УДК 519.688:004.021

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СИСТЕМ ПОПУЛЯЦИОННОЙ ДИНАМИКИ БАКТЕРИАЛЬНЫХ ПЛАЗМИД

Швычкина Е.Н.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

Математическое моделирование динамики развития двух видов микроорганизмов, потребляющих один субстрат, является актуальной задачей и его развитие в виде различных модификаций содержится, например, в работе [1]. Одной из таких актуальных модификаций является конкуренция плазмидосодержащих и бесплазмидных клеток микроорганизма. Известно [2], что микроорганизмы претерпевают изменения посредством действия *плазмид* – молекул ДНК. В репродуктивном процессе клеток организмов плазмиды могут быть потеряны, что приводит к возникновению в организме плазмидосодержащих и бесплазмидных клеток и в зависимости от способа культивирования клеток можно предопределить свойство полученного микроорганизма.

Для описания динамики нестабильных штаммов микроорганизмов наиболее продуктивное развитие получила модель, разработанная и проанализированная Ф.Стюартом и Б.Левиным [2]

$$\begin{gathered} s'(t) = (s_0 - s(t))D - \frac{m_1 x_1(t) s(t)}{a_1 + s(t)} - \frac{m_2 x_2(t) s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ x_1'(t) = \left(\frac{m_1(1-q)s(t)}{a_1 + s(t)} - D\right)x_1(t), \quad x_2'(t) = \frac{q m_1 s(t) x_1(t)}{a_1 + s(t)} + \frac{m_2 s(t) x_2(t))}{a_2 + s(t)} - D x_2(t), \end{gathered} \tag{1}$$

где $x_1(t)$ плотность плазмидосодержащего и $x_2(t)$ плотность бесплазмидного микроорганизма в момент времени t; $s(t)$ обозначает плотность питательного субстрата; параметр $D-$ называется потоком, и он численно равен скорости подачи питательного субстрата в ферментер; параметры a_i $(i=1,2)-$ постоянные равные концентрации субстрата, при которых удельная скорость роста микроорганизма равна половине максимальной (константы Михаэлиса-Метен); m_i $(i=1,2)-$ максимальная скорость роста i-го микроорганизма; $q-$ вероятность образования бесплазмидных клеток при делении плазмидосодержащих клеток.

В работе решается следующая задача: построить программные модули, позволяющие моделировать свойства решений системы (1), которая удовлетворяет начальным условиям $s(0) = s_0 \ge 0$, $x_1(0) = x_{10} \ge 0$, $x_2(0) = x_{20} \ge 0$, в зависимости от значений входящих параметров. Для решения этой задачи будем использовать метод, рассмотренный в работе [3]. А именно, для системы (1) рассмотрим случай, когда параметры удовлетворяют условию $a_1 = a_2$. В этом случае система (1) может быть редуцирована к дифференциальному уравнению первого порядка относительно функции $x_1(t)$:

$$x_1'(t) = x_1(t)\left(\frac{m_2(1-q)(1-\rho)(c_1 e^{-Dt} + s_0 - \rho\psi_2 x_1(t) - c_2 e^{-D\psi_1 t} x_1^{\psi_1+1}(t))}{c_1 e^{-Dt} + a_2 + s_0 - x_1(t) + q(1-\rho)\psi_2 x_1(t) - c_2 e^{-D\psi_1 t} x_1^{\psi_1+1}(t)} - D\right), \tag{2}$$

где $\psi_1 = \dfrac{1}{(1-q)(1-\rho)} - 1$, $\psi_2 = \dfrac{1}{q+\rho-q\rho}$. Функции $s(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$ связаны следующими функциональными соотношениями

$$\begin{gathered} s(t) = s_0 + e^{-tD} c_1 - x_1(t) - x_2(t), \\ x_2(t) = c_2 e^{(1/(1-q)(1-\rho)-1)tD} x_1^{1/(1-q)(1-\rho)}(t) - \frac{q(1-\rho)x_1(t)}{q+\rho-q\rho}, \end{gathered} \tag{3}$$

где $c_1, c_2 -$ произвольные постоянные.

Используя СКА *Mathematica*, проведем численное исследование решений дифференциальной системы (1). Для этого построим программный модуль, который решает дифференциальное уравнение (2) и, используя соотношения (3), осуществляет моделирование возможных состояний динамической системы (1) для различных значений входящих в нее параметров. На рисунке 1 показаны графики, входящих в систему (1) трех неизвестных функций $s(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$. Изменяя положения ползунков, можно задать желаемое значение параметров системы (1).

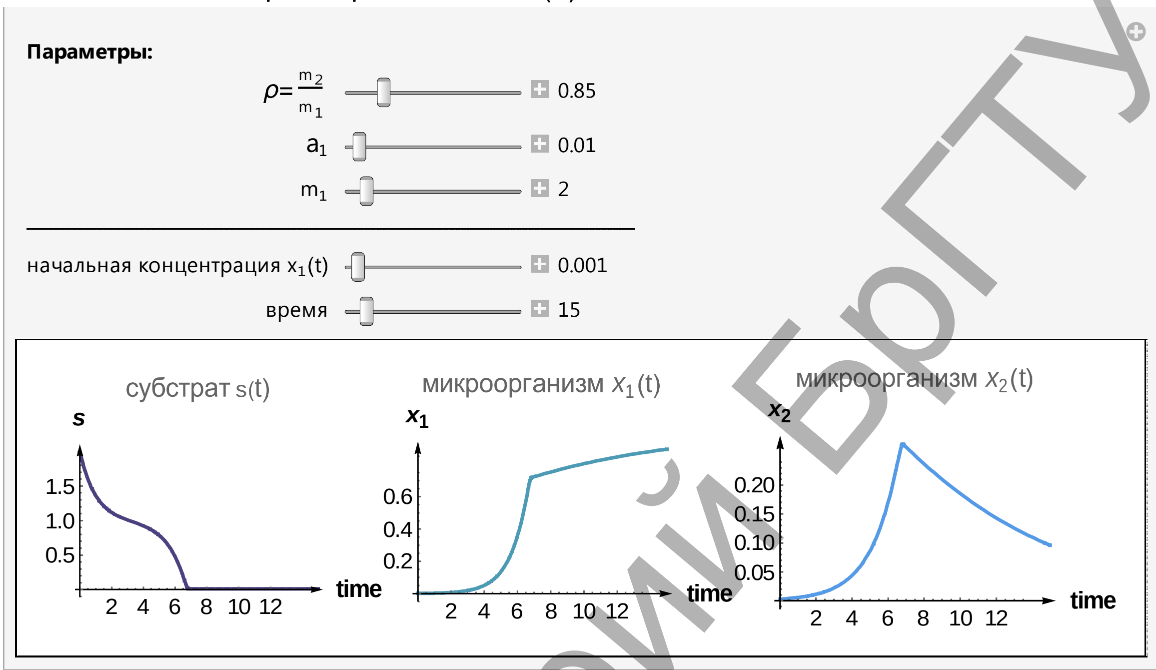

Рисунок 1

Список цитированных источников

1. Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H.L. Smith, P. Waltman. − Cambridge University Press, 1995. − 313 p.
2. Levin, B.R. The Population Biology of Bacterial Plasmids: a priori Conditions for the Existence of Mobilizable Nonconjugative Factors / B.R. Levin, F.M. Stewart // Genetics. – 1980. – Vol. 94. – № 2. – P. 425–443.
3. Чичурин, А.В. Моделирование хемостата популяционной динамики бактериальных плазмид // А.В. Чичурин, Е.Н. Швычкина // Весн. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. – 2015. – № 3. – С. 59–65.

УДК 517.583

ПОСТРОЕНИЕ МЕРОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ, НЕОГРАНИЧЕННОЙ ВНЕ ОКРЕСТНОСТЕЙ СВОИХ ПОЛЮСОВ

Юхимук М.М.
Брестский государственный технический университет, г. Брест

Пусть $f(z)$ – заданная мероморфная функция, нули которой находятся в точках $\alpha_j\ (j\in\Gamma)$, а полюсы – в точках $\beta_k\ (k\in\Gamma')$. При этом $\inf\limits_{\alpha_{j_1}\neq\alpha_{j_2}}\left|\alpha_{j_1}-\alpha_{j_2}\right|=d_\alpha>0$, $\inf\limits_{\beta_{k_1}\neq\beta_{k_2}}\left|\beta_{k_1}-\beta_{k_2}\right|=d_\beta>0$. Фиксируем число $d<\frac{1}{2}\min\{d_\alpha,d_\beta\}$ и образуем множество $\Omega_d=J\setminus\left(\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty}U_d(\alpha_j)\right)\cup\left(\bigcup\limits_{k=1}^{\infty}U_d(\beta_k)\right)\right)$. Пусть $(\lambda_n)_{n=1}^{\infty}\subset\Omega_d\setminus\{0\}$ – произвольная неограниченная последовательность. Поставим задачу построения неограниченной на