Список цитированных источников

1. Танаев, В.С. Теория расписаний. Одностадийные системы / В.С. Танаев, В.С. Гордон. – М. : Наука, 1984. – 384 с.

2. Успенский, В.А. Теория алгоритмов: основные открытия и приложения / В.А. Успенский, А.Л. Семенов. – М. : Наука, 1987. – 288 с.

УДК 519.6+517.983

ИТЕРАЦИОННАЯ РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ ПРИ ПОМОЩИ ЯВНОГО МЕТОДА В СЛУЧАЕ АПОСТЕРИОРНОГО ВЫБОРА ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ

Минзер Е.И.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Матысик О.В., к. физ.-мат. н., доцент

1. Правило останова по малости невязки. В действительном гильбертовом пространстве *H* решается линейное операторное уравнение I рода

$$Ax = y_\delta, \tag{1}$$

где $\|y - y_\delta\| \le \delta$, *A* – ограниченный, положительный, самосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, но $0 \in SpA$, т. е. рассматриваемая задача некорректна.

Предположим, что при точной правой части *y* решение задачи существует. Для его отыскания применим двухшаговый явный метод итераций

$$x_{n,\delta} = 2(E - \alpha A)x_{n-1,\delta} - (E - \alpha A)^2 x_{n-2,\delta} + \alpha^2 A y_\delta,\ x_{0,\delta} = x_{1,\delta} = 0, \tag{2}$$

где *E* – тождественный оператор, α – итерационный параметр.

Зададим уровень останова ε и определим момент *m* останова условием

$$\left.\begin{aligned} &\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \\ &\|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \end{aligned}\right\} \quad \varepsilon = b\delta, b > 1. \tag{3}$$

Предполагаем, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т. е. $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$. Показано, что правило останова по невязке (3) применимо к методу (2). Справедлива

Теорема. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$, $0 < \alpha \le \frac{5}{4M}$ *и момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (2) *выбирается по правилу* (3), *тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$. *Пусть* $x = A^s z$, $s > 0$, *тогда справедливы оценки*

$$m(\delta) \le 2 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)},$$

$$\left\|x_{m(\delta),\delta} - x\right\| \le 2^{1/(s+1)}\left[(b+2)\delta\right]^{s/(s+1)}\|z\|^{1/(s+1)} + \frac{5}{4}\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{\alpha e}\left[\frac{(s+3)\|z\|}{(b-2)\delta}\right]^{1/(s+1)}\right\}\delta.$$

2. Численный модельный пример. Рассмотрим в пространстве $L_2(0,1)$ задачу в виде уравнения Фредгольма I рода $\int_0^1 K(t,s)x(s)ds = y(t),\ t \in [0,1]$ с симметричным положительным ядром $K(t,s) = \dfrac{1}{1+100(t-s)^2}$.

В качестве точного решения сформулированной задачи выберем функцию

$$x(s) = \begin{cases} s, & 0 \le s < \frac{1}{2}, \\ 1-s, & \frac{1}{2} \le s \le 1. \end{cases}$$

С использованием метода правых прямоугольников при m = 32, $h = \dfrac{1}{m}$ была вычислена в точках $t_i = ih,\ i = \overline{1,m}$ правая часть $y(t)$ рассматриваемого уравнения. Данная задача относится к классу обратных задач теории потенциала, и она некорректна. Обычно на практике мы не знаем точной функции $y(t)$, а вместо нее известны значения приближенной функции $\tilde{y}(t)$ в некотором числе точек с определенной, часто известной погрешностью δ, и по этим приближенным данным требуется приближенно найти решение. Чтобы имитировать эту ситуацию, будем считать заданными значения $\tilde{y}_i$, $i = \overline{1,m}$, полученные следующим образом $\tilde{y}_i = [y(t_i)\cdot 10^k$ + 0,5] / 10^k, квадратные скобки означают целую часть числа и k = 3.

Будем решать задачу методом (2), который в дискретной форме запишется

$$x_i^{(n)} = 2x_i^{(n-1)} - 2\alpha\sum_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)hx_j^{(n-1)} - x_i^{(n-2)} +$$

$$+\alpha^2\sum_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)h\tilde{y}_j + 2\alpha\sum_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)hx_j^{(n-2)} -$$

$$-\alpha^2\sum_{j=1}^{m} K(t_i,s_j)h\left(\sum_{k=1}^{m} K(t_j,s_k)hx_k^{(n-2)}\right),\ x_i^{(0)} = x_i^{(1)} = 0,\quad i = \overline{1,m}.$$

При счете используется $\alpha = 0{,}8$. Для решения задачи сведений об истокообразной представимости точного решения не потребовалось, так как здесь воспользовались правилом останова по малости невязки (3), выбрав $\varepsilon = 1{,}5\,\delta$. Итак, при $\delta = 0{,}001$ для достижения оптимальной точности при счете явным двухшаговым итерационным процессом потребовалось 14 итераций.

УДК 517.958

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ОДНОМЕРНОГО ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМ ПОЛИНОМОМ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГРАНИЧНОМ УСЛОВИИ

Наумовец С.Н.
Брестский государственный технический университет, г. Брест
Научный руководитель: Корзюк В.И., академик НАН Беларуси, д. физ.-мат. н., проф.

В замыкании $\overline{Q} = [0,\infty)\times[0,l]$ области $Q = (0,\infty)\times(0,l)$ двух независимых переменных $x = (x_0, x_1) \in \overline{Q} \subset \mathbb{R}^2$ рассмотрим одномерное волновое уравнение

$$\left(\partial_{x_0x_0} - a^2\partial_{x_1x_1}\right)u(\boldsymbol{x}) = f(\boldsymbol{x}), \quad (\boldsymbol{x}) \in \overline{Q}, \tag{1}$$

где a^2, l – положительные действительные числа, $\partial_{x_0x_0} = \partial^2/\partial x_0^2$, $\partial_{x_1x_1} = \partial^2/\partial x_1^2$ – частные производные по x_0 и x_1 второго порядка. К уравнению (1) на границе ∂Q области Q присоединяются условия типа Коши и граничные условия на боковых ее частях

$$u(0,x_1) = \varphi(x_1), \quad \partial_{x_0}u(0,x_1) = \psi(x_1), \quad x_1 \in [0,l], \tag{2}$$

$$\left(\partial_{x_0}^2 + \beta\partial_{x_0}\right)u(x_0,0) = \mu^{(1)}(x_0), \quad u(x_0,l) = \mu^{(2)}(x_0), \quad \beta \neq 0, x_0 \in [0,\infty). \tag{3}$$

Здесь $f:\overline{Q} \ni x \to f(x)$ – заданная функция на $\overline{Q}$, $\varphi:[0,l] \ni x_1 \to \varphi(x_1) \in \mathbb{R}$, $\psi:[0,l] \ni x_1 \to \psi(x_1) \in \mathbb{R}$ – функции на $[0,l]$, $\mu^{(j)}:[0,\infty) \ni x_0 \to \mu^{(j)}(x_0) \in \mathbb{R}$, заданные функции на $[0,\infty)$, $j = 1,2$.

В аналитическом виде строится классическое решение задачи (1)-(3) и выписываются необходимые и достаточные условия на заданные функции в условиях приведенной задачи, при выполнении которых существует единственное решение изучаемой задачи.