УДК 004.92 : 514

КОНСТРУКТИВНЫЕ АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ДУГ КУБИЧЕСКОЙ ПАРАБОЛЫ ПРИ ПОМОЩИ КРИВОЙ БЕЗЬЕ

А. А. Бойков, старший преподаватель

МИРЭА – Российский технологический университет, г. Москва, Российская Федерация

Ключевые слова: геометрические построения, конструктивная геометрия, кубическая парабола, кривая Безье.

Рассматриваются способы построения центрально симметричных дуг кубических парабол при помощи кривой Безье третьего порядка. Для построения используется CAD-система «Компас-3D».

1. Ранее отмечался заметный отрыв теории геометрических построений (конструктивной геометрии) от практики работы в CAD-системах, где, кроме традиционных инструментов – циркуля и линейки, в настоящее время присутствует широкий набор иных инструментов, в частности, сплайновых кривых, одной из которых является кривая Безье [1].

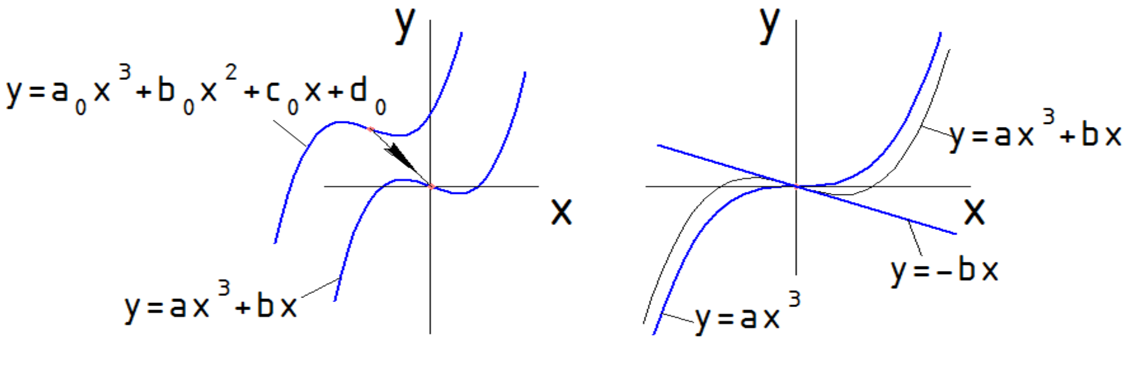
Известно, что кривая Безье, как и многие другие сплайновые кривые, базируется на использовании кубических полиномов. Встает вопрос о возможности точного представления дуг кубических парабол при помощи кривых Безье. В статье приводится доказательство такой возможности и конструктивные алгоритмы построения центрально симметричных дуг кубических парабол при помощи кривой Безье третьего порядка.

2. Кубическая парабола (рисунок 1а) задается уравнением

$$y = a_0x^3 + b_0x^2 + c_0x + d_0. \tag{1}$$

Известно, однако, что любая кубическая парабола путем сдвига вдоль осей x и y может быть приведена к виду:

$$y = ax^3 + bx. \tag{2}$$



а) б)

Рисунок 1 – Кубическая парабола общего и частных видов

Кубическая парабола вида (2) является центрально симметричной кривой относительно начала координат и, кроме того, может быть получена сложением двух функций (рисунок 1б). Кубической параболы вида:

$$y = ax^3; \tag{3}$$

– и линейной функции:

$$y = -bx. \tag{4}$$

Таким образом, установить, возможно или нет представление кубических парабол при помощи кривой Безье, можно, решив следующие задачи:

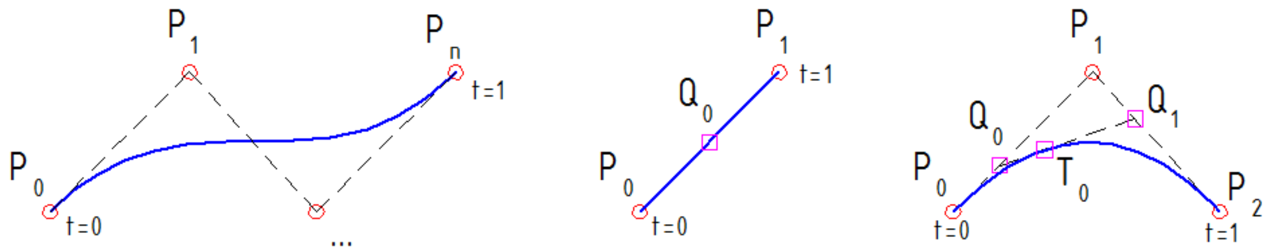
– исследовать конструктивные свойства кривых Безье;

– установить возможность представления при помощи кривой Безье кубических парабол вида (3) и (2);

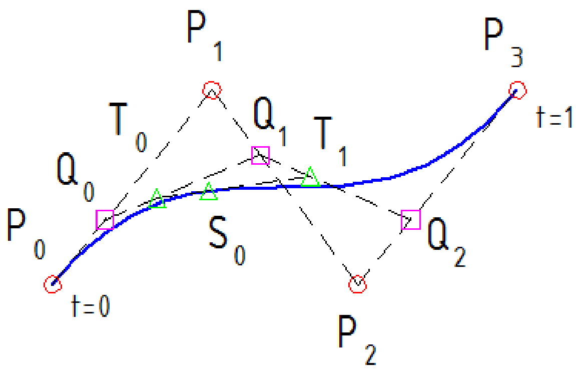
– разработать алгоритмы построения дуг кубических парабол вида (3) и (2) при помощи кривой Безье.

3. Кривая Безье задается набором точек P_0–P_n, и параметризуется переменной t на отрезке [0; 1] (рисунок 2а). При t = 0 мы получаем начальную точку (P_0), при t = 1 – конечную (P_n). Ломаная $P_0P_1…P_n$ называется характеристической ломаной [2, 3].

Конструктивные свойства кривых Безье определяются рекуррентно. Так, линейная кривая Безье задается двумя точками и представляет собой отрезок P_0P_1 (рисунок 2б). Точка Q_0 пробегает его при изменении t от 0 до 1. При t = 0,5 точка Q_0 оказывается ровно посередине.



а) б) в)



г)

Рисунок 2 – Кривые Безье: общего вида, линейная, квадратичная и кубическая

Квадратичная кривая Безье задается тремя точками (рисунок 2в), проходит только через первую (P_0) и последнюю (P_2) точки и имеет касательные: P_0P_1 – в точке P_0 и P_1P_2 – в точке P_2. Если построить две линейные кривые Безье на парах точек P_0P_1 и P_1P_2 и на подвижных точках Q_0 и Q_1 еще одну линейную кривую Безье, тогда при изменении параметра t от 0 до 1 точка T_0 этой кривой описывает квадратичную кривую Безье. Квадратичная кривая Безье является дугой параболы, которая, фактически, задается парой точек и касательными в них. Каждая прямая Q_0Q_1 является касательной к этой дуге в соответствующей точке T_0. При t = 0,5 точка T_0 лежит посередине отрезка Q_0Q_1, который оказывается параллельным отрезку P_0P_1.

Кубическая кривая Безье задается четырьмя точками (рисунок 2г), проходит только через первую (P_0) и последнюю (P_3), а промежуточные точки (P_1 и P_2) задают касательные и значения кривизны в точках P_0 и P_3 соответственно. Кубическая кривая может быть получена при помощи шести линейных кривых Безье, причем точки T_0 и T_1 пробегают при изменении значения t от 0 до 1 по дугам соответствующих парабол – квадратичных кривых Безье, причем T_0T_1 – касательная к кривой в S_0.

Таким образом, задача представления дуги кубической параболы сводится к выбору подходящего расположения управляющих точек кубической кривой Безье – P_0, P_1, P_2 и P_3, причем P_0 и P_3 – принадлежат кубической параболе, P_1 и P_2 – нет, прямые P_0P_1 и P_2P_3 являются касательными к кубической параболе в соответствующих точках.

4. Кубическая парабола вида (3) является центрально симметричной относительно начала координат, имеет в начале координат горизонтальную касательную и, кроме центра, требует указания еще одной какой-либо точки.

Предложение 1. Чтобы получить дугу кривой с указанными свойствами, управляющие точки кривой Безье третьего порядка следует расположить, как показано на рисунке 3а.

Прежде чем доказать это предложение, докажем одно свойство кривой Безье второго порядка.

Предложение 2. Если кривая Безье второго порядка задана равнобедренным треугольником, как показано на рисунке 3б, то точка при t = 0,5 является вершиной параболы.

Так как любая парабола полностью определяется двумя точками и двумя касательными, а точки P_0 и P_2 и прямые P_0P_1 и P_1P_2 симметричны относительно y, тогда исходная парабола и отраженная относительно y – суть одна и та же кривая, следовательно y – ось симметрии параболы, а T_0 – ее вершина.

Теперь рассмотрим кривую Безье на рисунке 3а. Опорные кривые Безье второго порядка (в силу равенства и симметричности задающих треугольников) оказываются конгруэнтны и расположены центрально симметрично (рисунок 3в). По доказанному свойству при t = 0,5 подвижный базис кривой третьего порядка составляет отрезок T_0T_1, концами которого являются вершины двух парабол, оси которых параллельны. Касательная к кривой в этой точке перпендикулярна осям парабол, а сама точка расположена в центре симметрии характеристической ломаной.

Легко показать, что весь базис кривой (точки $P_0..P_3$) центрально симметричен относительно O и при отражении точка P_0 переходит в P_3, P_1 в P_2 и наоборот (рисунок 3г). Поэтому также оказываются симметричны точки $Q_0..Q_2$, $T_0..T_1$ исходной кривой и отраженной для любых значений t. А это означает, что исходная кривая и отраженная совпадают, т. е. построенная таким образом кривая центрально симметрична относительно O.

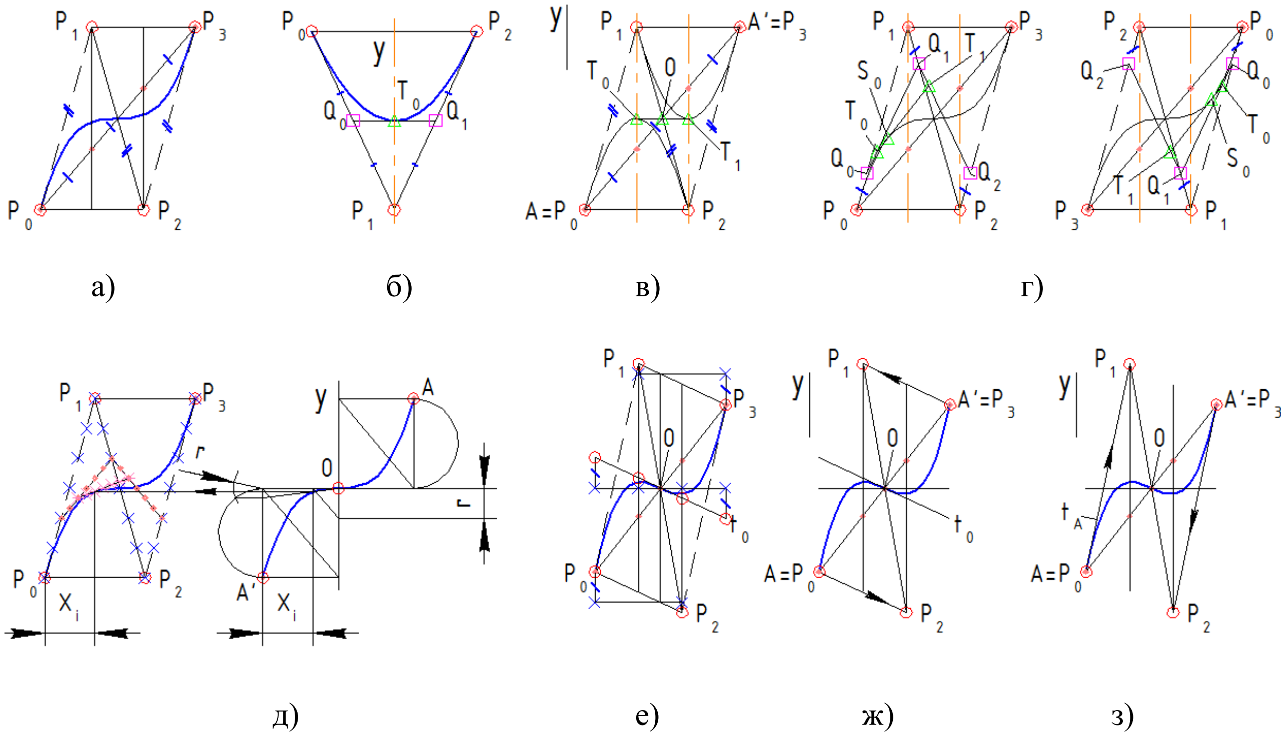


Рисунок 3 – Построение кубических парабол при помощи кривых Безье

Покажем, что для построения такой кривой достаточно только одной точки, кроме центральной.

Алгоритм КПЦ1Т. Дано – центр кубической параболы O, направление вертикальной оси y и некоторая точка A. Требуется: расставить управляющие вершины $P_0..P_3$ кубической кривой Безье для получения центрально симметричной кривой с центром в O, касательной, перпендикулярной y в этой точке и проходящей через A. Решение (рисунок 3в).

Поместим P_0 в A. Найдем A’, центрально симметричную A относительно O. Поместим P_3 в A’. Разделив отрезок AA’ на три части, проведем прямые, параллельные y. Спроецируем ортогонально A’ на первую из них и поместим в эту точку P_1. Спроецируем ортогонально A на вторую и поместим в эту точку P_2.

Таким образом, построенная кривая удовлетворяет всем поставленным условиям: задается одной точкой, кроме центра, является центрально симметричной, проходит через точку O и имеет в ней касательную, перпендикулярную y.

Вместо доказательства, что указанная кривая является кубической параболой, которое потребовало бы вывода уравнения, мы ограничимся экспериментальной проверкой, как это было сделано для параболы второго порядка в [4].

Для этого используем конструктивный способ построения точек кубической параболы вида (3) из [5]. Теперь, взяв A случайным образом и выбрав произвольный набор t_i, строим точки кривой Безье и соответствующие точки кубической параболы, сравниваем (рисунок 3д). Видим, что точки кривых имеют равную высоту, то есть кривые совпадают.

Таким образом, мы установили, что построенная при помощи алгоритма КПЦ1Т кривая Безье является центрально симметричной дугой кубической параболы вида (3).

Отметим, что этот алгоритм позволяет строить любую параболу вида (3). Способ удлинения кубической параболы можно предложить на основе рисунка 2г: новая опорная точка строится для $t > 1$ или $t < 0$.

5. Кубическая парабола вида (2) может быть получена из кубической параболы вида (3) при помощи аффинного преобразования скоса, которое определяются выражениями:

$$x' = x;$$

$$y' = y + bx.$$

Также известно, что кривая Безье является аффинно-инвариантной, поэтому, применяя указанное преобразование к точкам характеристической ломаной, мы получим новую кривую Безье, точки которой получаются при помощи того же преобразования точек исходной кривой.

Преобразование скоса управляющих точек (рисунок 3е) приводит к тому, что равнобедренные треугольники превращаются в центрально-симметричные треугольники общего вида, касательная в центре превращается в прямую вида (4). Исходные точки показаны крестиками. Преобразование можно задать прямой t_0, проходящей через центр преобразования O (рисунок 3е).

Парабола (2) определяется двумя параметрами, кроме центра и оси y. Это могут быть точка и касательная в центре (A и t_0), точка и касательная в ней (A и t_A), две дополнительные точки (A и B) и т. п. Из рисунка 3е непосредственно вытекают следующие способы построения центрально симметричных дуг кубической параболы вида (2).

Алгоритм КПЦК1Т. Даны центр O, ось y, точка A и касательная в центре t_0. Решение (рисунок 3ж). Строим точку A’ по свойству центральной симметрии. Помещаем P_0 и P_3 в A и A’ соответственно. Делим отрезок AA’ на три части и проводим прямые, параллельные y. Проецируем A’ в направлении t_0 на первую из них и помещаем точку P_1. Проецируем A в направлении t_0 на вторую и помещаем точку P_2. Этот алгоритм обобщает алгоритм КПЦ1Т для произвольного расположения касательной в центральной точке.

Чертеж на рисунке 3е показывает также способ построения касательной к кубической параболе общего вида, если известен ее центр и касательная в центре. Для этого достаточно спроецировать одну из пары центрально симметричных точек A или A’ в направлении t_0 на прямые, параллельные y на расстоянии 2/3 и 1/3 и соединить с точками A’ и A соответственно.

Из этого свойства касательных к кубической параболе непосредственно вытекает следующий.

Алгоритм КПЦ1ТК. Даны центр O, ось y, точка A и касательная в точке t_A. Решение (рисунок 3з). Строим точку A’ по свойству центральной симметрии. Помещаем P_0 и P_3 в A и A’ соответственно. Делим отрезок AA’ на три части и проводим прямые, параллельные y. Проецируем A в направлении t_A на ближайшую из них и помещаем точку P_1. Проецируем A’ в направлении t_A также на ближайшую и помещаем точку P_2.

Заключение

Был предложен способ представления центрально-симметричных кусков кубических парабол при помощи кубических кривых Безье, который может применяться при выполнении графических работ в CAD-системах и геометрических редакторах, в состав инструментов которых входят кубические кривые Безье. Это, в частности, позволяет использовать кубические параболы не как лекальные, но как точные кривые при решении практических задач. С учетом сказанного в п. 2 это означает возможность построения любой кубической параболы, в том числе общего вида (1) и даже повернутых на произвольный угол: для этого требуется знать расположение центра, направление оси (несобственную точку кривой), некоторую точку и касательную в центре или в этой точке.

Представляет интерес дальнейшее исследование конструктивных свойств кубических парабол, в частности, разработка алгоритмов нахождения центров кубических парабол, касательных к ним. Это позволит строить их при помощи кубических кривых Безье для других наборов исходных параметров.

Список литературы

1. **Бойков, А. А.** О системах построений, связанных с векторными геометрическими редакторами / А. А. Бойков, Н. С. Кадыкова // Журнал естественнонаучных исследований. – 2021. – Т. 6, № 2. – С. 19–30.
2. **Фокс, А.** Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / А. Фокс, М. Пратт. – М. : Мир, 1982. – 304 с.
3. **Голованов, Н. Н.** Геометрическое моделирование / Н. Н. Голованов. – М. : Изд-во Физико-математической литературы, 2002. – 472 с.
4. **Бойков, А. А.** Точное представление параболы в САПР «Компас-3D» при помощи кривой Безье / А. А. Бойков, Д. А. Малахов // Надежность и долговечность машин и механизмов : сборник материалов IX Всероссийской научно-практической конференции. – Иваново, 2018. – С. 407–411.
5. Графический справочник по математике. Атлас кривых / под. ред. проф. А. Ф. Берманта. – М. – Л. : ОНТИ НКТП, 1937. – 212 с.