

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»  
КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

# **ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ**

по курсу *«Математика»*  
для студентов факультета  
электронно-информационных систем

*Кратные и криволинейные интегралы*

II семестр

Брест 2019

**УДК 517.37 (076)**

Настоящие методические указания содержат задачи и упражнения из раздела «Кратные и криволинейные интегралы». Представлены краткие теоретические сведения по темам, наборы заданий для аудиторных и индивидуальных работ, варианты аттестационной работы и решение типового варианта. Указания составлены в соответствии с действующей программой для студентов первого курса факультета электронно-информационных систем.

**Составители:** Каримова Т.И., доцент, к.ф.-м.н.  
Гладкий И.И., старший преподаватель  
Махнист Л.П., доцент, к.т.н.  
Черненко В.П., доцент

**Рецензент:** Мирская Е.И., доцент кафедры алгебры, геометрии и математического моделирования учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н., доцент.

## КРАТНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### 1. Двойной интеграл и его вычисление в декартовых координатах

Пусть функция  $z = f(x, y)$  определена в некоторой ограниченной замкнутой области  $D$  плоскости  $xOy$ . Разобьем область  $D$  произвольным образом на  $n$ ,  $n \in \mathbb{N}$  элементарных областей  $D_1, D_2, \dots, D_n$ , имеющих площади  $\Delta S_1, \Delta S_2, \dots, \Delta S_n$  и диаметры  $d_1, d_2, \dots, d_n$  соответственно. Пусть  $\lambda$  – наибольший из диаметров областей  $D_i$ ,  $i = \overline{1, n}$ . Выберем в каждой элементарной области  $D_i$  произвольную точку  $P_i(x_i, y_i)$ , и найдем

$f(P_i) = f(x_i, y_i)$ . Составим интегральную сумму:  $\sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i$ .

Если существует конечный предел интегральной суммы при  $n \rightarrow \infty$  и  $\lambda \rightarrow 0$ , не зависящий от способа разбиения области  $D$  и выбора точек  $P_i$ , то его называют *двойным интегралом функции  $f(x, y)$  по области  $D$* :

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_D f(x, y) dS = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Если подынтегральная функция  $f(x, y)$  в области интегрирования непрерывна, то такой предел интегральной суммы всегда существует.

*Геометрический смысл двойного интеграла:* если  $f(x, y) \geq 0$ , для всех  $(x, y) \in D$ , то двойной интеграл равен *объему цилиндрического тела*, ограниченного сверху поверхностью  $z = f(x, y)$ , снизу плоскостью  $z = 0$ , сбоку цилиндрической поверхностью, образующие которой параллельны оси  $Oz$ , а направляющая – граница области интегрирования:

$$V = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Если  $f(x, y) = 1$ , то двойной интеграл равен *площади области  $D$* , т.е.

$$S_D = \iint_D dS = \iint_D dx dy.$$

*Механический смысл двойного интеграла:* если область  $D$  – плоская пластинка, расположенная в плоскости  $xOy$  и имеющая поверхностную плотность  $\mu = \mu(x, y)$ , то *масса пластины* равна  $m = \iint_D \mu(x, y) dx dy$ .

*Основные свойства двойного интеграла*

$$1. \iint_D (\alpha f_1(x, y) \pm \beta f_2(x, y)) dx dy = \alpha \iint_D f_1(x, y) dx dy \pm \beta \iint_D f_2(x, y) dx dy.$$

2. Если область интегрирования разбита на несколько областей без общих точек, то  $\iint_D f(x,y) dx dy = \sum_{i=1}^n \iint_{D_i} f(x,y) dx dy$ .

3. Если в области  $D$  функция  $f(x,y)$  ограничена, т.е.  $m \leq f(x,y) \leq M$ , то  $m \cdot S \leq \iint_D f(x,y) dx dy \leq M \cdot S$ , где  $S$  – площадь области  $D$ .

4. *Теорема о среднем.* Если функция  $f(x,y)$  непрерывна в замкнутой области  $D$ , то существует точка  $P_0(x_0, y_0)$  в этой области такая, что

$$\iint_D f(x,y) dx dy = f(x_0, y_0) \cdot S,$$

где  $S$  – площадь области  $D$ ,  $f(x_0, y_0)$  называют средним значением функции  $f(x,y)$  в области  $D$ .

*Вычисление двойного интеграла* в декартовых координатах сводится к вычислению повторного интеграла, вид которого зависит от формы области интегрирования.

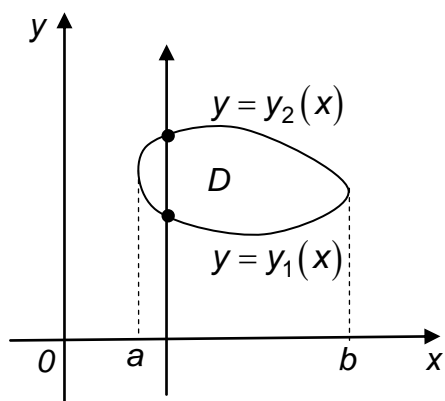


Рисунок 1

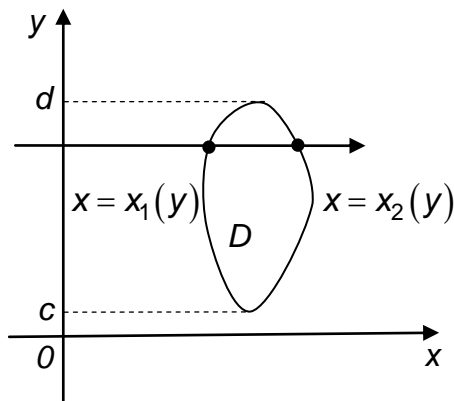


Рисунок 2

Если область  $D$  *правильная относительно оси Oy* (рис.1), т.е. она ограничена слева и справа прямыми  $x=a$ ,  $x=b$ ,  $a < b$ , а снизу и сверху – непрерывными кривыми  $y=y_1(x)$ ,  $y=y_2(x)$ ,  $y_1(x) \leq y_2(x)$ ,  $x \in (a,b)$ , каждая из которых пересекается вертикальными прямыми только в одной точке, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x,y) dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,y) dy.$$

Если область  $D$  *правильная относительно оси Ox* (рис.2), т.е. она ограничена снизу и сверху прямыми  $y=c$ ,  $y=d$ ,  $c < d$ , а слева и справа – непрерывными кривыми  $x=x_1(y)$ ,  $x=x_2(y)$ ,  $x_1(y) \leq x_2(y)$ ,  $y \in (c,d)$ ,

каждая из которых пересекается горизонтальными прямыми только в одной точке, то двойной интеграл вычисляется по формуле

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y) dx.$$

### Задания для аудиторной работы

1. Записать двойной интеграл функции  $f(x, y)$  по области  $D$  в виде повторных интегралов двумя способами. Сделать чертеж области интегрирования.

- 1) область  $D$  ограничена линиями  $x = 1, x = 2, y = 0, y = 4$ ;
- 2) область  $D$  ограничена линиями  $y = 0, x = y, x + y = 4$ ;
- 3) область  $D$  ограничена линиями  $y = x, x + y = 6, y = 1$ ;
- 4) область  $D$  ограничена линиями  $y = x^2, 4 - y = x^2$ ;
- 5) область  $D$  ограничена линиями  $y = -\sqrt{2x - x^2}, x = 0, x = 1, y = 1$ .

2. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

- 1)  $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 f(x, y) dy$
- 2)  $\int_1^2 dx \int_{\frac{1}{x}}^x f(x, y) dy$ ;
- 3)  $\int_0^1 dx \int_{x^3}^{\sqrt{x}} f(x, y) dy$ ;
- 4)  $\int_0^3 dx \int_0^{x/3} f(x, y) dy + \int_3^4 dx \int_0^{4-x} f(x, y) dy$ .

3. Вычислить данные повторные интегралы:

- 1)  $\int_0^2 dx \int_0^1 (x^2 + 2y) dy$ ;
- 2)  $\int_1^2 dx \int_1^x \frac{x^2}{y^2} dy$ ;
- 3)  $\int_0^{2\pi} dx \int_{a \sin \varphi}^a r dr$ .

4. Вычислить двойные интегралы:

- 1)  $\iint_D (x - y) dx dy$ , где область  $D$  ограничена прямыми  $y = 0, x = y, x + y = 2$ ;
- 2)  $\iint_D x^4 y dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $xy = 1, x = y, x = 2$ ;
- 3)  $\iint_D x \cos(x + y) dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $y = 0, x = \pi, y = x$ ;
- 4)  $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$ , где  $D$  ограничена линиями  $x = y^2, x = 0, y = 1$ .

### Задания для индивидуальной работы

5. Записать двойной интеграл функции  $f(x, y)$  по указанной области  $D$  в виде повторных интегралов двумя способами. Сделать чертеж области интегрирования.

- 1)  $D: x=0, x=y, y=5$ ;                      2)  $D: x=0, y=2x, x+y=3$ ;  
 3)  $D: y^2=x+3; y=-x$ ;                      4)  $D: x \geq 0; y \geq 0; y \leq 1; y=\ln x$ ;  
 5)  $D: x^2=2-y; x+y=0$ ;                      6)  $D: y=\sqrt{2-x^2}; y=x^2$ .

6. Изменить порядок интегрирования в повторных интегралах:

1)  $\int_0^1 dx \int_{2x}^{3x} f(x, y) dy$ ;                      2)  $\int_0^1 dy \int_y^{\sqrt{y}} f(x, y) dx$ ;                      3)  $\int_0^4 dx \int_{3x^2}^{12x} f(x, y) dy$ ;

4)  $\int_0^1 dy \int_{\frac{y^2}{2}}^{\sqrt{3-y^2}} f(x, y) dx$ ;                      5)  $\int_{-1}^3 dx \int_2^{\frac{x+5}{2}} f(x, y) dy + \int_3^6 dx \int_2^{6-\frac{2}{3}x} f(x, y) dy$ ;

6)  $\int_{\frac{1}{2}}^2 2y \int_{-\sqrt{y-1}}^{\sqrt{y-1}} f(x, y) dx + \int_2^5 dy \int_{-\sqrt{y-1}}^{3-y} f(x, y) dx$ .

7. Вычислить следующие повторные интегралы:

1)  $\int_3^4 dx \int_1^2 \frac{dy}{(x+y)^2}$ ;                      2)  $\int_0^{\pi} dx \int_0^{1+\cos x} y^2 \sin x dy$ ;                      3)  $\int_0^{\pi/2} dx \int_{\cos x}^1 y^4 dy$ ;

4)  $\int_0^{2\pi} d\varphi \int_{a \sin \varphi}^a r dr$ ;                      5)  $\int_1^2 dx \int_x^{x^2} (2x-y) dy$ ;                      6)  $\int_0^{\pi} \cos^2 x dx \int_0^4 y dy$ .

8. Вычислить данные двойные интегралы:

1)  $\iint_D xy dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x=2, x=4$ ;

$y=1, y=2$ ;

2)  $\iint_D \frac{x^2}{y^2} dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $x=2; y=x; xy=1$ ;

3)  $\iint_D \cos(x+y) dx dy$ , где область  $D$  ограничена прямыми  $x=0; y=\pi$ ;

$y=x$ ;

4)  $\iint_D dx dy$ , где область  $D$  ограничена линиями  $y=2-x; y^2=4x+4$ ;

5)  $\iint_D (x+y) dx dy$ , где область  $D$  ограничена прямыми  $2x+y=1$ ;  $2x+y=3$ ;  $x-y=-1$ ;  $x-y=2$ .

## 2. Замена переменных в двойном интеграле

*Двойной интеграл в криволинейных координатах*

Пусть переменные  $x$  и  $y$  связаны с переменными  $u$  и  $v$  соотношениями  $x = \varphi(u, v)$ ,  $y = \psi(u, v)$ , при которых область  $D$  плоскости  $xOy$  переходит в область  $D_1$  плоскости  $uO_1v$ , причем функции  $\varphi(u, v)$ ,  $\psi(u, v)$  однозначны, непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка в области  $D_1$ , тогда формула замены переменных в двойном интеграле имеет вид

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D_1} f(\varphi(u, v), \psi(u, v)) |J(u, v)| du dv,$$

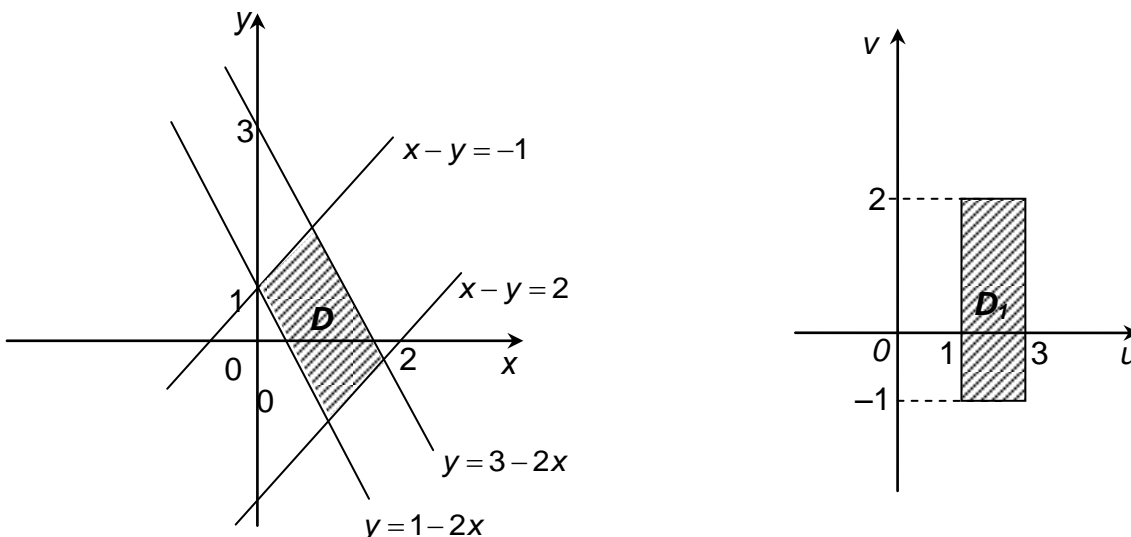
где  $J(u, v)$  – определитель Якоби или якобиан перехода

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Пределы интегрирования в новом интеграле расставляют по изложенному ранее правилу с учетом формы области  $D_1$ .

**Пример 1.** Вычислить  $\iint_D (x+y) dx dy$ , если область  $D$  ограничена прямыми  $2x+y=1$ ,  $2x+y=3$ ,  $x-y=-1$ ,  $x-y=2$ .

**Решение.** Изобразим область  $D$  на плоскости  $xOy$ .



Введем новые переменные  $u = 2x + y$ ,  $v = x - y$ , тогда  $x = \frac{1}{3}(u + v)$ ,  
 $y = \frac{1}{3}(u - 2v)$ ,  $1 \leq u \leq 3$ ,  $-1 \leq v \leq 2$ .

Найдем якобиан преобразования:

$$J = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{vmatrix} = -\frac{2}{9} - \frac{1}{9} = -\frac{3}{9} = -\frac{1}{3}; \quad |J| = \frac{1}{3}.$$

Тогда:

$$\begin{aligned} \iint_D (x + y) dx dy &= \iint_{D_1} \left( \frac{u+v}{3} + \frac{u-2v}{3} \right) \cdot \frac{1}{3} du dv = \frac{1}{9} \iint_{D_1} (2u - v) du dv = \\ &= \frac{1}{9} \int_1^3 du \int_{-1}^2 (2u - v) dv = \frac{2}{9} \int_1^3 u du \int_{-1}^2 dv - \frac{1}{9} \int_1^3 du \int_{-1}^2 v dv = \\ &= \frac{2}{9} \cdot \left( \frac{u^2}{2} \right) \Big|_1^3 \cdot v \Big|_{-1}^2 - \frac{1}{9} \cdot u \Big|_1^3 \cdot \left( \frac{v^2}{2} \right) \Big|_{-1}^2 = \frac{9-1}{9} \cdot 3 - \frac{(3-1)}{18} \cdot (4-1) = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \frac{7}{3}. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{7}{3}$ .

### Двойной интеграл в полярных координатах

Рассмотрим частный случай замены переменной: замену декартовых координат  $x$  и  $y$  полярными координатами  $r$  и  $\varphi$ .

В качестве  $u$  и  $v$  возьмем полярные координаты  $r$  и  $\varphi$ . Известно, что декартовы координаты  $(x, y)$  и полярные координаты  $(r, \varphi)$  связаны соотношениями  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ .

Якобиан перехода будет равен

$$J(r, \varphi) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi \\ \sin \varphi & r \cos \varphi \end{vmatrix} = r.$$

Формула замены переменных примет вид

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D^*} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr d\varphi,$$

где  $D^*$  – область в полярной системе координат, соответствующая области  $D$  в декартовой системе координат.

Для вычисления двойного интеграла в полярных координатах применяется тоже правило сведения его к повторному интегралу.



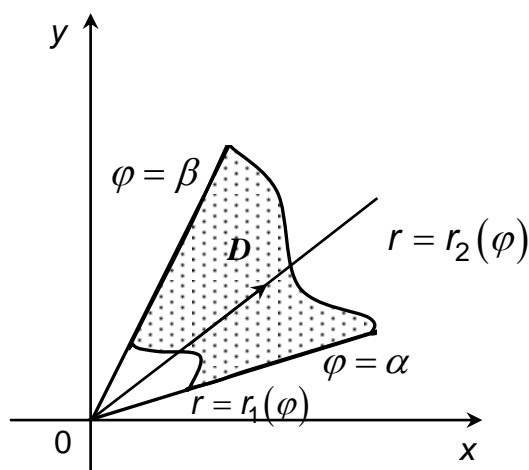


Рисунок 3

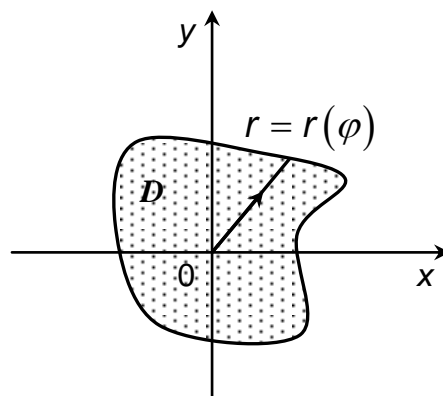


Рисунок 4

Если в полярной системе координат задана область  $D^*$ , ограниченная кривыми  $r=r_1(\varphi)$ ,  $r=r_2(\varphi)$ ,  $\varphi=\alpha$ ,  $\varphi=\beta$ , где  $\alpha < \beta$  и  $r_1(\varphi) \leq r_2(\varphi)$  (см. рис.3), т. е. область  $D$  правильная: каждый луч, выходящий из полюса, проходящий через внутреннюю точку области, пересекает ее границу не более чем в двух точках, то формула замены переменных примет вид

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

Если область  $D^*$  в полярной системе координат определяется неравенствами  $0 < \varphi < 2\pi$  и  $0 \leq r \leq r(\varphi)$ , как на рис. 4, то формула замены переменных примет вид

$$\iint_{D^*} f(x, y) dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) r dr.$$

### Двойной интеграл в обобщенных полярных координатах

Обобщенными полярными (эллиптическими) координатами называют координаты  $(r; \varphi)$ , связанные с декартовыми координатами  $(x, y)$  равенствами  $x = ar \cos \varphi$ ,  $y = br \sin \varphi$ , где  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $a > 0$ ,  $b > 0$ ,  $a \neq b$ ,  $|J(r; \varphi)| = abr$ .

Тогда формула перехода имеет вид:

$$\iint_D f(x, y) dx dy = ab \iint_D f(ar \cos \varphi, br \sin \varphi) r dr d\varphi.$$

Эта формула используется в тех случаях, когда область интегрирования – эллипс или его часть, и подынтегральная функция содержит выражение вида

$$\left( \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right)^k.$$

**Пример 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D \sin \pi \left( \frac{x^2}{4} + y^2 \right) dx dy$ , где об-

ласть  $D: \frac{x^2}{4} + y^2 = 1; \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$ .

**Решение.** Границами области интегрирования  $D$  являются эллипсы.

Введем обобщенные полярные координаты:  $x = 2r \cos \varphi, y = r \sin \varphi, |J| = 2r$ .

Запишем уравнения эллипсов в новых координатах. Преобразуем уравне-

ние  $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1$ . Получим:

$$r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi = 1 \Rightarrow r = 1.$$

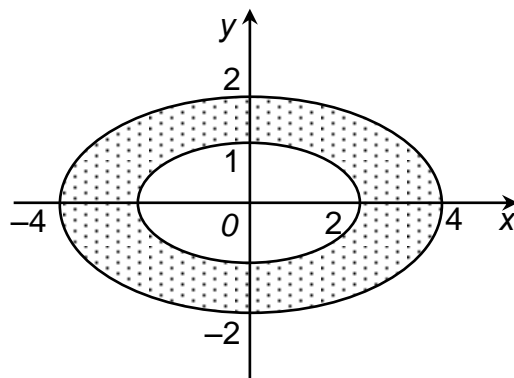
Из уравнения  $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$  получим:

$$\frac{1}{4} (r^2 \cos^2 \varphi + r^2 \sin^2 \varphi) = 1 \Rightarrow \frac{r^2}{4} = 1 \Rightarrow r = 2, 0 \leq \varphi < 2\pi.$$

Исходный интеграл будет равен:

$$\begin{aligned} \iint_D \sin \pi \left( \frac{x^2}{4} + y^2 \right) dx dy &= \iint_D \sin(\pi \cdot r^2) \cdot 2r dr d\varphi = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_1^2 \sin(\pi \cdot r^2) \cdot 2r dr = \\ &= 2 \int_1^2 \sin(r^2 \pi) d(r^2 \pi) = -2 \cos(r^2 \pi) \Big|_1^2 = -2(\cos 4\pi - \cos \pi) = -4. \end{aligned}$$

Ответ:  $-4$ .



### Задания для аудиторной работы

9. Вычислить двойные интегралы, используя полярную систему координат:

1)  $\iint_D y dx dy$ , где область  $D$  – верхний полукруг радиуса  $a$  с центром в

точке  $(a; 0)$ ;

2)  $\iint_D (12 - x - y) dx dy$ , где область  $D$  ограничена окружностью

$x^2 + y^2 = 25$ ;

3)  $\iint_D \arctg \frac{y}{x} dx dy$ , где область  $D$  – часть кольца  $x^2 + y^2 \geq 1, x^2 + y^2 \leq 9$ ,

$y \geq \frac{x}{\sqrt{3}}, y \leq x\sqrt{3}, y > 0$ ;

4)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , где область  $D: x^2 + y^2 = 4x$ ;

5)  $\iint_D xy dx dy$ , где область  $D$  ограничена лемниской  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ .

10. Вычислить повторные интегралы, переходя к полярной системе координат:

1)  $\int_{-3}^0 dx \int_0^{\sqrt{9-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2 + y^2} \operatorname{ctg} \sqrt{x^2 + y^2}}$ ;    2)  $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{\ln(1 + \sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} dy$ .

11. Вычислить двойной интеграл, переходя к обобщенным полярным координатам:  $\iint_D xy dx dy$ , где  $D: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, x = 0, y \geq 0$ .

### **Задания для индивидуальной работы**

12. Вычислить двойные интегралы, используя полярную систему координат:

1)  $\iint_D \frac{y dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ , где область  $D$  ограничена двумя окружностями  $x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 9 (y \geq 0)$ ;

2)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , где область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 4x$ ;

3)  $\iint_D 6 dx dy$ , если  $D: x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 6x, y = x, y = 0$ ;

4)  $\iint_D \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ , если  $D$  ограничена лемниской  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2 xy$ .

13. Вычислить двойные интегралы, переходя к полярной системе координат:

1)  $\iint_D (6 - 2x - 3y) dx dy$ , если область  $D$  – круг  $x^2 + y^2 \leq 4$ .

2)  $\iint_D \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} dx dy$ , если  $D: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 4, y = x, y = 0, x < 0, y < 0$ ;

3)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , если  $D: x^2 + y^2 = 4x, x^2 + y^2 = 6x, y = x, y = \sqrt{3}x, y > 0$ ;

4)  $\iint_D (x^2 + y^2) dx dy$ , если область  $D$  ограничена лемниской Бернулли

$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

14. Вычислить повторные интегралы, переходя к полярной системе координат:

$$1) \int_{-2}^0 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} \sin(x^2 + y^2) dy; \quad 2) \int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{\frac{1-x^2-y^2}{1+x^2+y^2}} dy;$$

$$3) \int_{-R}^R dx \int_0^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{dy}{\sqrt{x^2+y^2} \sin^2 \sqrt{x^2+y^2}}.$$

### 3. Вычисление площадей фигур и объемов тел с помощью двойного интеграла

1. Если область  $D$  определена неравенствами вида  $a \leq x \leq b$ ,  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ , то площадь  $S$  этой области можно найти по формуле

$$S = \iint_D dx dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy.$$

2. Если область  $D$  определена неравенствами вида  $c \leq y \leq d$ ,  $x_1(y) \leq x \leq x_2(y)$ , то площадь  $S$  может быть найдена по формуле

$$S = \iint_D dx dy = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} dx.$$

3. Если область  $D$  определена в полярных координатах неравенствами  $\alpha \leq \varphi \leq \beta$ ,  $r_1(\varphi) \leq r \leq r_2(\varphi)$ , то площадь  $S$  можно найти по формуле

$$S = \iint_D r dr d\varphi = \int_{\alpha}^{\beta} d\varphi \int_{r_1(\varphi)}^{r_2(\varphi)} r dr.$$

4. Пусть цилиндрическое тело ограничено сверху поверхностью  $z = f(x, y)$ , снизу – плоскостью  $z = 0$ , его образующие параллельны оси  $Oz$ , а направляющая – замкнутая кривая, ограничивающая в плоскости  $xOy$  область  $D$ . Объем этого тела может быть найден по формуле:

$$V = \iint_D z dx dy = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

### Задания для аудиторной работы

15. Вычислить площади фигур, ограниченных следующими линиями:

- 1)  $y = x$ ,  $y = 5x$ ,  $x = 1$ ;                      2)  $y = x^2$ ,  $y = \frac{3}{4}x^2 + 1$ ;  
3)  $y^2 = 4 + x$ ,  $x + 3y = 0$ ;                      4)  $x = y^2$ ,  $x = \sqrt{2 - y^2}$ ;  
5)  $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$ ;                      6)  $r = a \sin 2\varphi$ ,  $a > 0$ .

16. Изобразить на чертеже тело, объем которого выражается интегралом

$$\int_0^1 dx \int_0^{1-x} (x^2 + y^2) dy, \text{ и вычислить этот объем.}$$

17. Вычислить объемы тел, ограниченных следующими поверхностями:

- 1)  $x^2 + y^2 = R^2$ ,  $x^2 + z^2 = R^2$ ;  
2)  $z = x^2 + y^2$ ,  $z = x + y + 10$ ,  $z = 0$ .

18. Вычислить объем тела, ограниченного снизу частью плоскости  $xOy$ , расположенной внутри лемнискаты  $r^2 = a^2 \cos 2\varphi$ , сверху – поверхностью шара  $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ , с боков – цилиндрической поверхностью, направляющей для которой служит лемниската.

19. Вычислить объем тела, ограниченного координатными плоскостями, плоскостями  $x = 4$ ,  $y = 4$  и параболоидом  $z = x^2 + y^2 + 1$ .

20. Найти массу круга радиуса  $a$ , плотность которого в каждой точке пропорциональна расстоянию от этой точки до контура круга.

21. Вычислить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной кардиоидой  $r = a(1 + \cos \varphi)$ .

22. Вычислить координаты центра тяжести фигуры, ограниченной синусоидой  $y = \sin x$  и прямой  $x = \frac{\pi}{4}$ .

### Задания для индивидуальной работы

23. Вычислить площади фигур, ограниченных заданными линиями:

- 1)  $y = \sqrt{x}$ ,  $y = 2\sqrt{x}$ ,  $x = 4$ ;                      1)  $y = 2 - x$ ,  $y^2 = 4x + 4$ ;  
3)  $y = 4x - x^2$ ,  $y = 2x^2 + 5x$ ;                      4)  $r = a \sin 2\varphi$ ,  $a > 0$ .

24. Переходя к полярным координатам, найти площадь области, ограниченной линиями

- 1)  $x^2 + y^2 = 2x$ ,  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $y = x$ ,  $y = 0$ ;  
2)  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ ,  $y = 0$ .

25. Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями:

- 1) цилиндром  $x^2 + y^2 = 1$  и плоскостями  $x + y - z + 10 = 0$ ,  $z = 0$ ;

2) цилиндром  $x = 2y^2$  и плоскостями  $x + 2y + z = 4$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;

3) параболоидом  $z = x^2 + y^2$  и плоскостями  $z = 0$ ,  $y = 1$ ,  $y = 2x$ ,  $y = 6 - x$ ;

4) параболоидами  $x^2 + y^2 = 4x$ ,  $2z = x^2 + y^2$  и плоскостью  $z = 0$ .

**26.** Вычислить объемы тел, ограниченных указанными поверхностями.

1)  $z = 4 - x^2$ ,  $2x + y = 4$ ,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$ ;

2)  $x^2 + y^2 = a^2$ ,  $x^2 + y^2 - z^2 = -a^2$ ;

3)  $z = x^2 + y^2$ ;  $y = x^2$ ;  $y = 1$ ,  $z = 0$ ;

4)  $6z = x^2 + y^2$ ,  $x^2 + y^2 + z^2 = 27$ ,  $z > 0$ .

#### **4. Тройной интеграл, его вычисление в декартовых, цилиндрических и сферических координатах**

1. Если в пространстве задана замкнутая область  $(V)$ , определенная неравенствами  $a \leq x \leq b$ ,  $y_1(x) \leq y \leq y_2(x)$ ,  $z_1(x, y) \leq z \leq z_2(x, y)$ , то тройной интеграл от непрерывной в этой области функции  $f(x, y, z)$  находится по формуле

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} dy \int_{z_1(x, y)}^{z_2(x, y)} f(x, y, z) dz.$$

Если  $f(x, y, z) \equiv 1$ , для всех  $(x, y, z) \in (V)$ , то тройной интеграл

$$\iiint_{(V)} dx dy dz \text{ определяет объем данной области, т. е. } V = \iiint_{(V)} dx dy dz.$$

2. *Тройной интеграл в цилиндрических координатах.*

Декартовы и цилиндрические координаты точки  $P(x, y, z)$  связаны соотношениями  $x = r \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \varphi$ ,  $z = z$ , где  $0 \leq \varphi < 2\pi$ ,  $0 \leq r < +\infty$ ,  $|z| < +\infty$ .

Якобиан преобразования  $J(r, \varphi, z) = r$ . Формула перехода в тройном интеграле от прямоугольных координат к цилиндрическим имеет вид:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V_1)} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi, z) r dr d\varphi dz.$$

3. *Тройной интеграл в сферических координатах.*

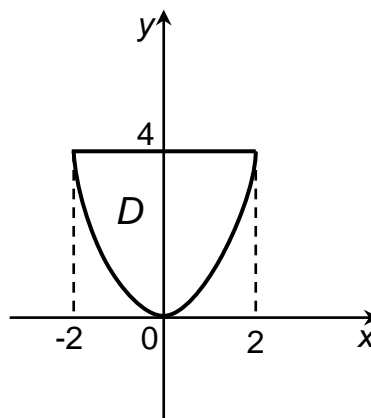
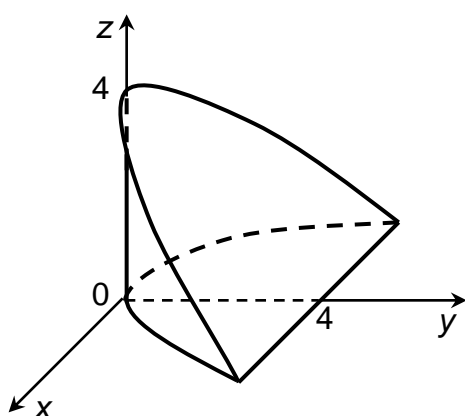
Декартовы и сферические координатами точки  $P(x, y, z)$  связаны соотношениями  $x = r \sin \theta \cos \varphi$ ,  $y = r \sin \theta \sin \varphi$ ,  $z = r \cos \theta$ , где  $0 \leq r < +\infty$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$ .

Якобиан преобразования  $J(r, \theta, \varphi) = r^2 \sin \theta$ . Формула перехода в тройном интеграле от прямоугольных координат к сферическим имеет вид:

$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{(V_1)} f(r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi.$$

**Пример 3.** Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле  $\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$ , если область интегрирования ограничена поверхностями  $y = x^2$ ,  $z = 0$ ,  $y + z = 4$ .

**Решение.** Изобразим пространственную область  $(V)$ :  $y = x^2$  – параболический цилиндр, ограниченный снизу плоскостью  $z = 0$ , сверху – плоскостью, параллельной оси  $Ox$ . Проекция на плоскость  $xOy$  представляет собой параболический сегмент:  $-2 \leq x \leq 2$ ,  $x^2 \leq y \leq 4$ .



$$\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz = \iint_D dx dy \int_0^{4-y} f(x, y, z) dz = \int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 dy \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) dz.$$

Ответ:  $\int_{-2}^2 dx \int_{x^2}^4 dy \int_0^{4-x^2} f(x, y, z) dz.$

### Задания для аудиторной работы

**27.** Вычислить  $\iiint_{(V)} x^2 y^2 z dx dy dz$ , если область  $(V)$  определяется неравенствами  $0 \leq x \leq 1$ ,  $0 \leq y \leq x$ ,  $0 \leq z \leq xy$ .

**28.** Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле  $\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$ , где область  $(V)$  ограничена поверхностями

$x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 0$ ,  $z = 1$ ,  $(x \geq 0, y \geq 0)$ . Интегрирование проводить в последовательности: а)  $x, y, z$ ; б)  $y, x, z$ ; в)  $z, x, y$ .

29. Вычислить  $\iiint_{(V)} z^3 dx dy dz$ ,  $(V)$  ограничена конусом  $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}$

$(x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0)$ , плоскостью  $z = c$  и координатными плоскостями.

30. Перейти в тройном интеграле  $\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$  к цилиндрическим

координатам, если область  $(V)$  ограничена цилиндром  $x^2 + y^2 = R^2$  и плоскостями  $z = 0, z = 1, y = x, y = x\sqrt{3}$ .

31. Вычислить тройной интеграл с помощью цилиндрических координат.

1)  $\iiint_{(V)} \frac{y^2 z dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ ,  $(V): y \geq 0, y \leq \sqrt{3}x, z = 3(x^2 + y^2), z = 3$ ;

2)  $\iiint_{(V)} \frac{xy dx dy dz}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}$ ,  $(V): z = x^2 + y^2, y \geq 0, y \leq x, z = 4$ .

32. Перейти в тройном интеграле  $\iiint_{(V)} f(x, y, z) dx dy dz$  к сферическим ко-

ординатам, если область  $(V)$  – часть шара  $x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2$ , лежащая в первом октанте.

33. Вычислить тройной интеграл с помощью сферических координат.

1)  $\iiint_{(V)} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ ,  $(V): x^2 + y^2 + z^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ ;

2)  $\iiint_{(V)} x^2 dx dy dz$ ,  $(V): 1 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 16, (V): y \geq 0, y \leq x, z \geq 0$ .

### Задания для индивидуальной работы

34. Расставить пределы интегрирования в тройном интеграле

$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz$ , где область  $V$  ограничена заданными поверхностями:

1)  $V: 2y + z = 4, y + z = 2, 2y = x^2$ ;

2)  $V: x = z^2 + y^2, x = 9$ ;

3)  $V: x^2 + z^2 = y^2, 0 \leq y \leq 3$ ;

4)  $V: x^2 + y^2 + z^2 = 9, x \geq 0$ .

35. Вычислить интегралы:

1)  $\int_0^a dx \int_0^x dy \int_0^{xy} x^3 y^3 z dz$ ;



2)  $\iiint_{(V)} x \, dx \, dy \, dz$ , если область  $V$  ограничена плоскостями

$$x=0, y=0, y=h, x+z=a;$$

3)  $\iiint_V (2x-y) \, dx \, dy \, dz$ , если область  $V$ :  $z=x+y+4, y^2=4x, x=4,$

$$z=0.$$

**36. Вычислить интегралы:**

$$1) \int_0^1 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dy \int_0^1 dz;$$

2)  $\iiint_V x^2 y^2 \, dx \, dy \, dz$ , если область  $V$  ограничена поверхностями

$$z=x^2+y^2, x^2+y^2=1, z=0.$$

3)  $\iiint_{(V)} \frac{xz \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{x^2+y^2}}$ ,  $(V): z=2(x^2+y^2), y \geq 0, y \leq \frac{1}{\sqrt{3}}x, z=18.$

**37. Вычислить интегралы:**

1)  $\iiint_{(V)} \frac{x^2 z \, dx \, dy \, dz}{\sqrt{(x^2+y^2+z^2)^3}}$ ,  $(V): x^2+y^2+z^2=16, z \geq 0.$

2)  $\iiint_{(V)} (z+2) \, dx \, dy \, dz$ , если область  $V$  ограничена поверхностями

$$x^2+y^2+z^2=4, x^2+y^2+z^2=9, z=0.$$

### 5. Приложения тройного интеграла

1. Вычисление объемов, массы тела.

Объем  $V$  области  $(V)$  выражается формулой:  $V = \iiint_{(V)} dx \, dy \, dz.$

В цилиндрических координатах этот интеграл имеет вид:

$$V = \iiint_{(V)} \rho \, d\rho \, d\varphi \, dz,$$

а в сферических координатах  $V = \iiint_{(V'')} r^2 \sin \theta \, dr \, d\theta \, d\varphi.$

Если тело занимает объем  $V$  и  $\gamma = \gamma(x, y, z)$  – плотность его в точке

$M(x, y, z)$ , то масса тела:  $m = \iiint_{(V)} \gamma(x, y, z) \, dx \, dy \, dz.$

## 2. Центр масс и моменты инерции тела.

Координаты центра масс тела определяются по формулам:

$$x_c = \frac{1}{m} \iiint_{(V)} \gamma x dx dy dz, \quad y_c = \frac{1}{m} \iiint_{(V)} \gamma y dx dy dz, \quad z_c = \frac{1}{m} \iiint_{(V)} \gamma z dx dy dz,$$

где  $m$  – масса тела.

Если тело является однородным, то плотность в каждой точке  $\gamma = 1$ .

Моменты инерции тела относительно координатных плоскостей определяются формулами:

$$I_{xy} = \iiint_{(V)} \gamma z^2 dx dy dz, \quad I_{xz} = \iiint_{(V)} \gamma y^2 dx dy dz, \quad I_{yz} = \iiint_{(V)} \gamma x^2 dx dy dz.$$

Момент инерции тела относительно некоторой оси  $Ou$  можно найти по формуле  $I_u = \iiint_{(V)} \gamma r^2 dx dy dz$ , где  $r$  – расстояние точки  $N(x, y, z)$

тела от оси  $Ou$ .

В частности, моменты инерции тела относительно координатных осей  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  можно вычислить по формулам:

$$I_x = \iiint_{(V)} \gamma (y^2 + z^2) dx dy dz, \quad I_y = \iiint_{(V)} \gamma (x^2 + z^2) dx dy dz,$$

$$I_z = \iiint_{(V)} \gamma (x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Момент инерции тела относительно начала координат определяется формулой  $I_0 = \iiint_{(V)} \gamma (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ .

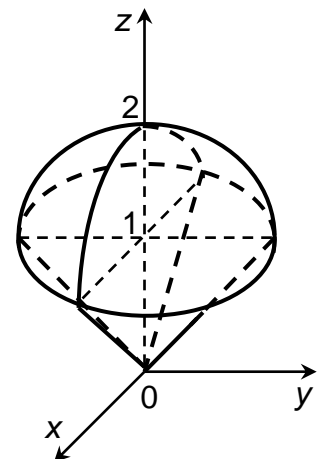
Очевидно, имеют место следующие соотношения:

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}, \quad I_y = I_{yx} + I_{yz}, \quad I_z = I_{zx} + I_{zy}, \quad I_0 = I_{xy} + I_{yz} + I_{zx}.$$

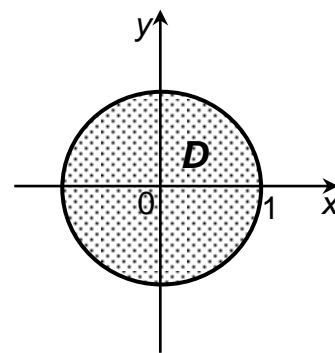
**Пример 4.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $2 - z - x^2 - y^2 = 0$ .

**Решение.**  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$  – часть конуса, которая ограничивает тело снизу.  $z = 2 - x^2 - y^2$  – параболоид, который ограничивает тело сверху. Найдем линию и высоту пересечения данных поверхностей.

$$\begin{cases} z = \sqrt{x^2 + y^2}, \\ z = 2 - x^2 - y^2, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = z^2, \\ x^2 + y^2 = 2 - z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z^2 + z - 2 = 0, \\ x^2 + y^2 = 2 - z, \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} z_1 = -2, \quad z_2 = 1. \\ x^2 + y^2 = 1. \end{cases}$$



Проекцией области интегрирования  $\Omega$  на плоскость  $xOy$  является круг радиуса  $R=1$  с центром в начале координат. Перейдем к цилиндрическим координатам:



$$0 \leq \varphi \leq 2\pi, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad r \leq z \leq 2 - r^2.$$

Объем тела равен:

$$\begin{aligned} V &= \iiint_{\Omega} dx dy dz = \iiint_{\Omega'} r dr d\varphi dz = \\ &= \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^1 r dr \int_r^{2-r^2} dz = 2\pi \int_0^1 r(2-r^2-r) dr = 2\pi \left( r^2 - \frac{r^4}{4} - \frac{r^3}{3} \right) \Big|_0^1 = \\ &= 2\pi \left( 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right) = \frac{5}{6}\pi. \end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{5}{6}\pi$ .

### Задания для аудиторной работы

- 38.** С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченно-го указанными поверхностями  $x^2 + y^2 = 1$ ,  $z = 2 - x - y$ ,  $z \geq 0$ . Сделать чертеж.
- 39.** Вычислить объем тела, ограниченного поверхностями  $x^2 + y^2 = 10x$ ,  $x^2 + y^2 = 13x$ ,  $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 0$ ,  $y \geq 0$ .
- 40.** Вычислить объем части шара  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ , расположенной внутри конуса  $z^2 = x^2 + y^2$ .
- 41.** Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область  $(V)$ :  $z = 2\sqrt{x^2 + y^2}$ ,  $z = 8$ .
- 42.** Вычислить момент инерции относительно оси  $Ox$  однородного тела, занимающего область  $(V)$ :  $x = y^2 + z^2$ ,  $x = 2$ . Плотность тела  $\gamma$  принять равной 1.

### Задания для индивидуальной работы

- 43.** С помощью тройного интеграла вычислить объем тела, ограниченно-го указанными поверхностями. Сделать чертеж.
- 1)  $(V)$ :  $x^2 + y^2 = 4$ ,  $z = 4 - x - y$ ,  $z \geq 0$ ;
  - 2)  $(V)$ :  $x \geq 0$ ,  $z \geq 0$ ,  $z = y$ ,  $x = 4$ ,  $y = \sqrt{25 - x^2}$ .

44. Вычислить координаты центра масс однородного тела, занимающего область  $(V)$ , ограниченную указанными поверхностями.

1)  $(V): x = 6\sqrt{y^2 + z^2}, y^2 + z^2 = 9, x = 0;$

2)  $(V): z = 8(x^2 + y^2), z = 32.$

45. Вычислить момент инерции относительно указанной оси координат однородного тела, занимающего область  $(V)$ , ограниченную данными поверхностями. Плотность тела  $\gamma$  принять равной 1.

1)  $(V): x = y^2 + z^2, x = 9, Ox;$

2)  $(V): y^2 = x^2 + z^2, y = 2, Oy.$

## КРИВОЛИНЕЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

### 6. Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги)

Пусть в пространстве  $\mathbb{R}^3$  задана гладкая дуга  $L_{AB}$  кривой  $L$ , во всех точках которой определена непрерывная функция  $u = f(x, y, z)$ . Дугу  $AB$  произвольным образом разобьем на  $n$  частей длиной  $\Delta \ell_i$  ( $i = \overline{1, n}$ ). Обозначим через  $\lambda = \max_i \Delta \ell_i$ . На каждой элементарной дуге выберем произвольную точку  $M_i(x_i, y_i, z_i)$  и вычислим  $u_i = f(M_i) = f(x_i, y_i, z_i)$ .

Составим интегральную сумму  $I_n = \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta \ell_i$ . Конечный предел полученной интегральной суммы при  $\lambda \rightarrow 0$  называется *криволинейным интегралом первого рода* по дуге  $L_{AB}$  от функции  $f(x, y, z)$ :

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i, z_i) \Delta \ell_i.$$

Если кривая  $AB$  лежит в плоскости  $xOy$  и в каждой точке этой кривой задана непрерывная функция  $f(x, y)$ , то  $\int_{AB} f(x, y) dl = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(x_i, y_i) \Delta \ell_i$ .

*Вычисление криволинейного интеграла первого рода сводится к вычислению определенного интеграла.*

а) Пусть дуга  $AB$  задана параметрически с помощью уравнений  $x = x(t), y = y(t), z = z(t), t \in [\alpha, \beta]$ . Тогда

$$\int_{AB} f(x, y, z) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(x(t), y(t), z(t)) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt.$$

б) Если дуга  $AB$  плоской кривой задана непрерывной и дифференцируемой на  $[a; b]$  функцией  $y = g(x)$ , то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_a^b f(x, g(x)) \sqrt{1 + (g'(x))^2} dx.$$

в) Если дуга  $AB$  задана полярным уравнением  $r = r(\varphi)$ ,  $\varphi \in [\alpha; \beta]$ , то

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{\alpha}^{\beta} f(r(\varphi) \cos \varphi, r(\varphi) \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi.$$

*Некоторые свойства криволинейного интеграла по дуге:*

1. Криволинейный интеграл первого рода не зависит от направления пути интегрирования.

2. Если дуга  $L = L_1 \cup L_2$  и при этом  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ , то

$$\int_L f(x, y, z) dl = \int_{L_1} f(x, y, z) dl + \int_{L_2} f(x, y, z) dl.$$

3. Если  $f(x, y, z) = 1$ , то  $\int_{AB} dl = l_{AB}$  – длина дуги  $AB$ .

### **Задания для аудиторной работы**

46. Вычислить интеграл  $\int_L \frac{dl}{x-y}$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = \frac{x}{2} - 2$ , соединяющий точки  $(0; -2)$  и  $(4; 0)$ .

47. Вычислить интеграл  $\oint_L (x^2 + y^3) dl$ , где  $L$  – контур треугольника  $ABO$  с вершинами в точках  $A(1; 0)$ ,  $B(0; 1)$ ,  $O(0; 0)$ .

48. Вычислить интеграл  $\int_L \sqrt{2y} dl$ , если  $L$  – первая арка циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  ( $a > 0$ ).

49. Вычислить интеграл  $\int_L xyz dl$ , если  $L$  – отрезок прямой между точками  $A(1; 0; 1)$  и  $B(2; 2; 3)$ .

50. Вычислить интеграл  $\int_L |y| dl$ , если  $L$  – дуга лемнискаты Бернулли

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2), \quad x > 0.$$

51. Вычислить длину дуги кривой  $L$ :  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = \sqrt{3}t$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$ .

## Задания для индивидуальной работы

52. Вычислить интегралы:

1)  $\int_L \frac{dl}{x+y}$ , если  $L$  – отрезок прямой  $y = x + 2$ ,  $1 \leq x \leq 2$ ;

2)  $\int_L \frac{dl}{x-y}$ , если  $L$  – отрезок прямой  $y = 2 - 5x$ ,  $1 \leq x \leq 3$ .

53. Вычислить  $\oint_L xy dl$ , если  $L$  – контур прямоугольника с вершинами в точках  $A(0;0)$ ,  $B(4;0)$ ,  $C(4;2)$ ,  $D(0,2)$ .

54. Вычислить интегралы:

1)  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $L$  – кривая  $\begin{cases} x = a(\cos t + t \sin t); \\ y = a(\sin t - t \cos t); \end{cases}$

2)  $\int_L (3x - 2\sqrt[3]{a^2 y}) dl$ , если  $L: x = a \cos^3 t$ ,  $y = a \sin^3 t$ ,  $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ .

55. Вычислить интегралы:

1)  $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$ , где  $L$  – кривая  $r = 1 + \cos \varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ;

2)  $\int_L (x + y) dl$ , если  $L: r^2 = 4 \cos 2\varphi$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ .

56. Вычислить длину дуги кривой  $L$ , если:

1)  $L: x = 3t$ ,  $y = 3t^2$ ,  $z = 2t^3$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .

2)  $L: x = e^{-t} \cos t$ ,  $y = e^{-t} \sin t$ ,  $z = e^{-t}$ ,  $0 \leq t < +\infty$ .

### 7. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам)

Пусть задана дуга  $AB = L$ , в каждой точке  $M(x; y; z)$  которой приложена сила  $\vec{F} = \vec{F}(M)$ , переменная по величине и направлению  $\vec{F}(M) = (P(M); Q(M); R(M)) = P(x, y)\vec{i} + Q(x, y)\vec{j} + R(x, y)\vec{k}$ . Вычислим работу силы  $\vec{F}$  при перемещении материальной точки из положения  $A$  в положение  $B$  по дуге  $AB$ .

Разобьем дугу  $AB$  на  $n$  элементарных дуг  $M_{i-1}M_i$ , и каждую из них заменим хордой, соединяющей ее концы. Считаем, что при движении материальной точки вдоль элементарной хорды сила остается постоянной, равной  $\vec{F} = \vec{F}(M_{i-1})$ . Тогда элемент работы вектора силы по перемещению вдоль элементарной дуги будет равен:

$$\Delta A_i = \vec{F}(M_{i-1}) \cdot \overrightarrow{M_{i-1}M_i}, \quad \overrightarrow{M_{i-1}M_i} = (\Delta x_i, \Delta y_i, \Delta z_i), \text{ тогда}$$

$$\Delta A_i = P(M_{i-1}) \cdot \Delta x_i + Q(M_{i-1}) \cdot \Delta y_i + R(M_{i-1}) \cdot \Delta z_i,$$

где  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  – непрерывные функции.

Всю работу вектора силы по перемещению по дуге  $AB$  получим, если

$$\text{перейдем к пределу } A = \lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ \Delta x_i \rightarrow 0 \\ \Delta y_i \rightarrow 0 \\ \Delta z_i \rightarrow 0}} \sum_{i=1}^n \Delta A_i.$$

Конечный предел такого вида интегральных сумм называют *криволинейным интегралом второго рода (КРИ-II)* (по координатам) и обозначают

$$\int_L \vec{F}(M) \cdot d\vec{s} = \int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz, \quad d\vec{s} = (dx, dy, dz).$$

$$\text{Таким образом, } A = \int_L \vec{f}(M) \cdot d\vec{s}.$$

КРИ-II зависит от выбора направления обхода кривой: если изменить направление обхода, то интеграл меняет знак:

$$\int_{AB} P dx + Q dy + R dz = - \int_{BA} P dx + Q dy + R dz.$$

Вычисление КРИ-II сводится к вычислению определенного интеграла.

Если линия  $L$  задана параметрическими уравнениями  $x = x(t)$ ,  $y = y(t)$ ,  $z = z(t)$  ( $t_1 \leq t \leq t_2$ ) и значению  $t_1$  соответствует точка  $A$ , а значению  $t_2$  – точка  $B$ , то

$$\begin{aligned} & \int_{AB} P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} \{ P(x(t), y(t), z(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t)) y'(t) + \\ & \quad + R(x(t), y(t), z(t)) z'(t) \} dt. \end{aligned}$$

В частности, для кривой  $L$ , лежащей в плоскости  $xOy$ , формула примет вид:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_{t_1}^{t_2} \{ P(x(t), y(t)) x'(t) + Q(x(t), y(t)) y'(t) \} dt.$$

### Задания для аудиторной работы

57. Вычислить данные криволинейные интегралы:

1)  $\int_L (y + x^2) dx + (2x - y) dy$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = 2x - x^2$  от  $A(1; 1)$  до  $B(3; -3)$ ;

2)  $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2) dx + xy dy$ , где  $L_{AB}$  – отрезок прямой  $AB$  от  $A(1, 1)$  до  $B(3, 4)$ ;

3)  $\int_{L_{AB}} 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz$ , где  $L_{AB}$  – дуга одного витка  $L_{AB}$  винтовой линии  $x = \cos t$ ,  $y = \sin t$ ,  $z = 2t$ ;  $A(1, 0, 0)$ ,  $B(1, 0, 4\pi)$ .

4)  $\oint_L y dx - x dy$ , где  $L$  – дуга эллипса  $x = 3 \cos t$ ,  $y = 2 \sin t$ , «пробегаемая» в положительном направлении обхода.

5)  $\int_L x(y - 2) dx + y(2 - x) dy$ , где  $L$  – контур треугольника с вершинами  $A(-2; 0)$ ,  $B(0; 0)$ ,  $C(0; 1)$ , пробегаемый в положительном направлении;

58. Вычислить работу силы  $\vec{F} = yz \vec{i} + xz \vec{j} + xy \vec{k}$  вдоль отрезка прямой  $BC$ , если  $B(1; 1; 1)$  и  $C(2; 3; 4)$ .

### Задания для индивидуальной работы

59. Вычислить криволинейные интегралы

1)  $\int_L (xy - y^2) dx + x dy$ , где  $L$  – дуга параболы  $y = 2x^2$  от  $O(0, 0)$  до  $A(1, 2)$ ;

2)  $\int_L (2x + y) dx + (xy - x^2) dy$ , где  $L$  – отрезок прямой  $y = 4x + 6$  от  $A(-1; 2)$  до  $B(0; 6)$ ;

3)  $\int_{L_{AB}} x dx + y dy + (x - y + 1) dz$ , где  $L_{AB}$  – отрезок прямой  $AB$  от  $A(1, 1, 1)$  до  $B(2, 3, 4)$ ;

4)  $\int_L xy dx + zx^2 dy + xyz dz$ , где  $L$ :  $x = e^t$ ,  $y = e^{-t}$ ,  $z = t^2$ ,  $0 \leq t \leq 1$ .



$$5) \int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}, \text{ где } L_{AB} - \text{ дуга астроида } x = 2\cos^3 t, y = 2\sin^3 t \text{ от}$$

точки  $A(2,0)$  до точки  $B(0,2)$ .

**60.** Вычислить криволинейные интегралы

$$1) \int_L (xy - x^2) dx + (x + y) dy, \text{ где } L - \text{ дуга параболы } y^2 = 2x \text{ от } A(2;-2)$$

до  $B(8;4)$ ;

$$2) \int_{(0;0)}^{(\pi;2\pi)} -x \cos y dx + y \sin x dy, \text{ вдоль отрезка прямой;}$$

$$3) \int_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz, \text{ где } L_{OB} - \text{ отрезок прямой } OB \text{ от } O(0,0,0)$$

до  $B(-2,4,5)$ ;

$$4) \int_{(L)} (x^2 + y^2) dy, \text{ где } L - \text{ контур прямоугольника, образованного пря-}$$

мыми  $x = 1, x = 3, y = 1, y = 5$ ;

$$5) \oint_L (x + 2y) dx + (x - y) dy, L - \text{ окружность } x = 2\cos t, y = 2\sin t \text{ при по-}$$

ложительном направлении обхода.

**61.** Вычислить работу силы  $\vec{F} = (x^2 + y^2 + 1)\vec{i} + 2xy\vec{j}$  вдоль дуги параболы  $y = x^3$ , заключенной между точками  $A(0,0)$  и  $B(1,1)$ .

### **8. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования**

**Теорема.** Пусть функции  $P(x,y)$ ,  $Q(x,y)$  и их частные производные непрерывны в замкнутой области  $D$ , ограниченной контуром  $C$ . Тогда имеет место формула Грина

$$\oint_C P(x,y) dx + Q(x,y) dy = \iint_D \left( \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy,$$

при этом обход контура  $C$  совершается так, что область  $D$  все время остается слева.

Криволинейный интеграл

$$\int_L P(x,y) dx + Q(x,y) dy,$$

где контур  $L$  целиком лежит внутри некоторой односвязной области  $D$ , в которой функции  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  непрерывны вместе со своими частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}.$$

В этом случае равносильны следующие утверждения:

1)  $\oint_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = 0$ , где  $L$  – любой замкнутый контур, содержащийся в области  $D$ .

2)  $\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  не зависит от пути интегрирования, соединяющего точки  $A$  и  $B$ .

3) Выражение  $P(x, y) dx + Q(x, y) dy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $u = u(x, y)$ , т. е.  $du = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ , где

$$P(x, y) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Q(x, y) = \frac{\partial u}{\partial y}. \quad \text{Тогда}$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \int_A^B du = u(B) - u(A).$$

Таким образом, интеграл не зависит от пути интегрирования, а зависит только от значений функции  $u(x, y)$  в начальной и конечной точках пути интегрирования. Функцию  $u(x, y)$  можно найти по формуле

$$u(x, y) = \int_{x_0}^x P(x, y_0) dx + \int_{y_0}^y Q(x, y) dy + C,$$

где  $(x_0, y_0)$  – произвольная фиксированная точка из области  $D$ ,  $(x, y)$  – переменная точка из области  $D$ .

С помощью криволинейного интеграла второго рода можно вычислить площадь области  $D$ :

$$S = \frac{1}{2} \oint_C (-y dx + x dy).$$

Криволинейный интеграл

$$\int_L P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz,$$

где  $L$  – контур, целиком лежащий в односвязной области  $V \subset \mathbb{R}^3$ , в которой функции  $P(x, y, z)$ ,  $Q(x, y, z)$ ,  $R(x, y, z)$  непрерывны вместе со своими

частными производными, не зависит от пути интегрирования тогда и только тогда, когда выполняются равенства:

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}; \quad \frac{\partial R}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial z}; \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}.$$

В этом случае подынтегральное выражение представляет собой полный дифференциал некоторой функции:

$$P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz = du(x, y, z),$$

$$\int_{(x_1, y_1, z_1)}^{(x_2, y_2, z_2)} P dx + Q dy + R dz = u(x_2, y_2, z_2) - u(x_1, y_1, z_1).$$

В частности, криволинейный интеграл по замкнутому контуру в этом случае равен нулю:

$$\oint_L P dx + Q dy + R dz = 0.$$

### **Задания для аудиторной работы**

**62.** Применив формулу Грина, вычислить  $\oint_L y^2 dx + (x + y)^2 dy$ ,

где  $L$  – контур треугольника  $ABC$  с вершинами в точках  $A(3,0)$ ,  $B(3,3)$  и  $C(0,3)$ .

**63.** Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{AB} (3x^2y - 4xy^2) dx + (x^3 - 4x^2y + 3y^2) dy,$$

где  $B(1,1)$ , предварительно определив функцию  $u(x, y)$ , полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение.

**64.** Вычислить  $\int_{(-1;0)}^{(3;1)} (2xy + x^3 - 5) dx + (x^2 - y^2 + 3) dy$ .

**65.** Проверить, являются ли данные выражения полным дифференциалом функции двух переменных, если это так, то найти эти функции:

1)  $(3x^2 - 2xy + y^2) dx - (x^2 - 2xy + 3y^2) dy$ ;

2)  $(e^{2y} - 5y^3 e^x) dx + (2x e^{2y} - 15y^2 e^x) dy$ .

**66.** С помощью криволинейного интеграла второго рода вычислить площадь фигуры, ограниченной первой аркой циклоиды  $x = a(t - \sin t)$ ,  $y = a(1 - \cos t)$  и осью  $Ox$ .

### Задания для индивидуальной работы

67. Применив формулу Грина, вычислить интеграл  $\oint_{L_{ABC}} y^2 dx + (x+y)^2 dy$

по контуру треугольника ABC с вершинами  $A(2,0)$ ,  $B(2,2)$  и  $C(0,2)$ .

68. Вычислить криволинейный интеграл

$\int_{AB} (3y^2 + 4y) dx + (6xy + 4x - 4y) dy$ , где  $A(0,1)$ ,  $B(1,2)$ , предварительно

определив функцию  $u(x,y)$ , полным дифференциалом которой является подынтегральное выражение.

69. Вычислить криволинейные интегралы:

1)  $\int_{(2;1)}^{(4;3)} (x^2 + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + y^2) dy;$

2)  $\int_{(-1;-2)}^{(3;4)} (\sin x + 2xy - y^2) dx + (x^2 - 2xy + \cos y) dy;$

3)  $\int_{(1;0)}^{(4;3)} \frac{xdx + ydy}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$

## АТТЕСТАЦИОННАЯ РАБОТА

### Вариант 1

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_0^{\sqrt{x}} fdy + \int_1^2 dx \int_0^{\sqrt{2-x}} fdy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (x^2 + y) dx dy$  по области

$$D: y = x^2; y^2 = x.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V 8y^2 ze^{-xyz} dx dy dz$ , где об-

ласть  $V: x = 2, x = 0, y = -1, y = 0, z = 2, z = 0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями, где  $\mu(x, y)$  – плотность:

$$V: z \geq 0, z = 2, y \geq \pm x, z^2 = 4(x^2 + y^2); \mu = y\sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \sqrt{2 - z^2} (2z - \sqrt{x^2 + y^2}) dl, \text{ где } L \text{ – дуга кривой } x = t \cos t, y = t \sin t, z = t,$$

$$0 \leq t \leq 2\pi.$$

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{L_{AB}} (x^2 - 2xy) dx + (y^2 - 2xy) dy, \text{ где } L_{AB} \text{ – дуга параболы } y = x^2 \text{ от точки}$$

$A(-1,1)$  до точки  $B(1,1)$ .

### Вариант 2

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dx \int_0^x fdy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} fdy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (7x + 5y + 3) dx dy$  по области

$$D: y = \frac{1}{x}; y = x; y = -2.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 4y + y^2 = 0, \quad x^2 - 8x + y^2 = 0, \quad y = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл:  $\iiint_V 2y^2 z \operatorname{ch}(2xyz) dx dy dz$ , где

$$\text{область } V: x = \frac{1}{2}, x = 0, y = 2, y = 0, z = -1, z = 0.$$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: 1 \leq x^2 + y^2 \leq 36, z \geq 0, x \geq 0, y \geq x; \mu = 4.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\oint_L (x^2 + y^2) dl$ , где  $L$  –

$$\text{окружность } x^2 + y^2 = 4.$$

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} \frac{x^2 dy - y^2 dx}{\sqrt[3]{x^5} + \sqrt[3]{y^5}}$ , где  $L_{AB}$  –

$$\text{дуга астроиды } \begin{cases} x = 2 \cos^3 t \\ y = 2 \sin^3 t \end{cases} \text{ от точки } A(2,0) \text{ до точки } B(0,2).$$

### Вариант 3

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_0^{2-\sqrt{4-x^2}} f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_0^{\sqrt{4-x^2}} f dy.$$

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (4x - xy + 7) dx dy$  по области

$$D: y = \frac{1}{x}; y = 1; x = 2.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 6y + x^2 = 0, \quad y^2 - 8y + x^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}, \quad y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 z \operatorname{ch}\left(\frac{xyz}{2}\right) dx dy dz$ , об-

$$\text{ласть } V: x = 2, x = 0, y = -1, y = 0, z = 2, z = 0.$$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 32, y^2 = x^2 + z^2, y \geq 0; \mu = y.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OB}} \frac{d\ell}{\sqrt{8 - x^2 - y^2}}$ , где

$L_{OB}$  – отрезок прямой, соединяющий точки  $O(0,0)$  и  $B(2,2)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OA}} (x^2 + y^2) dx + 2xy dy$ ,

где  $L_{OA}$  – дуга кубической параболы  $y = x^3$  от точки  $O(0,0)$  до точки  $A(1,1)$ .

#### Вариант 4

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_y^0 f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (yx + y - 1) dx dy$  по области

$$D: y = \frac{1}{x}; y = \sqrt{x}; x = 2.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 \cos\left(\frac{xyz}{9}\right) dx dy dz$ , где

область  $V: x = 9, x = 0, y = 1, y = 0, z = 2\pi, z = 0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 8, x^2 = y^2 + z^2, x \geq 0; \mu = x.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt{y}) d\ell$ , где

$L_{AB}$  – отрезок прямой  $AB$  от точки  $A(-1,0)$  до точки  $B(0,1)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\oint_L (x + 2y) dx + (x - y) dy$ ,

где  $L$  – окружность  $x = 2\cos t, y = 2\sin t$  при положительном направлении обхода.

### Вариант 5

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} fdy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_y^{\sqrt{2-x^2}} fdy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (2+x-xy) dx dy$  по области

$$D: y = x^2 + 1; y = 1 - x.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 8y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 z \operatorname{ch}(xyz) dx dy dz$ , где об-

ласть  $V: x=1, x=0, y=1, y=0, z=1, z=0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: z = \sqrt{8 - x^2 - y^2}, z = \sqrt{x^2 + y^2}, y \geq 0; \mu = y.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{5(x-y)}}$ , где  $L_{AB}$  –

отрезок прямой, заключенной между точками  $A(0,4)$  и  $B(4,0)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл

$\oint_L (x^2 y - x) dx + (y^2 x - 2y) dy$ , где  $L$  – эллипс  $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$  при по-

ложительном направлении обхода.

### Вариант 6

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-(2+y)}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{\sqrt[3]{y}}^0 f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (y^2 + xy) dx dy$  по области

$$D: y = \sqrt{-x}, y = 1; x = 0.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 4y + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0, y = x.$$



**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 z \sin\left(\frac{xyz}{2}\right) dx dy dz$ , где область  $V: x=1, x=0, y=4, y=0, z=\pi, z=0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: y \geq 0, y \leq \sqrt{3} \cdot x, z = 3(x^2 + y^2), z = 3; \mu = \frac{y^2 z}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} d\ell$ , где  $L$  – дуга кардиоиды  $\rho = 2(1 + \cos \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy$ , где  $L_{AB}$  – дуга эллипса  $x = \cos t, y = 2 \sin t$  от точки  $A(1,0)$  до точки  $B(0,2)$ .

### Вариант 7

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_0^{y^2} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{2-y} f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (2 + x^2 y) dx dy$  по области

$$D: x = -y^2; x = -1.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V 2x^2 z \operatorname{sh}(2xyz) dx dy dz$ , где

$$\text{область } V: x=2, x=0, y=\frac{1}{2}, y=0, z=\frac{1}{2}, z=0.$$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: z = 2(x^2 + y^2), y \geq 0, y \leq \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot x; z = 18; \mu = \frac{xz}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} y dl$ , где  $L_{AB}$  – дуга астроида  $x = \cos^3 t$ ,  $y = \sin^3 t$ , заключенная между точками  $A(1,0)$  и  $B(0,1)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OBA}} 2xy dx - x^2 dy$ , где  $L_{OBA}$  – ломаная  $OBA$ ;  $O(0,0)$ ;  $B(2,0)$ ;  $A(2,1)$ .

### Вариант 8

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^2 dy \int_{-\sqrt{2-y}}^0 f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (xy + 1) dx dy$  по области

$D: y = x^2; x = -y^2$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 10x + y^2 = 0, y = 0, y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V 2x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz$ , где

область  $V: x = 1, x = 0, y = -1, y = 0, z = 1, z = 0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$  – плотность:

$$V: z = x^2 + y^2, y \geq 0, y \leq x, z = 4; \mu = \frac{xy}{(\sqrt{x^2 + y^2})^3}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OB}} y dl$ , где  $L_{OB}$  – дуга параболы  $y^2 = \frac{2}{3}x$  между точками  $O(0,0)$  и  $B\left(\frac{35}{6}, \frac{\sqrt{35}}{3}\right)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} (x^2 - y^2) dx + xy dy$ , где  $L_{AB}$  – отрезок прямой  $AB$ ,  $A(1,1)$   $B(3,4)$ .

### Вариант 9

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (4x+5y) dx dy$  по области

$D: y = x; y = -x; y = -1$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = x, x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 z \cos\left(\frac{xyz}{3}\right) dx dy dz$ , где

область  $V: x = 3, x = 0, y = 1, y = 0, z = 2\pi, z = 0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 4y, y + z = 4; z \geq 0, \mu = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L (x^2 + y^2 + z^2) dl$ , где

$L$  – дуга кривой  $x = \cos t, y = \sin t, z = \sqrt{3t}, 0 \leq t \leq 2\pi$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} \cos y dx - \sin x dy$ , где

$L_{AB}$  – отрезок прямой  $AB, A(2\pi, -2\pi), B(2\pi, 2\pi)$ .

### Вариант 10

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_{-2}^{-1} dx \int_{-(2+x)}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_{\sqrt[3]{x}}^0 f dy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (2 - 3xy^2) dx dy$  по области  $D$ :

$y = -x^2; y = x$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 z \operatorname{sh}(xyz) dx dy dz$ , где область  $V: x=2, x=0, y=1, y=0, z=1, z=0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 2x, x + z = 2, y \geq 0, z \geq 0; \mu = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L \operatorname{arctg} \frac{y}{x} dl$ , где  $L$  – дуга

кардиоиды  $\rho = (1 + \cos \varphi)$ ,  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} \frac{y dx + x dy}{x^2 + y^2}$ , где  $L_{AB}$  – отрезок прямой  $AB$ ,  $A(1,2)$ ,  $B(3,6)$ .

### Вариант 11

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования:  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt[3]{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^y f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (3 - 2xy) dx dy$  по области

$D: y = x^2 - 2; y = -x$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 4y + x^2 = 0, y = \sqrt{3} \cdot x, x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V 2y^2 z e^{xyz} dx dy dz$ , где область  $V: x=1, x=0, y=1, y=0, z=1, z=0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 16y, y + z = 16, x \geq 0, z \geq 0; \mu = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L \sqrt{2y} dl$ , где  $L$  – первая

арка циклоиды  $x = 2(t \sin t)$ ,  $y = 2(1 - \cos t)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} xy dx + (y - x) dy$ , где  $L_{AB}$  – дуга кубической параболы  $y = x^3$  от точки  $A(0,0)$  до точки  $B(1,1)$ .

### Вариант 12

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_{-2}^{-\sqrt{3}} dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f dy + \int_{-\sqrt{3}}^0 dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f dy.$$

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (3 - 2xy^2) dx dy$  по области

$D: y = -x; x = -1; y = 0.$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 z \sin\left(\frac{xyz}{4}\right) dx dy dz$ , где

область  $V: x = 1, x = 0, y = 2\pi, y = 0, z = 4, z = 0.$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 2x, y + z = 2, z \geq 0; \mu = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OA}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + 4}}$ , где

$L_{OA}$  – отрезок прямой, соединяющий точки  $O(0,0)$  и  $A(1,2)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл

$\int_{L_{ABC}} (x^2 + y^2) dx + (x + y^2) dy$ , где  $L_{ABC}$  – ломаная, соединяющая точки  $A(1,2), B(3,2), C(3,5)$ .

### Вариант 13

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^e dy \int_{-1}^{-\ln y} f dx.$

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (5x^2y - 3) dx dy$  по области

$D: y = x - 1; y = 0; x = 0.$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = \sqrt{3} \cdot x, x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 z \cos(xyz) dx dy dz$ , где

область  $V: x = 1, x = 0, y = \pi, y = 0, z = 2, z = 0.$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: 2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 8, z^2 = y^2 + x^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \mu = xy.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L \frac{(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2} d\ell$ , где  $L$  –

дуга кривой  $\rho = 9 \sin 2\varphi, 0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}.$

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OB}} xy^2 dx + yz^2 dy - x^2 z dz$ ,

где  $L_{OB}$  – отрезок прямой  $OB, O(0,0,0), B(-2,4,5).$

### Вариант 14

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} dy \int_0^{\arcsin y} f dx + \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 dy \int_0^{\arccos y} f dx.$$

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (8y + 5) dx dy$  по области

$D: y = 1 - x^2; y = x^2 (x \leq 0).$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V 8y^2 z e^{2xyz} dx dy dz$ , где об-

ласть  $V: x = -1, x = 0, y = 2, y = 0, z = 1, z = 0.$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 2y, x^2 + y^2 = 4y, x \geq 0, z \geq 0, z = 6; \mu = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OABC}} xy d\ell$ , где  $L_{OABC}$  – контур прямоугольника с вершинами  $O(0,0)$ ,  $A(4,0)$ ,  $B(4,2)$ ,  $C(0,2)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OA}} y dx + x dy$ , где  $L_{OA}$  – дуга окружности  $x = R \cos t$ ,  $y = R \sin t$ ;  $O(R,0)$ ,  $A(0,R)$ .

### Вариант 15

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^2 dy \int_0^{\sqrt{2-y}} f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (4 - 3xy) dx dy$  по области

$$D: y = x; y = -x, x = -1.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 6y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 z \sin(xyz) dx dy dz$ , где область  $V: x = 2, x = 0, y = \pi, y = 0, z = 1, z = 0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 2x, x^2 + y^2 = 4x, y \geq 0, y \leq x, z \geq 0, z = 4; \mu = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{ABO}} (x + y) d\ell$ , где  $L_{ABO}$  – контур треугольника с вершинами  $A(1,0)$ ,  $B(0,1)$ ,  $O(0,0)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OA}} xy dx + (y - x) dy$ , где  $L_{OA}$  – дуга параболы  $y^2 = x$  от точки  $O(0,0)$  до точки  $A(1,1)$ .

### Вариант 16

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{y}}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx.$$

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (x+2y-3) dx dy$  по области

$$D: x = y^2; x = 9.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V 2y^2 e^{xy} dx dy dz$ , где область

$$V: x=0, y=1, y=x, z=1, z=0.$$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 - 2x + y^2 = 0, y \geq 0, z \geq 0, x + z = 2; \mu = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L \frac{z^2 dl}{x^2 + y^2}$ , где  $L$  – первый

виток винтовой линии  $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t, z = 2t$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_{L_{AB}} x dx + y dy + (x - y + 1) dz, \text{ где } L_{AB} \text{ – отрезок прямой } AB, A(1,1,1), B(2,3,4).$$

### Вариант 17

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_{-2}^{-1} dy \int_{-\sqrt{2+y}}^0 f dx + \int_{-1}^0 dy \int_{-\sqrt{-y}}^0 f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D e^{\frac{x}{y}} dx dy$  по области  $D: y^2 = x;$

$$x = 0, y = 1.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2y + y^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0.$$



**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xy) dx dy dz$ , где область  $V: x=0, y=2, y=4x, z=2, z=0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 4y, y + z = 4, z \geq 0; \mu = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OAB}} (x + y) d\ell$ , где  $L_{OAB}$  – контур треугольника с вершинами  $O(0,0), A(-1,0), B(0,1)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy$ , где  $L_{AB}$  – дуга параболы  $y^2 = 4 - 4x$  от точки  $A(1,0)$  до точки  $B(0,2)$ .

### Вариант 18

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_0^{\sqrt{2-y^2}} f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (2y - x) dx dy$  по области

$$D: y = \sqrt{x}; y = 1, y = -x.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(3xy) dx dy dz$ , где область  $V: x=1, y=2x, y=0, z=36, z=0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 2y, z \geq 0, z = 3; \mu = z \cdot \sqrt{x^2 + y^2}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L (x + y) d\ell$ , где  $L$  – дуга

лемнискаты Бернулли  $\rho^2 = \cos 2\varphi, -\frac{\pi}{4} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{4}$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OB}} xy dx + (y - x) dy$ , где  $L_{OB}$  – дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $O(0,0)$  до точки  $B(1,1)$ .

### Вариант 19

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_{-\sqrt{2-x^2}}^0 f dy + \int_{-1}^0 dx \int_x^0 f dy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (4xy + 1) dx dy$  по области  $D: y = x; y = 1; x = 0$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 \cos\left(\frac{\pi}{4} xy\right) dx dy dz$ , где

область  $V: x = 0, y = -1, y = \frac{x}{2}, z = -\pi^2, z = 0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$  -плотность:

$$V: x^2 = 2(y^2 + z^2), x = 4, x \geq 0; \mu = x.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L \sqrt{x^2 + y^2} dl$ , где  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = 2y$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OB}} (xy - y^2) dx + x dy$ , где  $L_{OB}$  – дуга параболы  $y = x^2$  от точки  $O(0,0)$  до точки  $B(1,1)$ .

### Вариант 20

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования:  $\int_{-2}^{-1} dy \int_0^{\sqrt{2+y}} f dx + \int_{-1}^0 dy \int_0^{\sqrt{-y}} f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (x^2 + xy) dx dy$  по области  $D: y = 1 - x; y = 0, x = 0$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, \quad x^2 - 6x + y^2 = 0, \quad y = 0, \quad y = x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 e^{-xy} dx dy dz$ , где область

$$V: x=0, \quad y=-2, \quad y=4x, \quad z=1, \quad z=0.$$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 2z, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z = 0; \quad \mu = 10x.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OABC}} xy dl$ , где  $L_{OABC}$  – контур прямоугольника с вершинами  $O(0,0)$ ,  $A(5,0)$ ,  $B(5,3)$ ,  $C(0,3)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} x dy + y dx$ , где  $L_{AB}$  – дуга астроида  $x = 2 \cos^3 t$ ,  $y = 2 \sin^3 t$  от точки  $A(2,0)$  до точки  $B(0,2)$ .

### Вариант 21

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_{-\sqrt{2}}^{-1} dx \int_0^{\sqrt{2-x^2}} f dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{x^2} f dy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (y - 2xy) dx dy$  по области

$$D: y = 1 - x; \quad y = 1; \quad x = 1.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 2y + x^2 = 0, \quad y^2 - 4y + x^2 = 0, \quad y = x; \quad x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(2xyz) dx dy dz$ , где область  $V: x=0, y=1, y=x, z=8, z=0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad x^2 + y^2 = 4z^2, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0; \quad \mu = 20z.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L (x^2 + y^2) dl$ , где  $L$  –

окружность  $x^2 + y^2 = 4x$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} (xy - x) dx + \frac{1}{2} x^2 y dy$ , где  $L_{AB}$  – дуга параболы  $y^2 = 4x$  от точки  $A(0,0)$  до точки  $B(1,2)$ .

### Вариант 22

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dx \int_{1-x^2}^1 f dy + \int_1^e dx \int_{\ln x}^1 f dy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (5x + 3y) dx dy$  по области

$$D: y = x^2; y = \sqrt{x}.$$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 2x + y^2 = 0, x^2 - 4x + y^2 = 0, y = 0; y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 e^{\frac{xy}{2}} dx dy dz$ , где область

$$V: x = 0, y = 2, y = 2x, z = -1, z = 0.$$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$  -плотность:

$$V: 36(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0; \mu = \frac{5}{6}(x^2 + y^2).$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} (4\sqrt[3]{x} - 3\sqrt[3]{y}) dl$ , где

$L_{AB}$  – дуга астроида  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$  заключенная между точками  $A(1,0)$  и  $B(0,1)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy$ ,

где  $L_{AB}$  – отрезок прямой  $AB$ ,  $A(1,0), B(0,2)$ .

### Вариант 23

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dy \int_0^{\sin y} f dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dy \int_0^{\cos y} f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (xy - 2) dx dy$  по области

$D: y = x^2; y = 1.$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 6y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = x; x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 \cos\left(\frac{\pi}{2} xy\right) dx dy dz$ , где

область  $V: x = 0, y = -1, y = x, z = 2\pi^2, z = 0.$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 4, x^2 + y^2 = 8z, x \geq 0, y \geq 0, z = 0; \mu = 5x.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L xy d\ell$ , где  $L$  – контур

квадрата со сторонами  $x = \pm 1, y = \pm 1.$

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} 2xy dx + y^2 dy + z^2 dz$ ,

где  $L_{AB}$  – дуга одного витка винтовой линии  $x = \cos t, y = \sin t, z = 2t$  от точки  $A(1,0,0)$  до точки  $B(1,0,4\pi).$

### Вариант 24

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_0^{\sqrt{y}} f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx.$

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (3x + xy) dx dy$ , если область

$D$  – треугольник  $\triangle OBC$ , с вершинами в точках  $O(0;0), B(-1;0), C(0;1).$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = 0; y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 \cos(\pi xy) dx dy dz$ , где

область  $V: x = 0, y = 1, y = 2x, z = \pi^2, z = 0.$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = z^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \mu = 6z.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L y^2 dl$ , где  $L$  – первая арка циклоиды  $x = t - \sin t$ ,  $y = 1 - \cos t$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} \frac{y}{x} dx + x dy$ , где  $L_{AB}$  – дуга линии  $y = \ln x$ , от точки  $A(1,0)$  до точки  $B(e,1)$ .

### Вариант 25

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_{-y}^0 f dx + \int_1^{\sqrt{2}} dy \int_{-\sqrt{2-y^2}}^0 f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (2xy + 1) dx dy$  по области

$D: y = x^3, x = 0, y = -1$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = x; x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 \operatorname{sh}(2xy) dx dy dz$ , где об-

ласть  $V: x = -1, y = x, y = 0, z = 8, z = 0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: 25(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \mu = 2(x^2 + y^2).$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{ABCD}} xy dl$ , где  $L_{ABCD}$  –

контур прямоугольника с вершинами  $A(2,0), B(4,0), C(4,3), D(2,3)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L y dx - x dy$ , где  $L$  – дуга

эллипса  $x = 3 \cos t, y = 2 \sin t$ , «пробегаемая» в положительном направлении.

### Вариант 26

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования:

$$\int_0^{\sqrt{3}} dx \int_{\sqrt{4-x^2}-2}^0 f dy + \int_{\sqrt{3}}^2 dx \int_{-\sqrt{4-x^2}}^0 f dy.$$

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (4x - y) dx dy$  по области

$D: x = 0, y = x^2, y = 1.$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 8x + y^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(xy) dx dy dz$ , где об-

ласть  $V: x = 0, y = -1, y = x, z = 2, z = 0.$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = 6z, x \geq 0, y \geq 0, z = 0; \mu = 90y.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L y dl$ , где  $L$  – дуга пара-

болы  $y^2 = 2x$ , отсеченная параболой  $x^2 = 2y$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy$ , где

$L_{OA}$  – дуга параболы  $y = \frac{x^2}{4}$ , от точки  $O(0,0)$  до точки  $A(2,1)$ .

### Вариант 27

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dy \int_0^y f dx + \int_1^e dy \int_{\ln y}^1 f dx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (x + 2y) dx dy$  по области

$D: y = 0, y = \sqrt{x}, x = 1.$

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = \sqrt{3} \cdot x, x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 \sin\left(\frac{\pi}{2} xy\right) dx dy dz$ , где

область  $V: x = 2, y = x, y = 0, z = \pi, z = 0.$

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 + z^2 = 4, x^2 + y^2 = 8z^2, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \mu = 10z.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{x-y}$ , где  $L_{AB}$  – отрезок прямой, заключенный между точками  $A(4,0)$  и  $B(6,1)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} (x^2 + y^2) dx + (x^2 - y^2) dy$ , где  $L_{AB}$  – ломаная линия  $y = |x|$ , от точки  $A(-1,1)$  до точки  $B(2,2)$ .

### Вариант 28

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^{\frac{\pi}{4}} dx \int_0^{\sin x} f dy + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} dx \int_0^{\cos x} f dy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D e^y dx dy$  по области  $D: y = \ln x; y = 0, x = 2$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 4x + y^2 = 0, x^2 - 6x + y^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}; y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 \sin(\pi xy) dx dy dz$ , где область  $V: x = 1, y = 2x, y = 0, z = 4\pi, z = 0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$  – плотность:

$$V: 9(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 4, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0; \mu = \frac{5(x^2 + y^2)}{3}.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L (x^2 + y^2)^2 dl$ , где  $L$  – часть окружности  $\rho = 2$ , расположенная в первой координатной четверти.

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{OA}} 2xy dx - x^2 dy + z dz$ , где  $L_{OA}$  – отрезок прямой, соединяющий точки  $O(0,0,0)$  и  $A(2,1,-1)$ .



### Вариант 29

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^2 dx \int_0^{2-x} f dy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D xy dx dy$  по области  $D: y = 0, y = \sqrt{x}, x + y = 2$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 2y + x^2 = 0, y^2 - 10y + x^2 = 0, y = \frac{x}{\sqrt{3}}, x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V y^2 \operatorname{ch}(3xy) dx dy dz$ , где область  $V: x = 0, y = 2, y = 6x, z = -3, z = 0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: x^2 + y^2 = 1, x^2 + y^2 = z, x \geq 0, y \geq 0, z = 0; \mu = 10y.$$

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} \frac{dl}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$ , где  $L_{AB}$  – отрезок прямой, соединяющий точки  $A(1,1,1)$  и  $B(2,2,2)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\oint_L x dy - y dx$ , где  $L$  – контур треугольника с вершинами  $A(-1,0); B(1,0), C(0,1)$  при положительном направлении обхода.

### Вариант 30

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dx \int_0^{x^2} f dy + \int_1^{\sqrt{2}} dx \int_y^{\sqrt{2-x^2}} f dy$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (2x + xy^2) dx dy$ , если область  $D$  – треугольник  $\triangle OBC$ , с вершинами в точках  $O(0;0), B(2;0), C(0;-2)$ .

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$y^2 - 4y + x^2 = 0, y^2 - 8y + x^2 = 0, y = x; x = 0.$$

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 z \sin\left(\frac{xyz}{4}\right) dx dy dz$ , где область  $V: x=1, x=0, y=2\pi, y=0, z=4, z=0$ .

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: 36(x^2 + y^2) = z^2, x^2 + y^2 = 1, x \geq 0, z \geq 0; \mu = \frac{5}{6}(x^2 + y^2).$$

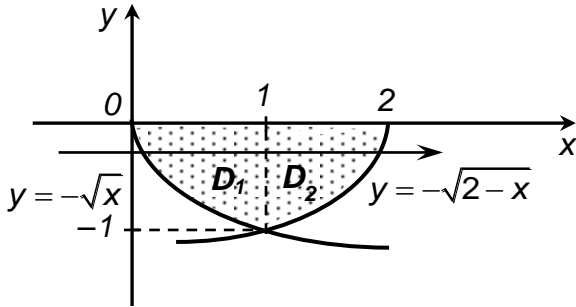
**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} y d\ell$ , где  $L_{AB}$  – дуга астроида  $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t$ , заключенная между точками  $A(1,0)$  и  $B(0,1)$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_{L_{AB}} (xy - 1) dx + x^2 y dy$ , где  $L_{AB}$  – дуга параболы  $y^2 = 4 - 4x$  от точки  $A(1,0)$  до точки  $B(0,2)$ .

### Решение типового варианта

**Задание 1.** Изменить порядок интегрирования  $\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 fdy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 fdy$ .

**Решение.** Область интегрирования  $D = D_1 \cup D_2$ . Область  $D_1$  расположена между прямой  $y = 0$  и параболой  $y = -\sqrt{x}$  для  $x \in [0; 1]$ ; область  $D_2$  – между прямой  $y = 0$  и параболой  $y = -\sqrt{2-x}$  для  $x \in [1; 2]$ .



Найдем точку пересечения линий  $y = -\sqrt{x}$  и  $y = -\sqrt{2-x}$ .

$$\begin{aligned} -\sqrt{x} &= -\sqrt{2-x}; \\ x &= 2-x; \\ x &= 1, y = -1. \end{aligned}$$

Тогда для области  $D$   $y \in [-1; 0]$ , а переменная  $x$  изменяется в данной области при каждом фиксированном  $y$  от точек параболы  $x = y^2$  до точек параболы  $x = 2 - y^2$ . Таким образом,

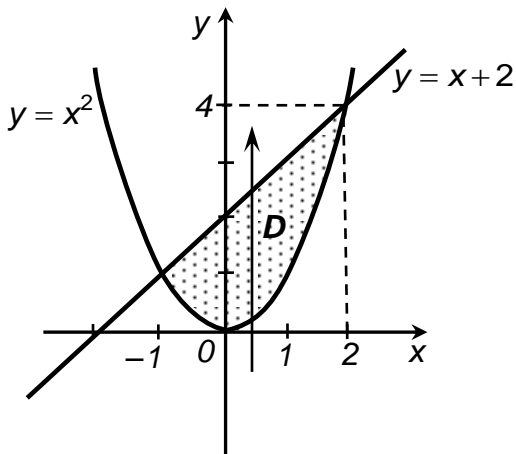
$$\int_0^1 dx \int_{-\sqrt{x}}^0 fdy + \int_1^2 dx \int_{-\sqrt{2-x}}^0 fdy = \int_{-1}^0 dy \int_{y^2}^{2-y^2} fdx.$$

Ответ:  $\int_{-1}^0 dy \int_{y^2}^{2-y^2} fdx$ .

**Задание 2.** Вычислить двойной интеграл  $\iint_D (x+y) dx dy$  по области

$$D: y = x^2, y = x+2.$$

**Решение.** Область интегрирования  $D$  изображена на рисунке. Она ограничена сверху прямой  $y = x+2$ , снизу – параболой  $y = x^2$ . Запишем двойной интеграл в виде повторных и вычислим его.



$$\begin{aligned} \iint_D (x+y) dx dy &= \int_{-1}^2 dx \int_{x^2}^{x+2} (x+y) dy = \\ &= \int_{-1}^2 \left( xy + \frac{y^2}{2} \right) \Big|_{x^2}^{x+2} dx = \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{-1}^2 \left( x^2 + 2x + \frac{x^2 + 4x + 4}{2} - x^3 - \frac{x^4}{2} \right) dx = \int_{-1}^2 \left( \frac{3}{2}x^2 + 4x + 2 - x^3 - \frac{x^4}{4} \right) dx = \\
&= \left( \frac{x^3}{2} + 2x^2 + 2x - \frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{20} \right) \Big|_{-1}^2 = 11,1.
\end{aligned}$$

Ответ: 11,1.

**Задание 3.** С помощью двойного интеграла вычислить площадь плоской фигуры, ограниченной линиями (использовать полярные координаты):

$$x^2 - 6x + y^2 = 0, \quad x^2 - 10x + y^2 = 0, \quad y = \frac{x}{\sqrt{3}}; \quad y = \sqrt{3} \cdot x.$$

**Решение.** Приведем уравнения линий, ограничивающие область интегрирования к каноническому виду:

$$x^2 - 6x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 9 + y^2 = 9 \Leftrightarrow (x-3)^2 + y^2 = 9 -$$

окружность с центром в точке (3; 0) и радиусом, равным 3.

$$x^2 - 10x + y^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 25 + y^2 = 25 \Leftrightarrow (x-5)^2 + y^2 = 25 -$$

окружность с центром в точке (5; 0) и радиусом, равным 5.

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}}; \quad y = \sqrt{3} \cdot x - \text{прямые.}$$

Изобразим область интегрирования  $D$ .

Используя формулы

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \end{cases}$$

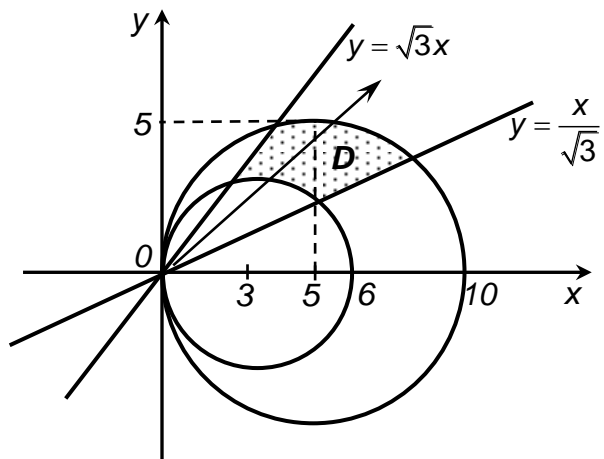
перейдем к полярным координатам.

$$x^2 - 6x + y^2 = 0 \Rightarrow r = 6 \cos \varphi;$$

$$x^2 - 10x + y^2 = 0 \Rightarrow r = 10 \cos \varphi.$$

$$y = \frac{x}{\sqrt{3}} \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{6};$$

$$y = \sqrt{3}x \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{3}.$$



Следовательно,  $6 \cos \varphi \leq r \leq 10 \cos \varphi$ ;  $\frac{\pi}{6} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ .

Найдем площадь области  $D$ .

$$S = \iint_D r dr d\varphi = \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} d\varphi \int_{6 \cos \varphi}^{10 \cos \varphi} r dr = \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \left( r^2 \Big|_{6 \cos \varphi}^{10 \cos \varphi} \right) d\varphi =$$

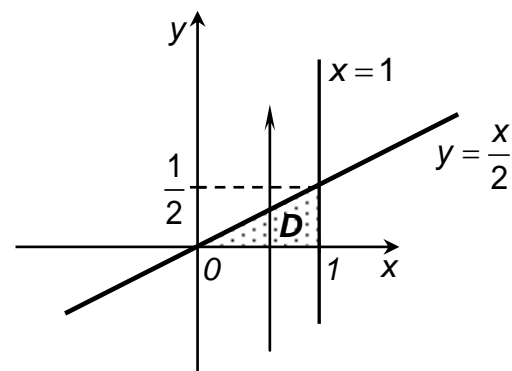
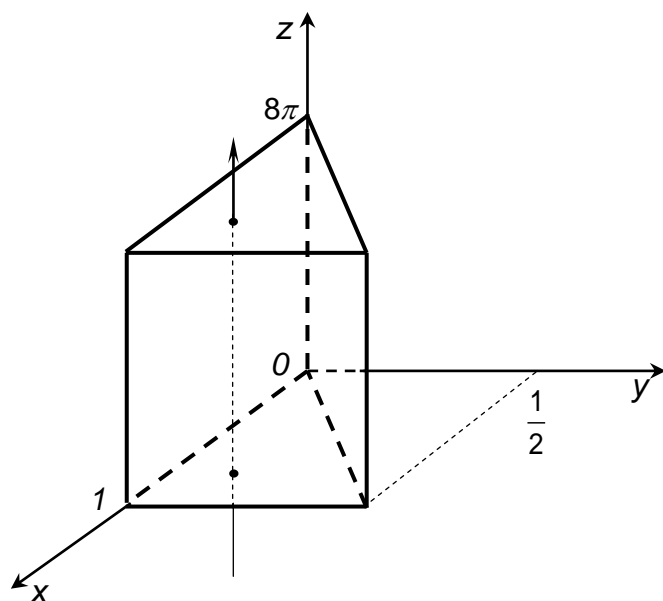
$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (100 \cos^2 \varphi - 36 \cos^2 \varphi) d\varphi = 32 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \cos^2 \varphi d\varphi = 16 \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} (1 + \cos 2\varphi) d\varphi = \\
&= 16 \left( \varphi + \frac{1}{2} \sin 2\varphi \right) \Big|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} = \frac{8}{3} \pi \text{ (кв. ед.)}.
\end{aligned}$$

Ответ:  $\frac{8}{3} \pi$  (кв. ед.).

**Задание 4.** Вычислить тройной интеграл  $\iiint_V x^2 \sin(4\pi xy) dx dy dz$ , где

область  $V: x=1, y=\frac{x}{2}, y=0, z=8\pi, z=0$ .

**Решение.** Изобразим на рисунках область интегрирования  $V$  и ее проекцию в плоскость  $xOy$ .



Представим тройной интеграл в виде повторных.

$$\begin{aligned}
&\iiint_V x^2 \sin(4\pi xy) dx dy dz = \\
&= \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \sin(4\pi xy) dy \int_0^{8\pi} dz = \\
&= 8\pi \int_0^1 x^2 dx \int_0^{\frac{x}{2}} \sin(4\pi xy) dy = \\
&= 8\pi \int_0^1 \frac{x^2}{4\pi x} (-\cos(4\pi xy)) \Big|_0^{\frac{x}{2}} dx = \\
&= -\frac{8\pi}{4\pi} \int_0^1 (x \cos(2\pi x^2) - x) dx = \\
&= -2 \left( \frac{1}{4\pi} \sin(2\pi x^2) - \frac{x^2}{2} \right) \Big|_0^1 = 1 \text{ (куб. ед.)}
\end{aligned}$$

Ответ: 1 куб. ед.

**Задание 5.** С помощью тройного интеграла вычислить массу тела, заданного ограничивающими его поверхностями,  $\mu$ -плотность:

$$V: 16(x^2 + y^2) = z^2, \quad x^2 + y^2 = 1, \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad z \geq 0; \quad \mu = 5(x^2 + y^2).$$

**Решение.** Тело ограничено поверхностями:  $16(x^2 + y^2) = z^2$  – конус,  $x^2 + y^2 = 1$  – круговой цилиндр,  $x = 0$ ,  $y = 0$ ,  $z = 0$  – координатные плоскости. Неравенства  $x \geq 0$ ,  $y \geq 0$ ,  $z \geq 0$  описывают первый октант.

Изобразим на рисунках рассматриваемое тело и его проекцию в плоскость  $xOy$ .

Массу тела вычислим по формуле

$$m = \iiint_V \mu(x, y, z) dx dy dz.$$

$$\text{В нашем случае } m = \iiint_V 5(x^2 + y^2) dx dy dz.$$

Для вычисления тройного интеграла перейдем к цилиндрическим координатам:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Тогда:

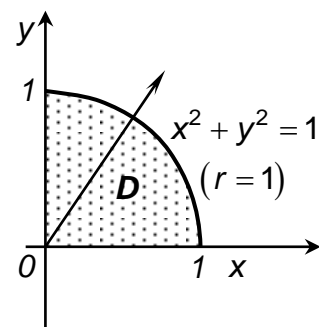
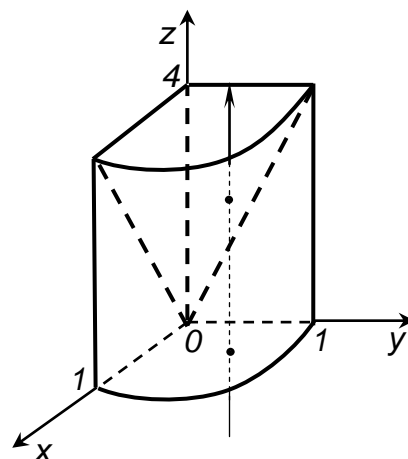
$$\begin{aligned} m &= \iiint_V 5r^2 r dr d\varphi dz = \iint_D 5r^3 dr d\varphi \cdot \int_0^{4r} dz = \\ &= 5 \iint_D r^3 z \Big|_0^{4r} dr d\varphi = 5 \iint_D 4r^4 dr d\varphi = \\ &= 20 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^1 r^4 dr = 20 \varphi \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{r^5}{5} \Big|_0^1 = 4 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot 1 = 2\pi. \end{aligned}$$

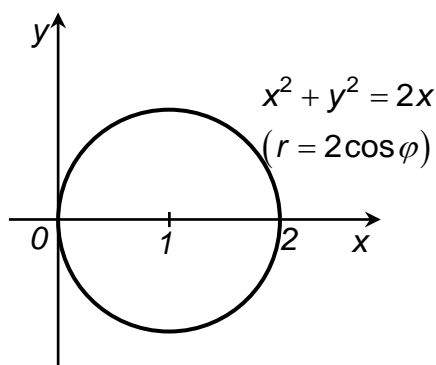
Ответ:  $2\pi$ .

**Задание 6.** Вычислить криволинейный интеграл  $\int_L (x - y) dl$ , где  $L$  – окружность  $x^2 + y^2 = 2x$ .

**Решение.** Запишем уравнение окружности  $x^2 + y^2 = 2x$  в полярных координатах:

$$r^2 = 2r \cos \varphi \quad \text{или} \quad r = 2 \cos \varphi, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}.$$





Тогда,  $r' = -2 \sin \varphi$ ,

$$dl = \sqrt{r^2 + (r')^2} d\varphi = \sqrt{4 \cos^2 \varphi + 4 \sin^2 \varphi} d\varphi = 2 d\varphi.$$

Следовательно, интеграл примет вид:

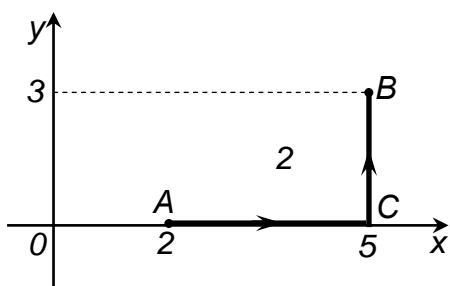
$$\begin{aligned} \int_L (x - y) dl &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (r \cos \varphi - r \sin \varphi) 2 d\varphi = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^2 \varphi - 2 \cos \varphi \sin \varphi) d\varphi = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (2 \cos^2 \varphi - \sin 2\varphi) d\varphi = \\ &= 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( 2 \cdot \frac{1 + \cos 2\varphi}{2} - \sin 2\varphi \right) d\varphi = (2\varphi + \sin 2\varphi + \cos 2\varphi) \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = 2\pi. \end{aligned}$$

Ответ:  $2\pi$ .

**Задание 7.** Вычислить криволинейный интеграл

$\int_{L_{ACB}} (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy$ , где  $L_{ACB}$  – ломаная  $ACB$ , соединяющая точки  $A(2, 0)$ ,  $C(5, 0)$ ,  $B(5, 3)$ .

**Решение.** Путь интегрирования  $L_{ACB}$  разобьем на два отрезка  $AC$  и  $CB$ .



$$\begin{aligned} \int_{L_{ACB}} (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy &= \\ &= \int_{L_{AC}} (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy + \\ &+ \int_{L_{CB}} (x^2 + y) dx + (x + y^2) dy = \end{aligned}$$

$$= \left[ \begin{array}{l} (AC): y = 0, 2 \leq x \leq 5, dy = 0 \\ (CB): x = 5, 0 \leq y \leq 3, dx = 0 \end{array} \right] =$$

$$= \int_2^5 x^2 dx + \int_0^3 (5 + y^2) dy = \frac{x^3}{3} \Big|_2^5 + \left( 5y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{3} (125 - 8) + 15 + 9 = 63.$$

Ответ: 63.

## Ответы

2. 1)  $\int_0^4 dy \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} f(x,y) dx$ ; 2)  $\int_{\frac{1}{2}}^1 dy \int_{\frac{1}{y}}^2 f(x,y) dx + \int_1^2 dy \int_y^2 f(x,y) dx$ . 3. 1)  $\frac{14}{3}$ ; 2)  $\frac{5}{6}$ ;
- 3)  $\frac{\pi a^2}{2}$ . 4. 1)  $\frac{2}{3}$ ; 2)  $7\frac{19}{21}$  3)  $-\frac{\pi}{2}$ ; 4)  $\frac{1}{2}$ . 6. 1)  $\int_0^2 dy \int_{\frac{y}{3}}^{\frac{y}{2}} f(x,y) dx + \int_2^3 dy \int_{\frac{y}{3}}^1 f(x,y) dx$ ;
- 2)  $\int_0^1 dx \int_{x^2}^x f(x,y) dy$ ; 3)  $\int_0^{48} dy \int_{\frac{y}{12}}^{\sqrt{\frac{y}{3}}} f(x,y) dx$ ;
- 4)  $\int_0^{\frac{1}{2}} dx \int_0^{\sqrt{2}x} f(x,y) dy + \int_{\frac{1}{2}}^{\sqrt{2}} dx \int_0^1 f(x,y) dy + \int_{\sqrt{2}}^{\sqrt{3}} dx \int_0^{\sqrt{3-x^2}} f(x,y) dy$ ;
- 5)  $\int_2^4 dy \int_{2y-5}^{9-\frac{3}{2}y} f(x,y) dx$ ; 6)  $\int_{-2}^1 dx \int_{x^2+1}^{3-y} f(x,y) dy$ . 7. 1)  $\ln \frac{25}{24}$ ; 2)  $\frac{4}{3}$ ; 3)  $\frac{\pi}{10} - \frac{8}{15}$ ; 4)  $\frac{\pi a^2}{2}$ . 8. 1) 9; 2)  $\frac{9}{4}$ ; 3) -2; 4)  $\frac{64}{3}$ ; 5)  $\frac{7}{3}$ . 9. 1)  $\frac{2a^3}{3}$ ; 2)  $300\pi$ ; 3)  $\frac{\pi^2}{6}$ ; 4)  $24\pi$ ;
- 5)  $\frac{a^4}{6}$ . 10. 1)  $-\frac{\pi}{2} \ln(\cos 3)$ . 11.  $\frac{1}{8} a^2 b^2$ . 12. 1) 8; 4)  $-2\pi$ . 13. 1)  $24\pi$ . 15. 2)  $\frac{8}{3}$ ;
- 3)  $\frac{125}{6}$ ; 4)  $\frac{\pi}{2} + \frac{1}{3}$  6)  $\frac{\pi a^2}{4}$ . 16.  $1/6$ . 18.  $\frac{a^3}{9} (3\pi + 20 - 16\sqrt{2})$ . 19.  $560/3$ .
20.  $\frac{\pi k a^3}{3}$ . 21.  $(\frac{5a}{6}; 0)$ . 23. 1)  $\frac{16}{3}$ ; 2)  $\frac{64}{3}$ ; 3)  $\frac{27}{2}$ ; 4)  $\frac{1}{2} \pi a^2$ . 24. 1)  $3(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2})$ ;
- 2)  $\frac{1}{2} a^2 (\frac{\pi}{3} + \frac{\sqrt{3}}{2})$ . 25. 1)  $40\pi$ ; 3)  $78\frac{15}{32}$ . 27.  $\frac{1}{110}$ . 29.  $\frac{abc^4}{6}$ .
31. 1)  $\frac{3(4\pi - 3\sqrt{3})}{20}$ ; 2)  $\frac{4}{3}$ . 33. 1)  $\frac{16\pi}{5}$ ; 2)  $\frac{341(\pi + 2)}{20}$ . 35. 1)  $\frac{a^{12}}{144}$ ; 2)  $\frac{ha^3}{6}$ .
36. 1)  $\frac{\pi}{6}$ ; 2)  $\frac{\pi}{32}$ ; 3) 81. 37. 1)  $\frac{16\pi}{3}$ . 38.  $2\pi$ . 39. 266. 41. (0,0,6). 42.  $\frac{4\pi}{3}$ .
43. 1)  $16\pi$ ; 2)  $\frac{118}{3}$ . 44. 1)  $(\frac{27}{4}, 0, 0)$ ; 2)  $(0, 0, \frac{64}{3})$ . 45. 1)  $\frac{243\pi}{2}$ ; 2)  $\frac{16\pi}{5}$ .



- 46.**  $\sqrt{5}\ln 2$ . **47.**  $\frac{7\sqrt{2}+7}{12}$ . **48.**  $4\pi a\sqrt{a}$ . **49.** 12. **50.**  $a^2(2-\sqrt{2})$ . **51.**  $4\pi$ . **53.** 24.
- 54.** 2)  $-\frac{a^2}{5}$ . **55.** 1)  $\frac{\pi\sqrt{2}}{2}+2\sqrt{2}-4$ . **57.** 1)  $-14\frac{2}{3}$ ; 2)  $11\frac{5}{6}$ ; 3)  $\frac{64\pi^3}{3}$ ; 4)  $-12\pi$ ;
- 5)  $\frac{1}{3}$ . **58.** 23. **59.** 3) 7; 4)  $\frac{3}{2}$ ; 5)  $\frac{3\sqrt[3]{2\pi}}{8}$ . **60.** 3) 91; 5)  $-4\pi$ . **61.**  $\frac{196}{105}$ . **62.** 18.
- 63.** 2,  $u(x, y) = x^3y - 2x^2y^2 + y^3 + C$ . **64.**  $11\frac{2}{3}$ .
- 65.** 1)  $u(x, y) = x^3 - x^2y + xy^2 - y^3 + C$ ; 2)  $u(x, y) = xe^{2y} - 5y^3e^x + C$ .
- 66.**  $3\pi a^2$ . **67.**  $\frac{16}{3}$ . **68.** 14,  $u(x, y) = 3x^2y + 4xy - 2y^2 + c$ .

## **Литература**

1. Differential equations. Multiple integrals. Infinite sequences and series: учебно-методическая разработка на английском языке по дисциплине «Математика» / И.И. Гладкий, А.В. Дворниченко, Н.А. Дерачиц, Т.И. Каримова, Т.В. Шишко. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2014. – 76 с.
2. Бугров, Я.С. Дифференциальные уравнения. Кратные интегралы. Ряды. Функции комплексного переменного / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. – М.: Наука, 1981. – 448 с.
3. Высшая математика для инженеров: в 2-х томах / С.А. Минюк [и др.]; под общ. ред. Н.А. Микулина. – Минск: ООО «Элайда», 2004. – Т.1. – 464 с., Т.2. – 592 с.
4. Герасимович, А.И. Математический анализ: Справочное пособие: в 2-х частях / А.И. Герасимович [и др.]. – Минск: Выш. шк., 1990. – 272 с.
5. Задачи и упражнения по курсу «Высшая математика» для студентов электронно-информационных специальностей. II семестр / Составители: Т.А. Тузик, А.И. Тузик, М.Г. Журавель. – Брест: Изд-во БрГТУ, 2007. – 103 с.
6. Индивидуальные задания по высшей математике / Под ред. А.П. Рябушко, I-III ч. – Минск: Выш. шк., 2004-2008. – Ч.1. – 304 с., Ч.2. – 367 с., Ч.3. – 367 с.
7. Интегральное исчисление функции одной переменной. Дифференциальные уравнения. Интегральное исчисление функций нескольких переменных : методические рекомендации и варианты заданий аттестационных работ по курсу «Математика» для студентов специальности «Промышленное и гражданское строительство» дневной формы обучения / М. М. Юхимук, Т. Ю. Юхимук, Т. М. Сукасян, Л. П. Махнист,. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2018. – 44 с.
8. Кратные и криволинейные интегралы. Ряды : методические указания и варианты контрольных работ для студентов технических специальностей заочной формы обучения / Е.Н. Швычкина, Л.Т. Мороз, С.Н. Наумовец, Л.С. Золотухина. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2015. – 28 с.
9. Кратные и криволинейные интегралы. Теория вероятностей: методические указания и варианты индивидуальных заданий для самостоятельной работы по курсу «Высшая математика» для студентов специальности 74 05 01 «Мелиорация и водное хозяйство» / С.Т. Гусева, Л.С. Золотухина, Т.И. Каримова; УО «Брестский государственный технический университет». – Брест: БрГТУ, 2007. – 52 с.
10. Неопределенный интеграл. Определенный интеграл. Дифференциальные уравнения. Кратные и криволинейные интегралы: методические рекомендации и варианты контрольной работы по курсу «Высшая математика» для студентов технических специальностей заочной формы обучения / И.И. Гладкий, И.В. Лизунова, Л.Т. Мороз, В.П. Черненко. – Брест : Брест. гос. техн. ун-т, 2009. – 36 с.
11. Пискунов, Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления: в 2-х томах / Н.С. Пискунов. – М.: Наука, 1985. – Т.1. – 432 с., Т.2. – 560 с.
12. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике / Д.Т. Письменный. – М.: АйрисПресс, 2004. – Ч.1. – 288 с.
13. Практикум по высшей математике для студентов технических специальностей. Часть V: Кратные и криволинейные интегралы / Р.А. Гоголинская, В.Т. Джура, Е.В. Кузьмина, И.В. Лизунова, Л.Т. Мороз ; УО «Брестский государственный технический университет». – Брест : БрГТУ, 2012. – 60 с.
14. Руководство к решению задач по высшей математике: в 2-х частях / Е.И. Гурский. – Минск: Выш. шк., 1990. – Ч.1. – 304 с., Ч.2. – 400 с.
15. Сборник задач по высшей математике: с контрольными работами / К.Н. Лунгу, Д.Т. Письменный, С.Н. Федин, Ю.А. Шевченко. – М.: АйрисПресс, 2003. – 576 с.

## Оглавление

<b>Кратные интегралы</b> .....	3
1. Двойной интеграл и его вычисление в декартовых координатах.....	3
2. Замена переменных в двойном интеграле .....	7
3. Вычисление площадей фигур и объемов тел с помощью двойного интеграла .....	12
4. Тройной интеграл, его вычисление в декартовых, цилиндрических и сферических координатах.....	14
5. Приложения тройного интеграла .....	17
<b>Криволинейные интегралы</b> .....	20
6. Криволинейные интегралы первого рода (по длине дуги).....	20
7. Криволинейный интеграл второго рода (по координатам).....	22
8. Формула Грина. Независимость криволинейного интеграла 2-го рода от пути интегрирования .....	25
<b>Аттестационная работа</b> .....	29
Решение типового варианта.....	51
<b>Ответы</b> .....	56
<b>Литература</b> .....	58

Учебное издание

Составители:

*Каримова Татьяна Ивановна*

*Гладкий Иван Иванович*

*Махнист Леонид Петрович*

*Черненко Виктор Петрович*

## **ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ**

**по курсу «Математика»**

для студентов факультета

электронно-информационных систем

### ***Кратные и криволинейные интегралы***

II семестр

Ответственный за выпуск: Каримова Т.И.

Редактор: Боровикова Е.А.

Компьютерная вёрстка: Каримова Т.И.

Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано в печать 04.04.2019 г. Формат 60x84 <sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага «Performer».  
Гарнитура «Arial». Усл. печ. л. 3,49. Уч. изд. л. 3,75. Заказ № 440. Тираж 23 экз.  
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный  
технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.