АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ РАЗРЕШИМЫЕ ГРУППЫ С ПОРЯДКАМИ ФАКТОРОВ НОРМАЛЬНОГО РЯДА, СВОБОДНЫМИ ОТ ЧЕТВЁРТЫХ СТЕПЕНЕЙ

Артюшеня Т.А., Трофимук А.А.
Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест
Научный руководитель: Трофимук А.А., к. физ.-мат. н., доцент

Рассматриваются только конечные группы. Используемые обозначения и определения соответствуют [1]. Пусть n и m – натуральные числа. Говорят, что n свободно от m-х степеней, если p^m не делит n для всех простых p. При $m = 2$ говорят, что n свободно от квадратов, при $m = 3$ – от кубов, а при $m = 4$ – от четвертых степеней.

Нормальным рядом группы G называется цепочка подгрупп

$$1 = G_0 \subseteq G_1 \subseteq ... \subseteq G_m = G, \qquad (1)$$

в которой подгруппа G_i нормальна в группе G для всех i. Фактор-группы G_{i+1}/G_i называются факторами нормального ряда (1).

Понятие p-длины $l_p(G)$ для конечных p-разрешимых групп введено в классической работе Ф. Холла и Г. Хигмена в 1956 г. Многие известные свойства p-длины изложены в монографии Хупперта [1]. Пусть G – p-разрешимая группа. Это означает, что она обладает нормальным рядом (1), в котором каждая фактор-группа G_{i+1}/G_i является либо p-группой, либо p'-группой. Поэтому для такой группы можно определить (p',p)- ряд:

$1 = P_0 \subseteq N_0 \subseteq P_1 \subseteq N_1 \subseteq P_2 \subseteq ... \subseteq P_l \subseteq N_l = G$, где $N_i/P_i = O_{p'}(G/P_i)$ – наибольшая нормальная p'-подгруппа в G/P_i, а $P_{i+1}/N_i = O_{p'}(G/N_i)$ – наибольшая нормальная p-подгруппа в G/N_i. Наименьшее натуральное число l такое, что $N_l = G$, называют p-длиной группы G и обозначают через $l_p(G)$.

В работе [2] были исследованы разрешимые группы, обладающие нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от кубов. Доказана следующая теорема.

Теорема. Пусть разрешимая группа G обладает нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от четвертых степеней. Тогда $l_2(G) \le 2$, $l_3(G) \le 2$, $l_p(G) \le 1$ для $p > 3$.

Следствие. Пусть G – A_4 – свободная разрешимая группа, которая обладает нормальным рядом, факторы которого имеют порядки, свободные от четвертых степеней. Тогда $l_p(G) \le 1$ для $p \ne 3$.

Список цитированных источников

1. Huppert, B. Endliche Gruppen I. / B. Huppert. – Berlin-Heidelberg-New York: Springer, 1967.
2. Трофимук, А.А. Конечные разрешимые группы с порядками факторов нормального ряда, свободного от кубов / А.А. Трофимук, В.С. Монахов // Вестник Брестского государственного технического университета. – 2010. – №1. Физика и математика. – С. 118–126.

Репозиторий БрГТУ