

УДК 519.688:004.021

КОМПЬЮТЕРНОЕ ПОСТРОЕНИЕ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ МНОГОУРОВНЕВОЙ ТРОФИЧЕСКОЙ ХЕМОСТАТ-МОДЕЛИ

Швычкина Е.Н.

Брестский государственный технический университет, г. Брест

Рассмотрим двухуровневую модель хемостата [1, 2, 3]. Пусть хищник, плотность которого определяется функцией $y(t)$, потребляет организм с плотностью $x(t)$, но не может потреблять субстрат $s(t)$. Эта задача интересна как с математической стороны, так и с практической. Например, такой процесс возникает в обработке отходов. Бактерии, представленные как $x(t)$, живут на отходах (или субстрат), в то время как другие организмы, такие как инфузории, питаются бактериями. Используя формулировку Моно (2), такая модель примет форму [1, 2]:

$$s'(t) = 1 - s(t) - \frac{m_1 x(t) s(t)}{a_1 + s(t)},$$

$$x'(t) = \left(\frac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 - \frac{m_2 y(t)}{a_2 + x(t)} \right) x(t), \quad (1)$$

$$y'(t) = \left(\frac{m_2 x(t)}{a_2 + x(t)} - 1 \right) y(t).$$

$$s(0) = s_0 \geq 0, \quad x(0) = x_0 \geq 0, \quad y(0) = y_0 \geq 0. \quad (2)$$

Параметры a_i ($i = 1, 2$) – константы Михаэлиса-Ментен; величины m_i ($i = 1, 2$) обозначают максимальные скорости роста i -го микроорганизма. В работе [4] приведена компьютерная реализация в СКА *Mathematica* процедуры нахождения, классификации точек покоя и предельных циклов системы (1), а также определения их устойчивости. Построена визуализация найденных численных решений и их фазовых траекторий. На основе этих исследований в [5] показана устойчивость решений $x(t)$, $y(t)$ относительно положений равновесия системы (1) для различных значений начальных условий $x(0)$, $y(0)$.

В данной работе рассмотрим поведение системы (1) в пространстве переменных (s, x, y) . Рассмотрим, например, следующие значения констант системы (1):

$$a_1 = 0,3, \quad a_2 = 0,9, \quad m_1 = 6, \quad m_2 = 9. \quad (3)$$

При помощи разработанного программного модуля в [4] определяем, что для такого набора параметров внутренние точки покоя имеют координаты: $Ec1(0,11,0,32)$, $Ec2(0,11,1,42)$. При этом устойчивой локально будет являться только $Ec1$ [2, 4].

Найдем численное решение системы (1), при начальных условиях $s(0) = 1$, $x(0) = 0,1$, $y(0) = 0,4$. Для интегрирования системы (1) используем программную функцию `NDSolve`, определив при этом некоторые специальные настройки [6].

```
sol = NDSolve[{sys1/.parr,s[0]==1,x[0]==.1,y[0]==.4},{s,x,y},{t,0,100},
MaxSteps->10000,AccuracyGoal->11,PrecisionGoal->20][[1]];
```

В результате получим решение в виде трех интерполяционных функций, графики которых приведены на рисунке 1.

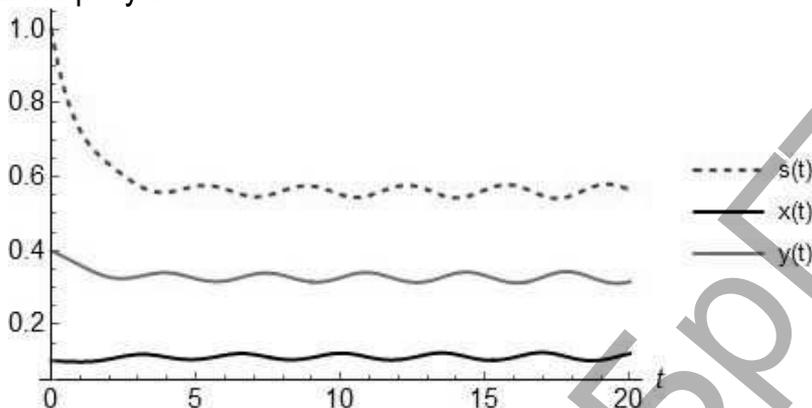


Рисунок 1 – Графики численных решений функций $s(t)$, $x(t)$, и $y(t)$

Построим в фазовом пространстве (s, x, y) кривую, которую определяет численное решение sol . На рисунке 2 покажем, как будет изменяться ее характер, когда будут изменяться, например, параметры m_1 и m_2 .

```
phase[m1_,m2_opt_] := Module[{sol1,t0},
t0 = 20;
```

```
sol1 = NDSolve[{s'[t] == 1 - s[t] - x(t) * (m1 s[t] / (.3 + s[t])),
```

$$x'[t] == \left(-1 + \frac{m_1 s[t]}{.3 + s[t]} \right) x[t] - \frac{m_2 s[t] y[t]}{.9 + s[t]},$$

$$y'[t] == \left(-1 + \frac{m_2 s[t]}{.9 + s[t]} \right) y[t],$$

```
s[0] == 1, x[0] == .1, y[t] == .4}, {s, x, y}, {t, 0, t0}];
```

```
ParametricPlot3D[Evaluate[{s[t], x[t], y[t] /. sol1}, {t, 0, t0},
```

```
PlotStyle->Directive[Thick],
```

```
Boxed->False, Ticks->{{0,1},{0,1},{0,1}}, AxesLabel->{"s", "x", "y"},
```

```
AxesStyle->Directive[20], PlotPoints->1000, PlotRange->All,
```

```
BoxRatios->{1,1,1}, DisplayFunction->Identity,
```

```
ViewPoint->{1.1,2.5,1.1}]]];
```

Определим диапазон изменения параметров m_i ($i = 1, 2$).

```
TableForm[Table[{m-1/3, 2 m+1/5}, {m, 4, 6} // N, TableHeadings->{{}, {m1, m2}}]
```

Таблица 1 – Набор значений параметров m_i ($i = 1,2$)

| | m_1 | m_2 |
|--|-------|-------|
| | 3.667 | 8.2 |
| | 4.667 | 10.2 |
| | 5.667 | 12.2 |

Используя, определенную выше, программную функцию `phase[m1_,m2_opt_]` и набор значений m_i ($i = 1,2$), приведенных в таблице 1, построим фазовые траектории системы (1).

```
tab1 = Table[phase[{m-1/3,2 m+1/5},
PlotStyle -> GrayLevel[m/10,2 m/(m-2)]], {m,4,6}];
Show[tab1,DisplayFunction -> ] DisplayFunction]
```

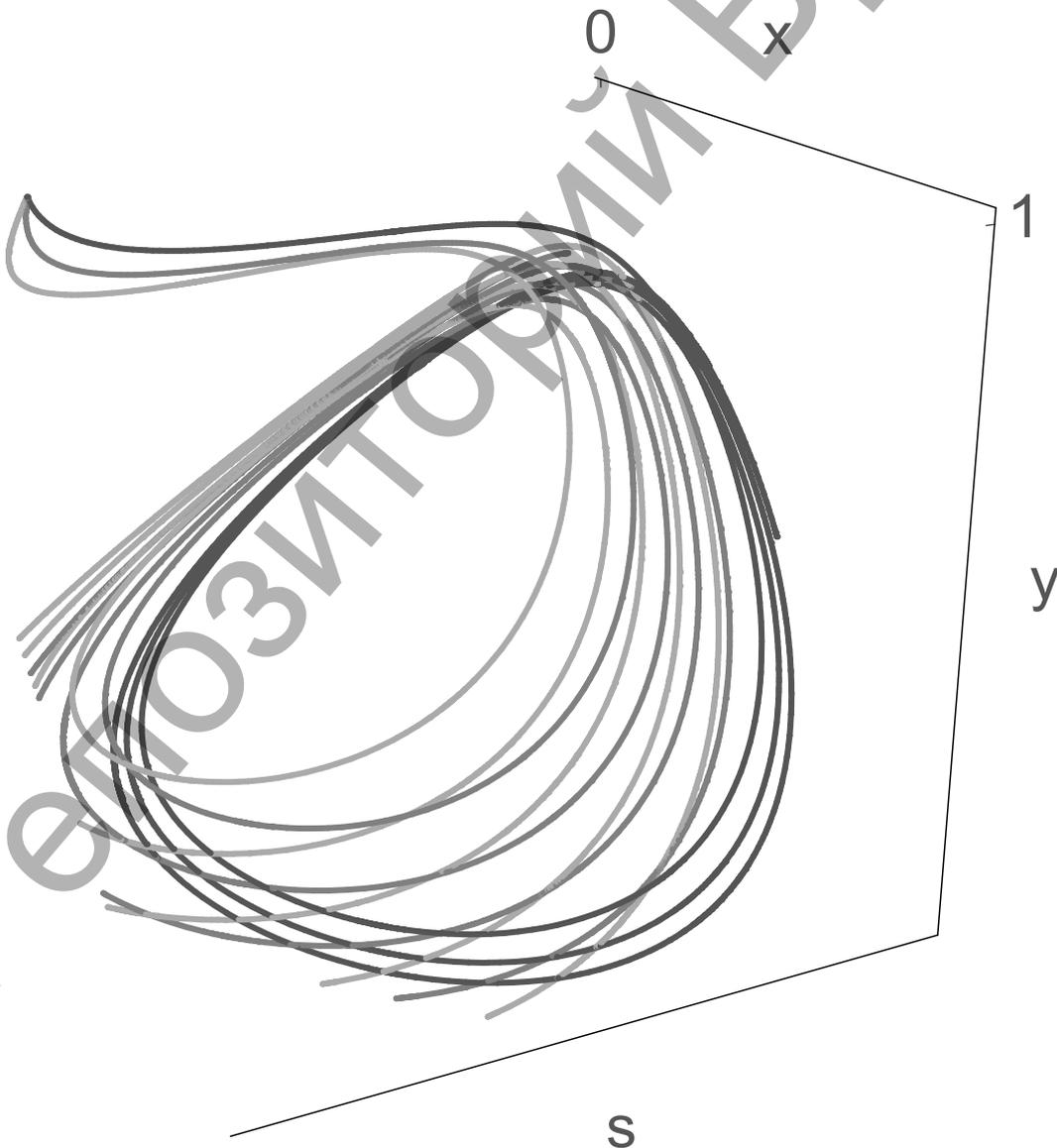


Рисунок 2 – Фазовые траектории численных решений $s(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ для набора значений параметров, приведенных в таблице 1

Список цитированных источников

1. Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H. L. Smith, P. Waltman. – Cambridge University Press, 1995. – 313 p.
2. Kuang, Y. Limit cycles in a chemostat-related model / Y. Kuang // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1989. – № 49. – P. 1759–1767.
3. Abell, M. L. Differential Equations with Mathematica / M.L. Abell, J. P. Braselton. – 3rd ed. – Elsevier Academic press, 2004. – 876 p.
4. Швычкина, Е. Н. Компьютерный метод поиска предельных циклов хемостат-модели / Е.Н. Швычкина, Р. С. Вацкель // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. – 2016. – № 5 (101) : Физика, математика, информатика. – С. 56–60.
5. Швычкина, Е.Н. Исследование предельных циклов трёхуровневой модели хемостата / Е.Н. Швычкина, Р.С. Вацкель // Математические и физические методы исследований : научный и методические аспекты : сб. тезисов докладов Респ. науч.-практ. конф. ; Брест, 27–28 апреля 2017 г. / Брест, гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2017. – С. 18.
6. <http://reference.wolfram.com/language/ref/NDSolve>.

УДК 513.82

**ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ
ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА R_5** **Юдов А.А., Кононюк М.А.***Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест*

В работе исследуется группа Ли движений пространства R_5 —пятимерного евклидова пространства. Целью данной работы является нахождение инвариантных подпространств подгруппы Ли группы Ли движений пространства R_5 и их образов стационарности. Инвариантные объекты играют важную роль для характеристики исследуемой группы движений.

Будем рассматривать подгруппу Ли вращений группы Ли движений пространства R_5 .

Рассмотрим группу Ли G_1 с алгеброй Ли G_1' , задаваемую соответственно базисом $\{i_6\}$. Будем находить подпространства инвариантные относительно этой группы.

Рассмотрим алгебру G_1' . Найдем одномерные и двумерные инвариантные подпространства. Рассмотрим оператор i_6 :

$$i_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$