Список цитированных источников

1. Корзюк, В.И. Классическое решение первой смешанной задачи одномерного волнового уравнения с условиями типа Коши / В.И. Корзюк, И.С. Козловская, С.Н. Наумовец // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер.фіз.-мат. навук. – 2015. – №1. – С. 17-20.
2. Корзюк В.И. Уравнения математической физики: учеб. пособие / В. И. Корзюк. – Минск: БГУ, 2011. – 459 с.

УДК 519.6+517.983

НЕЯВНЫЙ ИТЕРАЦИОННЫЙ ПРОЦЕСС РЕШЕНИЯ ЛИНЕЙНЫХ НЕКОРРЕКТНЫХ УРАВНЕНИЙ

Сахвон М.Н.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

Научный руководитель: Матысик О.В., к. физ.-мат. н., доцент

1. Постановка задачи. В действительном гильбертовом пространстве *H* решается линейное уравнение

$$Ax = y, \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором *A*, для которого нуль не является собственным значением. Причем нуль принадлежит спектру оператора *A*, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения уравнения (1) применим неявный итерационный метод с $\alpha > 0$

$$(E + \alpha A)x_{n+1} = (E - \alpha A)x_n + 2\alpha y,\ x_0 = 0. \tag{2}$$

Однако на практике часто правая часть *y* уравнения (1) бывает неизвестной, а вместо *y* известно приближение y_δ: $\|y - y_\delta\| \le \delta$, тогда метод (2) примет вид:

$$(E + \alpha A)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A)x_{n,\delta} + 2\alpha y_\delta,\ x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

2. Апостериорный выбор числа итераций. Метод (3) можно сделать эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения ($x = A^s z, s > 0$), если воспользоваться правилом останова по невязке. Была обоснована возможность применения правила останова по невязке

$$\begin{cases} \|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, (n < m), \\ \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \le \varepsilon, \varepsilon = b\delta, b > 1. \end{cases} \tag{4}$$

Доказаны теоремы.

Теорема 1. *Пусть* $A = A^* \ge 0$, $\|A\| \le M$ *и пусть момент останова* $m = m(\delta)$ *в методе* (3) *выбирается по правилу* (4), *тогда* $x_{m,\delta} \to x$ *при* $\delta \to 0$.

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и пусть* $x = A^s z, s > 0$. *Тогда справедливы оценки*

$$m \le 1 + \frac{s+1}{4\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}},$$

$$\|x_{m,\delta} - x\| \le [(b+1)\delta]^{\frac{s}{s+1}}\|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 2\alpha\left\{1 + \frac{s+1}{4\alpha}\left[\frac{\|z\|}{(b-1)\delta}\right]^{\frac{1}{s+1}}\right\}\delta. \quad (5)$$

Замечание 1. *Хотя формулировка теоремы* 2 *дается с указанием степени истокопредставимости s и истокопредставимого элемента z, на практике их значения не потребуются, так как они не содержатся в правиле останова* (4).

Метод (3) можно сделать также эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения, если воспользоваться правилом останова по поправкам

$$\begin{cases} \|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \\ \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon, \end{cases} \quad (6)$$

где m − заданное до начала вычислений положительное число (уровень останова).

Для решения задачи (1) используем метод

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha(A^*A)\right)^{-1}\left[\left(E - \alpha(A^*A)\right)z_n + 2\alpha A^* y_\delta\right] + \\ +\left(E + \alpha(A^*A)\right)^{-1}\left(E - \alpha(A^*A)\right)u_n,\ z_0 \in H, \quad (7)$$

где u_n − ошибки в вычислении итераций, причем $\|u_n\| \le \beta$.

Обозначим $C = \left(E + \alpha(A^*A)\right)^{-1}\left(E - \alpha(A^*A)\right)$, $B = 2\left(E + \alpha(A^*A)\right)^{-1}\alpha A^*$. Метод (3) примет вид $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Bu_n$.

Обоснована возможность применения правила останова (6) к методу (7). Доказана теорема.

Теорема 3. *Пусть уровень останова* $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$ *выбирается как функция от уровней* δ *и* β *норм погрешностей* $y - y_\delta$ *и* u_n. *Тогда справедливы следующие утверждения:*

а) если $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$, *то момент останова m определен при любом начальном приближении* $z_0 \in H$ *и любых* y_δ *и* u_n, *удовлетворяющих условиям* $\|y - y_\delta\| \le \delta$, $\|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, *то справедлива оценка*

$$m < \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta, \beta) \to 0$, $\delta, \beta \to 0$ *и* $\varepsilon(\delta, \beta) \ge d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$, *где* $d > 1$, $p \in (0, 1)$, *то* $\lim_{\delta,\beta \to 0}\|z_n - x\| = 0$.