УДК 519.2

О ХАРАКТЕРИСТИКАХ ПОКАЗАТЕЛЬНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ

Гребенко В.А., Калиновская Е.А.
Научные руководители: Махнист Л.П., к. т. н., доцент;
Каримова Т.И., к. физ.-мат. н., доцент

Показательное распределение [1] – непрерывное распределение вероятностей случайной величины X, задаваемое плотностью

$$p(x) = \begin{cases} 0, & если \;\; x < 0, \\ \lambda e^{-\lambda x}, & если \; x \geq 0, \end{cases}$$

где λ ($\lambda > 0$) – параметр распределения.

Моментом n-го порядка [2] ($n = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X относительно числа a называется математическим ожиданием $M\left(\left(X - a\right)^n\right)$.

Начальным моментом n-го порядка ($n = 0, 1, 2, \dots$) случайной величины X (относительно числа $a = 0$) называется $\alpha_n = M\left(X^n\right)$. Заметим, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = M(X)$.

Центральным моментом n-го порядка случайной величины X (относительно центра распределения, т. е. числа $a = M\left(X\right)$) называется $\mu_n = M\left(\left(X - M\left(X\right)\right)^n\right)$. Очевидно, что $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D\left(X\right)$.

Начальные моменты n-го порядка показательного распределения определяются соотношением $\alpha_n = \dfrac{n!}{\lambda^n}$ [2].

Математическое ожидание показательного закона распределения $MX = \alpha_1 = \dfrac{1}{\lambda}$.

Центральные моменты n-го порядка можно рассчитывать по формуле $\mu_n = \dfrac{!n}{\lambda^n}$ [2], где число $!n = \sum\limits_{m=0}^{n} \dfrac{(-1)^m n!}{m!}$ называется <u>*субфакториалом*</u> *числа n*. Заметим, что *нормированный момент n*-го порядка равен $\dfrac{\mu_n}{\sigma^n} = \, !n$ – <u>*субфакториалу*</u> *натурального числа n*.

Коэффициент асимметрии $A = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = a_3 = 2$ и *эксцесса коэффициент* (эксцесс – скалярная характеристика островершинности графика плотности вероятности унимодального распределения) $E = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3 = a_4 - 3 = 9 - 3 = 6$.

Коэффициент вариации $V(X) = \frac{\sigma(X)}{M(X)} = 1$.

Так, как для медианы $M_e X$ показательного закона распределения выполняется

$$\int_0^{M_e X} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_0^{M_e X} = -e^{-\lambda M_e X} + e^{-\lambda \cdot 0} = -e^{-\lambda M_e X} + 1 = 0,5$$

и

$$\int_{M_e X}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x} \Big|_{M_e X}^{+\infty} = -\left(\lim_{x \to +\infty} e^{-\lambda x} - e^{-\lambda M_e X} \right) =$$

$$= -\lim_{x \to +\infty} \frac{1}{e^{\lambda x}} + e^{-\lambda M_e(X)} = e^{-\lambda M_e(X)} = 0,5,$$

то $e^{-\lambda M_e X} = 0,5$ или $-\lambda M_e X = \ln 0,5 = -\ln 2$.

Следовательно, $M_e X = \frac{\ln 2}{\lambda}$ – *медиана* показательного распределения.

Квантиль – одна из числовых характеристик распределения вероятностей. Квантилью порядка p $(0 < p < 1)$ действительной случайной величины X с функцией распределения $F(x)$ называется число x_p такое, что $F(x_p) \le p$ и $F(x_p + 0) = \lim_{x \to x_p + 0} F(x) \ge p$.

Квантиль $x_{1/2} = M_e(X)$ – медиана распределения. Квартили $x_{1/4}$, $x_{1/2}$, $x_{3/4}$, децили $x_{1/10}$, $x_{1/5}$, $x_{3/10}$,..., $x_{9/10}$ и процентили $x_{1/100}$, $x_{1/50}$, $x_{3/100}$,..., $x_{99/100}$ делят область изменения на 4, 10 и 100 интервалов соответственно.

Заметим, для медианы распределения со строго монотонной функцией распределения $F(x)$ выполняется $M_e(X) = F^{-1}(0,5)$, а квантиль x_p порядка p удовлетворяет соотношению $x_p = F^{-1}(p)$.

Так как функция распределения $F(x) = 1 - e^{-\lambda x}$, то $F^{-1}(x) = -\frac{\ln(1-x)}{\lambda}$ и медиана $x_{1/2} = M_e(X) = \frac{\ln 2}{\lambda}$, а квантиль x_p порядка p удовлетворяет соотношению $x_p = F^{-1}(p) = -\frac{\ln(1-p)}{\lambda}$.

Очевидно, что для показательного закона распределения выполняется $M_e(X)=\frac{\ln 2}{\lambda}<\frac{\ln e}{\lambda}=\frac{1}{\lambda}=M(X)$ и $M_0(X)=0<M_e(X)<M(X)$.

Квартили $x_{1/4}=\frac{\ln\frac{4}{3}}{\lambda}$, $x_{1/2}=\frac{\ln 2}{\lambda}$, $x_{3/4}=\frac{\ln 4}{\lambda}$, т.е. $x_{k/4}=\frac{\ln\frac{4}{4-k}}{\lambda}$, где $k=1,2,3$.

Интерквартильная широта $x_{3/4}-x_{1/4}=\frac{\ln 4}{\lambda}-\frac{\ln\frac{4}{3}}{\lambda}=\frac{\ln 3}{\lambda}$.

Децили $x_{1/10}=\frac{\ln\frac{10}{9}}{\lambda}$, $x_{1/5}=\frac{\ln\frac{5}{4}}{\lambda}$, $x_{3/10}=\frac{\ln\frac{10}{7}}{\lambda},\ldots,$ $x_{9/10}=\frac{\ln 10}{\lambda}$, т. е. $x_{k/10}=\frac{\ln\frac{10}{10-k}}{\lambda}$, где $k=1,2,\ldots,9$.

(10–90) процентная широта $x_{9/10}-x_{1/10}=\frac{\ln 10}{\lambda}-\frac{\ln\frac{10}{9}}{\lambda}=\frac{\ln 9}{\lambda}$.

Вероятность попадания в заданный интервал $(\alpha;\beta)$ ($\alpha\geq 0$) случайной величины, распределенной по показательному закону, определяется соотношением

$$P(\alpha<X<\beta)=P(\alpha\leq X<\beta)=F(\beta)-F(\alpha)=1-e^{-\lambda\beta}-\left(1-e^{-\lambda\alpha}\right)=$$
$$=e^{-\lambda\alpha}-e^{-\lambda\beta}.$$

Список цитированных источников

1. Вентцель, Е.С. Теория вероятностей / Е.С. Вентцель. – М.: Высшая школа, 1999. – 576 с.
2. Мисиюк, М.А. О некоторых моментах показательного распределения / М.А. Мисиюк, К.В. Онищук (научные руководители: Л.П. Махнист, Т.И. Каримова) // Сборник конкурсных научных работ студентов и магистрантов: в 2 ч. – Брест : Из-во БрГТУ, 2016. – Ч. 1. – С. 72–76.

УДК 512.542

ИНВАРИАНТЫ π-РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП, У КОТОРЫХ 2-МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДГРУППЫ π-ХОЛЛОВЫХ ПОДГРУПП НИЛЬПОТЕНТНЫ

Грицук Д.В., Трофимук А.А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Пусть P – множество всех простых чисел, а π – некоторое множество простых чисел. Дополнение к π во множестве P обозначается через π'.

Напомним, что группа G называется π-разрешимой, если она обладает нормальным рядом