Список цитированных источников

1. Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H. L. Smith, P. Waltman. − Cambridge University Press, 1995. − 313 p.
2. Kuang, Y. Limit cycles in a chemostat-related model / Y. Kuang // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1989. – № 49. – P. 1759–1767.
3. Abell, M. L. Differential Equations with Mathematica / M.L. Abell, J. P. Braselton. − 3rd ed. − Elsevier Academic press, 2004. − 876 p.
4. Швычкина, Е. Н. Компьютерный метод поиска предельных циклов хемостат-модели / Е.Н. Швычкина, Р. С. Вацкель // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. – 2016. – № 5 (101) : Физика, математика, информатика. – С. 56–60.
5. Швычкина, Е.Н. Исследование предельных циклов трёхуровневой модели хемостата / Е.Н. Швычкина, Р.С. Вацкель // Математические и физические методы исследований : научный и методические аспекты : сб. тезисов докладов Респ. науч.-практ. конф. ; Брест, 27–28 апреля 2017 г. / Брест, гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2017. – С. 18.
6. http://reference.wolfram.com/language/ref/NDSolve.

УДК 513.82

ИНВАРИАНТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПОДГРУПП ЛИ ГРУППЫ ЛИ ДВИЖЕНИЙ ПРОСТРАНСТВА R_5

Юдов А.А., Кононюк М.А.

Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина, г. Брест

В работе исследуется группа Ли движений пространства R_5 —пятимерного евклидова пространства. Целью данной работы является нахождение инвариантных подпространств подгруппы Ли группы Ли движений пространства R_5 и их образов стационарности. Инвариантные объекты играют важную роль для характеристики исследуемой группы движений.

Будем рассматривать подгруппу Ли вращений группы Ли движений пространства R_5.

Рассмотрим группу Ли G_1 с алгеброй Ли $G_1^{'}$, задаваемую соответственно базисом $\{i_6\}$. Будем находить подпространства инвариантные относительно этой группы.

Рассмотрим алгебру $G_1^{'}$. Найдем одномерные и двумерные инвариантные подпространства. Рассмотрим оператор i_6:

$$i_6 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (1)$$

Ставится задача найти все инвариантные относительно G_1 одномерные, двумерные векторные подпространства пространства R_5.

Найдём одномерные подпространства пространства R_5, инвариантные относительно этого оператора. Условие инвариантности подпространства с направляющим вектором $\alpha(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5.)$ имеет вид:

$$\alpha i_6 = \lambda\alpha \tag{2}$$

или в координатном виде:

$$-\alpha_2 = \lambda\alpha_1, \alpha_1 = \lambda\alpha_2, 0 = \lambda\alpha_3, 0 = \lambda\alpha_4, 0 = \lambda\alpha_5 \tag{3}$$

Из системы (3) получим: $-\alpha_2 = \lambda^2\alpha_2$. Отсюда $\alpha_2 = 0, \alpha_1 = 0$. При $\lambda \neq 0$ ненулевых решений нет. При $\lambda = 0$ получим инвариантные подпространства в виде: $\{a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5\}$.

Найдём двумерные подпространства, инвариантные относительно оператора. Условие инвариантности подпространства с базисом $\{\alpha, b\}, \alpha(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4,\alpha_5.)$, $(b_1,b_2,b_3,b_4,b_5.)$ имеет вид:

$$\alpha i_6 = \lambda\alpha + \mu b, b i_6 = \nu\alpha + \sigma b \tag{4}$$

или в координатном виде:

$$\begin{array}{ll}
-\alpha_2 = \lambda\alpha_1 + \mu b_1 & -b_2 = \nu\alpha_1 + \sigma b_1, \\
\alpha_1 = \lambda\alpha_2 + \mu b_2 & b_1 = \nu\alpha_2 + \sigma b_2, \\
0 = \lambda\alpha_3 + \mu b_3 & 0 = \nu\alpha_3 + \sigma b_3, \\
0 = \lambda\alpha_4 + \mu b_4 & 0 = \nu\alpha_4 + \sigma b_4, \\
0 = \lambda\alpha_5 + \mu b_5 & 0 = \nu\alpha_5 + \sigma b_5.
\end{array} \tag{5}$$

С помощью замены базиса получаем, что решение системы можно свести к рассмотрению 10 частных случаев $1^\circ - 10^\circ$:

$1^\circ.\alpha(1,0,a_3,a_4,a_5), b(0,1,b_3,b_4,b_5)$.

В этом случае система имеет вид:

$$\begin{cases} 0 = \lambda, 1 = \mu, 0 = \lambda a_3 + \mu b_3, 0 = \lambda a_4 + \mu b_4, 0 = \lambda a_5 + \mu b_5, \\ 1 = \nu, 0 = \sigma, 0 = \nu a_3 + \sigma b_3, 0 = \nu a_4 + \sigma b_4, 0 = \nu a_5 + \sigma b_5. \end{cases} \tag{6}$$

Отсюда следует: $b_3 = 0, b_4 = 0, b_5 = 0, a_1 = 0, a_2 = 0, a_3 = 0.$

Получаем инвариантное подпространство в виде: $\{e_1, e_2\}$.

В случаях $2^0 - 7^0$ получаем противоречие.

8^0. Инвариантные пространства принимают вид: $\{e_3 + a_5e_5, e_4 + b_5e_5\}$.

9^0. Инвариантные пространства принимают вид: $\{e_3 + a_4e_4, e_5\}$.

10^0. Инвариантные пространства принимают вид: $\{e_4, e_5\}$.

Результаты исследования инвариантных подпространств относительно оператора i_6 сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 1. Относительно группы G_1 инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_5 : $\{a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства:

$$\{e_1, e_2\}, \{e_3 + a_5e_5, e_4 + b_5e_5\}, \{e_3 + a_4e_4, e_5\}, \{e_4, e_5\}.$$

Теорема 2. Относительно группы $G_2 = \{i_6 + \varphi i_{13}\}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_5 : $\{e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$.

Теорема 3. Относительно группы $G_3 = \{i_6, i_{13}\}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_5 : $\{e_5\}$. и только следующие двумерные подпространства: $\{e_1, e_2\}, \{e_3, e_4\}$.

Теорема 4. Относительно группы $G_4 = \{i_6, i_7, i_{10}\}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_5 : $\{a_4e_4 + a_5e_5\}$ и только следующие двумерные подпространства: $\{e_4, e_5\}$.

Теорема 5. Относительно группы $G_5 = \{i_6 + i_{13}, i_7 - i_{11}, i_8 + i_{10}\}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_5 : $\{e_5\}$. Двумерных подпространств нет.

Теорема 6. Относительно группы $G_6 = \left\{i_6 + 2i_{13}, \sqrt{3}i_{12} + i_7 + i_{11}, \sqrt{3}i_9 - i_8 + i_{10}\right\}$ инвариантных одномерных и двумерных подпространств пространства R_5 нет.

Теорема 7. Относительно группы $G_7 = \{i_6, i_7, i_{10}, i_{15}\}$ инвариантных одномерных подпространств нет. Двумерное подпространство пространства R_5 : $\{e_4, e_5\}$.

Теорема 8. Относительно группы $G_8 = \{i_6, i_{13}, i_6 - i_{11}, i_8 + i_{10}\}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_5 : $\{e_5\}$. Двумерных подпространств нет.

Теорема 9. Относительно группы $G_9 = \{i_6, i_7, i_{10}, i_8 + i_9, i_{11} + i_{12}, i_{13} + i_{14}\}$ инвариантны только следующие одномерные подпространства пространства R_5 : $\{a_4e_4 + a_5e_5\}$. Двумерных подпространств нет.

Список цитированных источников

1. Юдов, А.А. Исследование однородных пространств с фундаментальной группой G – группой движений пространства ${}^2R_4$ / А.А. Юдов, Е.Е. Гурская // Вестник БрГУ. – 2008. – № 1(30). – С. 35–41.