объектов, возникающих при глубине рекурсии, превышающей 6, с треугольником Серпинского, обусловлено разрешающей способностью, с которой выполняются построения, при увеличении разрешения на всех рисунках 2–5 можно было бы увидеть замкнутые кривые, заполняющие области треугольной формы.

Форма кривых, представленных на рисунках 2–5, зависит от значений параметров, использованных при построении. Если значение угла поворота элементов составляет  $\pi/4$ , то в результате применения L-системы, использованной в построениях рисунков 2–5, порождаются кривые, похожие на кривые Коха, представленные на рисунке 6. Элементами этих кривых являются ломаные, в которые преобразуется при таком значении угла элементарная ферма 2.

Зависимость формы области от угла между элементами усиливается с увеличением глубины рекурсии. На рисунке 7 представлена фрактальная область, которая получается с глубиной рекурсии 9, вместо фермы, изображенной на рисунке 5, если угол между элементами равен  $55^\circ$ . Генерируемая при этом конструкция не является статически определяемой фермой, поэтому остается надеется, что ее изображение на рисунке 7 может послужить стимулом для творческой активности архитекторов, ищущих образы будущих башен.

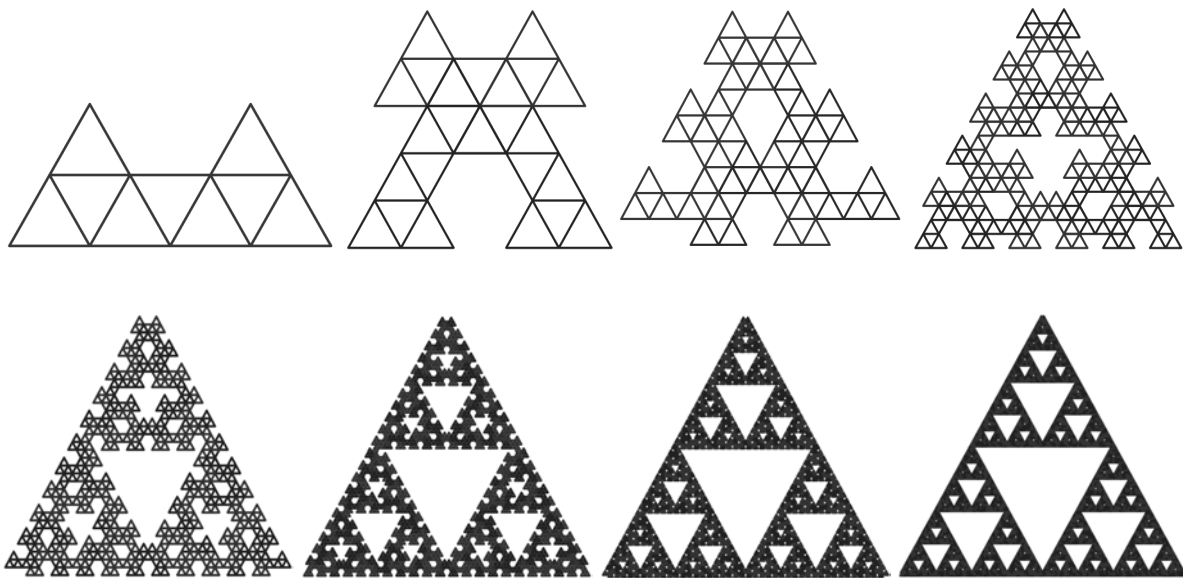


Рисунок 4 – Статически определяемая фрактальная ферма.  
Глубина рекурсии увеличивается от 1 до 8

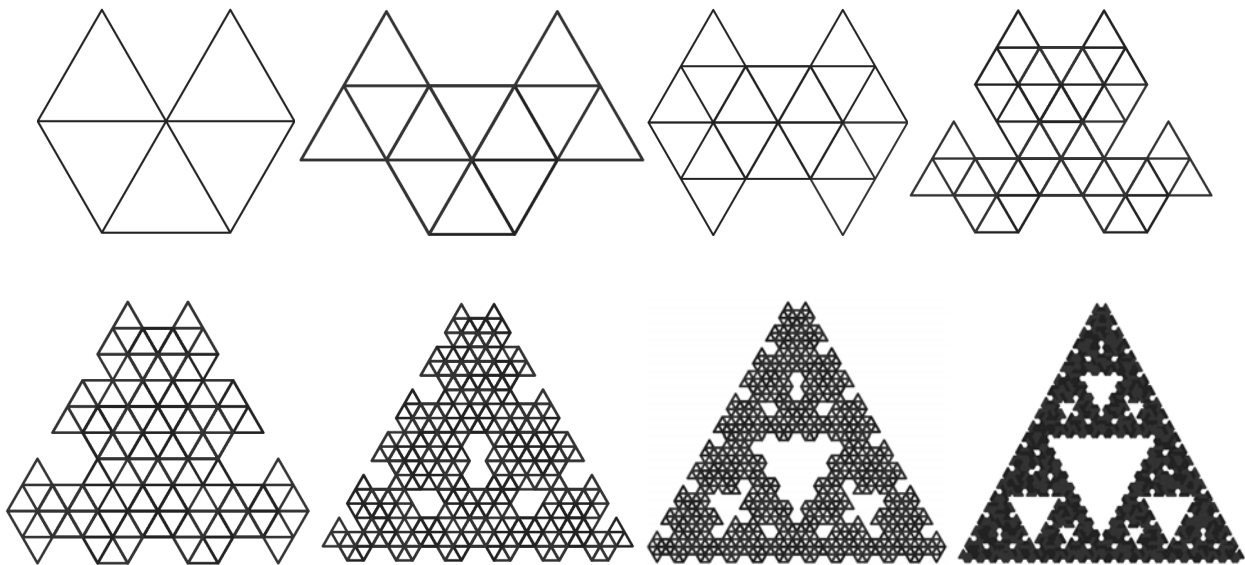


Рисунок 5 – Статически определяемая фрактальная ферма.  
Глубина рекурсии увеличивается от 1 до 8

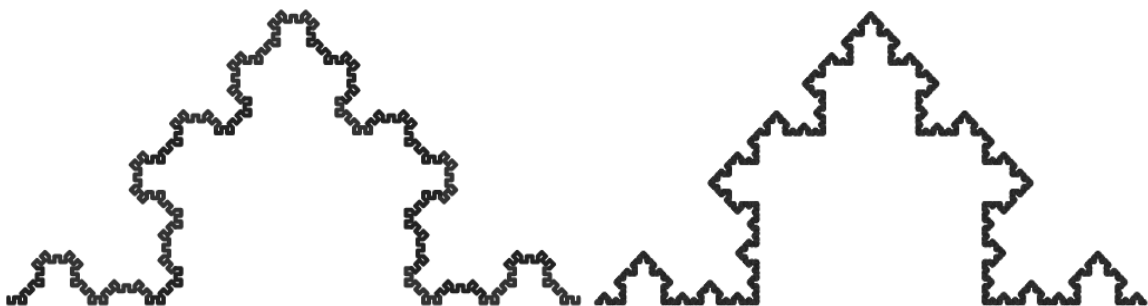


Рисунок 6 – Кривая Коха, полученная с углом поворота элементов рисунка 2 равным  $\pi/4$ .  
Глубина рекурсии составляет 4 и 8

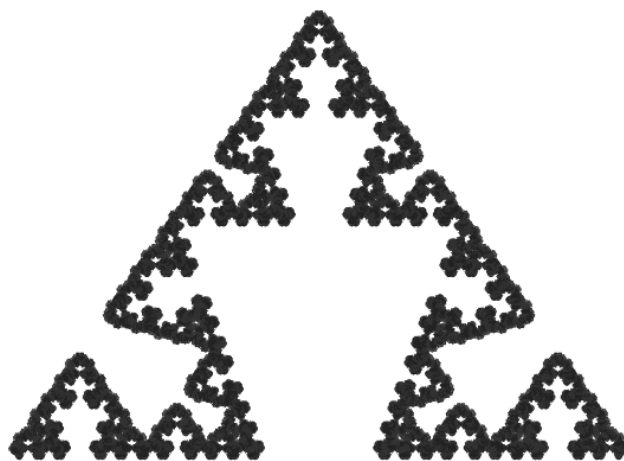


Рисунок 7 – Деформация фермы, представленной на рисунке 5.  
Угол между элементами равен  $55^\circ$  , глубина рекурсии 9

Полученные результаты позволяют сделать вывод, что статически определимые фермы с фрактальной геометрией могут рассматриваться как новый, пока не изученный, тип конструкций, представляющих потенциальный интерес как при изучении курса строительной механики, так и в практике строительства. При этом очевидны две ближайшие задачи развития исследований в данном направлении. Во-первых, должны быть изучены аналогичные методы построения пространственных конструкций. Во-вторых, требуется формулировка эффективных методов расчета напряженно-деформированного состояния в таких конструкциях.

Во время подготовки настоящей работы авторы являлись участниками планового образовательного процесса, что позволило одному из них сделать вывод о востребованности тематики предложенного исследования студентами, обладающими достаточными способностями к изучению дисциплин естественно-научного цикла. Этот вывод сопровождается надеждой, что продолжение работы в данном направлении вызовет энтузиазм у достаточного числа молодых исследователей.

### Список литературы

1. **Мандельброт, Б.** Фрактальная геометрия природы / Б. Мандельброт. – Москва : Институт компьютерных исследований, 2002. – 656 с.
2. **Prusinkiewicz, P.** The Algorithmic Beauty of Plants / P. Prusinkiewicz, A. Lindenmayer // New York: Springer-Verlag, 1990. – 228 P.
3. **Rian, I.** Fractal-based generative design of structural trusses using iterated function system / I. Rian, M. Sassone // International journal of space structures. – 2014. – v. 29. – № 4. – P. 181–203.