

**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

**УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»**

# **СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ**

**Материалы VII Республиканской научной конференции  
молодых ученых и студентов  
24–26 ноября 2011 года**

**Часть II**

**Брест 2011**

УДК 517+519+004  
ББК 22.11/.19+32.97

**Редакционная коллегия:**

**В.С. Рубанов**, БрГТУ, к.ф.-м.н., доцент – главный редактор  
**В.А. Головки**, БрГТУ, д.т.н., профессор – зам. главного редактора  
**Р.Х. Садыхов**, БГУИР, д.т.н., профессор  
**Н.В. Лазакович**, БГУ, д.ф.-м.н., профессор  
**А.И. Калинин**, БГУ, д.ф.-м.н., профессор  
**В.В. Голенков**, БГУИР, д.т.н., профессор  
**В.В. Старовойтов**, ОИПИ НАНБ, д.т.н., доцент  
**А.А. Дудкин**, ОИПИ НАНБ, к.т.н., с.н.с.  
**В.Ф. Савчук**, БрГУ, к.ф.-м.н., доцент  
**В.М. Ракецкий**, БрГТУ, к.ф.-м.н., доцент  
**С.С. Дереченник**, БрГТУ, к.т.н., доцент  
**Л.П. Махнист**, БрГТУ, к.т.н., доцент  
**С.И. Парфомук**, БрГТУ, к.т.н., доцент  
**Г.Л. Муравьев**, БрГТУ, к.т.н., доцент  
**Ю.В. Савицкий**, БрГТУ, к.т.н., доцент  
**Д.А. Костюк**, БрГТУ, к.т.н., доцент

**Рецензенты:**

кафедра информатики и прикладной математики БрГУ им. А.С. Пушкина;  
Матысик О.В. зав. кафедрой алгебры и геометрии БрГУ им. А.С. Пушкина, к.ф.-м.н., доцент.

**Современные проблемы математики и вычислительной техники:** материалы VII Республиканской научной конференции молодых ученых и студентов, Брест, 24–26 ноября 2011 г.: в 2-х частях / Брестский государственный технический университет; под ред. В.С. Рубанова [и др.]. – Брест: изд-во БрГТУ, 2011. – Ч. 2. – 166 с.

**ISBN 978-985-493-206-4 (Ч. 2)**  
**ISBN 978-985-493-204-0**

Представлены тезисы докладов по современным проблемам информационных технологий в научных и прикладных исследованиях, моделирования нелинейных динамических процессов, распознавания образов и анализа изображений, искусственного интеллекта и нейронных сетей, аналитических и численных методов исследований в математике и их приложениях.

Издается в 2-х частях. Часть 2.

УДК 517+519+004  
ББК 22.11/.19+32.97

**ISBN 978-985-493-206-4 (Ч. 2)**  
**ISBN 978-985-493-204-0**

Учреждения образования  
© «Брестский государственный технический университет», 2011

## **ЭЛЕКТРОННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ РАЗРАБОТКАХ**

УДК 004.023

### **ЭВРИСТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ РАСКРОЯ МАТЕРИАЛА В СРЕДЕ РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВЫЧИСЛЕНИЙ**

**Аброськин А.В.**

*УО «Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники», г. Минск*

*Научный руководитель – Бранцевич П.Ю., к.т.н., доцент*

Задача двумерного раскроя является представителем класса так называемых NP-полных задач. Подобные задачи не могут быть решены за время, выражаемое многочленом от размера данных, поэтому чтобы избежать полного перебора вариантов упаковки и, таким образом, создать раскрой за приемлемое время, используются различные эвристические алгоритмы. В то же время использование эвристики приводит к ухудшению качества получаемого результата.

Использование распределённых вычислений позволяет снизить необходимость использования эвристических алгоритмов для достижения оптимального соотношения затраченного на решение задачи времени и качества полученного раскроя. Тем не менее использование распределённых вычислений при решении задачи о раскрое затруднено, поскольку абсолютное большинство соответствующих алгоритмов обладает высокой внутренней связанностью по данным, что существенно усложняет или делает невозможным разбиение алгоритмов на вычислительные блоки, однако предложенная методика комбинации алгоритмов раскроя позволяет избежать этого ограничения.

Полученная методика предназначена в первую очередь для решения задач оптимизации расположения деталей сложной формы, поскольку именно эти задачи являются наиболее ресурсоёмкими в случае большого количества переборов и весьма чувствительными к использованию эвристических методов раскроя. Разработанный алгоритм упаковки представляет собой комбинацию метода упаковки деталей в прямоугольники и регулярного метода раскроя, использующего данные, полученные на первом шаге. Проведённые исследования показали, что для первой ступени наиболее оптимальным вариантом будет использование модифицированного алгоритма на основе No Fit Polygon (многоугольники обхода) [1], для второй – алгоритма на основе GRASP (Greedy Randomized Adaptive Search Procedure) [2].

Построение многоугольника обхода, использованного для упаковки фигурных деталей в прямоугольные области – это процедура, требующая использования высоких вычислительных мощностей. Время работы этого алгоритма выражается как  $O(k^3)$ , где  $k$  – это сложность многоугольника. При этом вращение фигуры влечёт за собой необходимость построения нового многоугольника обхода. Использование распределённых вычислений позволяет получить либо значительно более качественные результаты, в случае, когда для одной пары фигур строится один многоугольник обхода, либо значительно сократить время работы метода (пропорционально количеству элементов локальной вычислительной сети, участвующих в процессе обработки данных).

Результаты, полученные при проведении исследования, позволяют сделать вывод об эффективности использования подобного выбранной методики. В среднем отношение полезной площади раскроя к общей площади листа материала увеличивается до 4% в сравнении с раскроями, полученными при использовании других методов. Время формирования карт раскроя тем ниже в сравнении с аналогами, чем больше узлов вычислительной сети участвует в обработке и чем большая сложность поступившей на задачи.

##### **Список цитированных источников**

1. Burke, E. Complete and robust no-fit polygon generation for the irregular stock cutting problem. School of Computer Science and Information Technology, University of Nottingham, UK.
2. Alvarez-Valdes, R. A GRASP algorithm for constrained two-dimensional non-guillotine cutting problems. University of Valencia, Department of Statistics and Operations Research.

УДК 372.016:004

### **САЙТ ДЛЯ ОРГАНИЗАЦИИ ОЛИМПИАД ПО СПОРТИВНОМУ ПРОГРАММИРОВАНИЮ**

***Басин В.И.***

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Силаев Н.В., доцент*

Разрабатываемый сайт Brain Training предназначен для проведения олимпиад по спортивному программированию в сети Интернет (интрасети).

Для участия в олимпиаде необходимо зарегистрироваться, подать заявку на участие. Тестирование происходит в реальном времени. Участнику сообщаются результаты, демонстрируется таблица рейтинга, если включена соответствующая настройка администратором сайта. Администратор имеет право запретить/разрешить: подавать заявки и участвовать в соревнованиях всем участникам или одному из них, регистрацию новых пользователей сайта. При необходимости он может удалять пользователей, просматривать их личную информацию (фамилия, имя, пароль и т. д.).

Типы пользователей: один человек (пользователь) или три человека (команда).

Для добавления нового пользователя используется следующий метод:

```
public int AddUser(User u)
{
    if (trash.Count == 0)
    {
        index = users.count;
    }
    else
    {
        index = (int) trash[trash.Count - 1];
        trash.RemoveAt(trash.Count - 1);
    }
    users.Insert(index, u);
    return index;
}
```

Функция AddUser принимает в качестве параметра экземпляр класса User, который хранит информацию о пользователе: Никнэйм, Фамилию, Имя, Отчество, адрес электронной почты, место обучения и так далее.

Объект trash типа ArrayList содержит номера свободных ячеек в массиве пользователей users, который также является экземпляром класса ArrayList. При удалении какого-нибудь пользователя освобождается ячейка с определённым номером в users, адрес которой заносится в trash.

Для добавления пользователя в методе находится индекс свободной ячейки index. Сначала происходит проверка её существования, пользуясь объектом trash. Если такая ячейка существует, то index получает её номер, иначе в users добавляется новая ячейка, в которую заносится информация о созданном пользователе.

Функция AddUser возвращает номер или уникальный ID пользователя равный значению переменной индекс.

При проведении олимпиад предусмотрена возможность решения задач на различных языках программирования. На данный момент поддерживаются следующие компиляторы: Free Pascal 2.2.0, GNU C++, Delphi 7, Microsoft C++\C#\Basic 2008, Java.

Следующий код демонстрирует процесс компиляции решения пользователя на языке Pascal:

```
Process P = new Process();
P.StartInfo.FileName = CompilersDir + @"FreePascal\bin\i386-win32\fpce.exe";
P.StartInfo.Arguments = source + @"\exe.src";
P.StartInfo.ErrorDialog = false;
P.StartInfo.WindowStyle = ProcessWindowStyle.Hidden;
P.Start();
P.WaitForExit();

if (File.Exists(source + @"\exe.exe"))
{
    res.TestRes = TestingResult.Idle;
}
else
{
    res.TestRes = TestingResult.CompilationError;
}
```

При компиляции создаётся новый процесс P. Для указания пути к файлу компилятора используется переменная CompilersDir, которая помечена как readonly и инициализируется при чтении настроек из конфигурационного файла. Переменная source – это путь к папке, в которой содержится файл решения участника “exe.src”. Во время выполнения процесса не будут отображаться окна об ошибках и само окно запускаемого процесса – компилятора, путём установки соответствующих свойств ErrorDialog в значение false и WindowStyle в ProcessWindowStyle.Hidden. Затем осуществляется запуск программы-компилятора и ожидание её завершения. После проверяется существование файла “exe.exe”, отсутствие которого свидетельствует об ошибке компиляции.

Аналогично происходит компиляция решения написанного на MS Visual C++.

Каждое соревнование проводится по определённому правилу (например: школьная или студенческая олимпиада). Кроме того, можно производить более тонкую настройку: выбирать наилучшие решения (для подсчёта рейтинга), учитывать только полные реше-

ния, контролировать время сдачи, назначать штраф по времени на неудачную попытку сдачи в минутах, показывать или скрывать таблицу рейтинга до, после и во время соревнования, какие компиляторы разрешено использовать и так далее.

В теоретическом разделе можно найти полезную информацию, как для новичков, так и для опытных программистов. Здесь находятся статьи с алгоритмами и приёмами решения нестандартных и олимпиадных задач по спортивному программированию и их реализация на языках C++ и Pascal. Этот раздел обновляется и постоянно пополняется новыми материалами.

На сайте есть форум, на котором пользователи обсуждают и предлагают решения прошедших соревнований, комментируют и консультируются по поводу теоретических материалов сайта, высказывают предложения по дальнейшему развитию сайта.

Сайт можно использовать для проведения экзаменов и лабораторных по программированию для студентов. Для этого существует специальная настройка, благодаря которой система предлагает список заданий (билетов), предварительно перемешав их в произвольном порядке. После выбора номера задания одним студентом, гарантируется, что оно не будет предложено другому.

Также разработана специальная система рейтинга для пользователей сайта. Каждое соревнование имеет свой уровень сложности: Elementary (элементарный уровень, освоение основ программирования), Base (базовый уровень, умение реализовывать простейшие алгоритмы, районные олимпиады), Average (средний уровень, как минимум – знание базовых алгоритмов, областные и республиканские олимпиады), Complicated (усложнённый уровень, творческий подход к решению задач, республиканские и международные соревнования).

В соответствии с уровнем, за каждую решённую задачу начисляется рейтинг. Рейтинг всех пользователей можно посмотреть, перейдя по ссылке на главной странице.

Текущие результаты соревнования можно узнать, не регистрируясь и не подписываясь на соревнование, а воспользоваться функцией «Монитор», что полезно для преподавателей, которые могут следить за успехами своих учеников и студентов.

Сайт доступен на двух языках: английском и русском.

Отличительной особенностью сайта Brain Training является то, что существует возможность проверки использования рекурсии, ассемблерных вставок, массивов, количества переменных и т. д. в решениях участников.

Пользователи могут просматривать сданные ими программы, перейдя по специальной ссылке, на странице протокола. Исходные коды отображаются с подсветкой синтаксиса в зависимости от компилятора, выбранного пользователем при отправке своего решения на тестирование.

Каждый участник может просматривать только свои решения. Администратор имеет неограниченный доступ ко всем решениям.

Кроме ролей обычного пользователя и администратора, на сайте определена роль модератора, который имеет ограниченный администратором доступ к ресурсам сайта. Модератор может добавлять новые задачи в базу, создавать соревнования, доступные только определённой группе пользователей сайта, редактировать и создавать темы в форуме, блокировать учётные записи пользователей, действия которых не соответствуют правилам работы на сайте или дестабилизирующие работу тестирующей системы Brain Training.

УДК 004.6

## **ИНФОРМАЦИОННАЯ СИСТЕМА СОПРОВОЖДЕНИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА ДЛЯ АВТОРСКИХ КУРСОВ**

***Богданов А.Н., Савельева Н.В.***

*УО «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова», г. Витебск*

В современных условиях профессиональные знания стареют очень быстро, необходимо постоянное их обновление, и поэтому выдвинутая в 1997 г. на XIX Генеральной конференции ЮНЕСКО концепция непрерывного образования «Обучение в течение всей жизни» (или «Life Long Learning») уже повсеместно признана и остается особенно актуальной. В последнее время многие специалисты называют дистанционную форму обучения образованием XXI века, так как она предполагает использование систем массового непрерывного самообучения и всеобщего обмена информацией независимо от временных и пространственных поясов. Системы дистанционного образования позволяют людям из любого района страны и за рубежом, а также людям с ограниченными физическими возможностями получить образование.

Вместе с тем, полный переход образования на дистанционный уровень вряд ли возможен, потому что живым людям необходимо личное взаимодействие с преподавателями, однокурсниками, коллегами. При непосредственном контакте с людьми человек совершенствуется, поэтому должен развиваться в социуме. Однако если для получения основного образования рекомендуется очная форма, то для повышения квалификации дистанционная форма намного предпочтительнее, так как слушатели высокомотивированы, обладают большей степенью самостоятельности и часто не могут позволить себе из-за рабочего графика посещать очные занятия.

Для проведения занятий любой формы очень удобным для обучающихся и обучаемых является использование т.н. LMS (Learning Management System). Данное понятие появилось в концепции электронного обучения (e-Learning) и обозначает систему управления обучением, представляет собой высокоуровневое, стратегическое решение для планирования, проведения и управления всеми учебными мероприятиями в организации, включая онлайн-обучение, виртуальные классы и очные курсы, проводимые преподавателем.

Многие системы подобного типа такие, как, например, Moodle, SharePointLMS, WebTutor и пр., очень громоздки, овладение навыками работы с ними требует времени и терпения, хотя в дальнейшем используется далеко не весь их функционал. Негибкость в переходе к новым формам проведения занятий не только учреждений образования в целом, но и самих преподавателей – серьезная проблема, которая осложняется отсутствием «мобильности» систем LMS, например, в случае авторских курсов, проводить которые преподаватель приглашается в другие учреждения образования и организации. В таких случаях даже при доступности вузовской LMS из Интернет (а не только из локальной сети вуза, где работает преподаватель) возникнут проблемы при добавлении сторонних слушателей в университетскую базу данных, т.к. вряд ли вуз согласится добавлять слушателей, которые не являются студентами данного вуза.

Таким образом, актуальность разработки информационной системы сопровождения учебного процесса обусловлена необходимостью поиска оптимальных форм реализации и учебно-методического сопровождения авторских курсов. Цель данной работы – проек-

тирование и программная реализация удобной интерактивной информационно-аналитической и коммуникационной среды для осуществления и поддержки учебного процесса, ориентированной на проведение авторских курсов в нескольких учреждениях образования и организациях.

Созданная система управления учебным процессом включает в себя:

- расписание занятий и общую информацию о курсах,
- доступные для загрузки учебные материалы,
- возможность загрузки контрольных работ на проверку преподавателю,
- гибкую тестирующую систему,
- учет и анализ успеваемости и посещаемости студентов,
- форум для обсуждения вопросов с преподавателем и внутри группы.

На наш взгляд, наиболее целесообразно использовать созданное приложение для сопровождения авторских курсов, хотя возможности созданной информационной системы предусматривают ее использование разными преподавателями и для разных групп.

Созданная система может быть размещена на сервере в вузе, где работает преподаватель, либо на стороннем сервере платно за счет преподавателя (бесплатный хостинг почти никогда не отвечает всем необходимым требованиям), либо, в случае, если преподаватель ведет курсы в нескольких университетах или других учреждениях образования и организациях, удобно использовать разработанную систему совместно с виртуальной машиной, имитирующей сервер. В последнем случае преподавателю можно не добиваться разрешения на размещение своей личной LMS в структуре сайта пригласившей его организации (тем более может случиться, что такого сайта и сервера в организации просто нет) и, соответственно, не тратить время на настройку LMS перед первым запуском. Преподавателю достаточно принести в компьютерный класс пригласившей его организации свой ноутбук (или переносной накопитель информации) с виртуальной машиной и подключиться к локальной сети компьютерного класса. Напомним, что под виртуальной машиной понимают программную или аппаратную систему, эмулирующую аппаратное обеспечение некоторой платформы. Следует отметить, что при использовании виртуальной машины в локальной сети преподаватель целиком ответственен за безопасность разработанной системы – не только за настройку сервера, но и за защищенность «живой» машины, на которой запущена виртуальная (при получении привилегированного доступа к «живой» машине – физического или сетевого – образ виртуальной машины может быть легко похищен, а тестирующая система взломана). Еще один недостаток этого подхода – курсы автоматически становятся очными.

При размещении разработанной нами системы в Интернет авторские курсы можно проводить не только в очной, но и в очно-дистанционной или полностью дистанционной формах. В таких случаях лекции и семинарские занятия можно проводить в форме вебинаров, а лабораторные занятия, предусматривающие выполнение заданий на компьютере, – с помощью функции показа экрана (в Skype или другом специализированном ПО). Перечисленные дистанционные формы интерактивного взаимодействия не поддерживаются разработанной нами системой, но при необходимости их использования приемлемым решением является использование стороннего ПО (задействование стороннего ПО мы старались сделать минимальным, исходя из целей и возможных условий использования создаваемой системы). Например, для проведения вебинаров, можно бесплатно зарегистрироваться в специализированных онлайн-сервисах, таких как <http://tools.hrm.ru> (однако на сегодняшний день в бесплатных системах существуют жест-



кие ограничения на количество участников вебинаров – в большинстве систем эта цифра не превышает 5).

Из вариантов развертывания разработанной системы отметим следующие:

<b>1) в Интернет</b>	<b>2) на сервере вуза, где работает преподаватель</b>	<b>3) в локальной сети организации, пригласившей преподавателя</b>
– оплата хостинга преподавателем – организация, пригласившая преподавателя, должна обладать выходом в Интернет	– необходимо разрешение вуза – организация, пригласившая преподавателя, должна обладать выходом в Интернет	– система не доступна из Интернет, что усложняет общение с преподавателем, особенно после проведения курса

Итак, на наш взгляд, при несогласии руководства разместить разработанную систему на сервере вуза (вариант 2), наиболее оптимальным решением для преподавателя будет покупка хостинга (вариант 1), а при отсутствии доступа в Интернет в организации, пригласившей преподавателя, первый вариант можно сочетать с третьим следующим образом: во время проведения курсов использовать разработанную систему в локальной сети (вариант 3) и ее зеркало в Интернет (вариант 1), а после их завершения – продолжать обсуждение проблемных вопросов на форуме через Интернет (вариант 1).

В завершение следует отметить, что при возрастании доли дистанционного обучения в образовании неизбежно возрастает нагрузка на преподавателя за счет подготовки большого объема электронных материалов и консультирования слушателей во «внеурочное», не всегда удобное преподавателю, время.

УДК 519.713

## **АВТОМАТИЗАЦИЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОЙ ДЕКОМПОЗИЦИИ КОНЕЧНЫХ АВТОМАТОВ**

**Бокатюк С.С.**

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научный руководитель – Тузик И.В., ст. преподаватель*

Работа с конечными автоматами часто ведется вручную и является достаточно трудоемким процессом. Чем больше состояний или входов у конечного автомата, тем все более сложной становится задача для человека. Поэтому целесообразно использовать ЭВМ для выполнения некоторых действий над автоматами. Ввиду того, что для большинства операций над автоматами разработаны четкие алгоритмы действий, их можно описать практически на любом языке программирования.

Существующие в настоящий момент математические пакеты, способные упростить некоторые расчеты при решении задач, связанных с конечными автоматами, являются общими математическими комплексами. В частности, они не позволяют от начала и до конца решить задачу подготовки автомата к последовательной декомпозиции, а служат лишь для выполнения некоторых математических действий, направленных на решение этой задачи.

Разработанная автором программа позволяет либо выполнять действия по подготовке автомата к декомпозиции в комплексе, либо ограничиться только некоторыми из них. Для удобства использования программы в учебном процессе все этапы реализации

стандартных алгоритмов должны были формироваться в виде отчетов. Программирование формирования таких отчетов оказалось очень трудоемким процессом. Зато теперь все отчеты о выполненных программой действиях повторяют действия, которые бы выполнил человек, решающий задачу с конкретными исходными данными, что повышает наглядность восприятия произведенных операций.

Данный программный комплекс, автоматизирующий подготовку конечного автомата к последовательной декомпозиции, был разработан на объектно-ориентированном языке C# с использованием технологий Microsoft .Net 4.0, Microsoft WPF, а также библиотеки Microsoft GLEE.

Программный комплекс позволяет для заданного пользователем автомата либо сразу найти все его нетривиальные конгруэнции, если такие существуют, либо получить автомат с минимальным числом состояний, эквивалентный заданному. Кроме того, и заданный, и минимизированный автоматы представляются в данном программном комплексе в виде графов. Это повышает наглядность восприятия автомата (при этом автоматные таблицы также выводятся на экран).

При щелчке по кнопке «Нахождение конгруэнций» (рис. 1) слева в рабочей области появится список всех нетривиальных конгруэнций, найденных для этого автомата, а справа можно просмотреть очень подробный отчет отыскания этих конгруэнций. Если нетривиальных конгруэнций для автомата не существует, то выведется соответствующее сообщение.

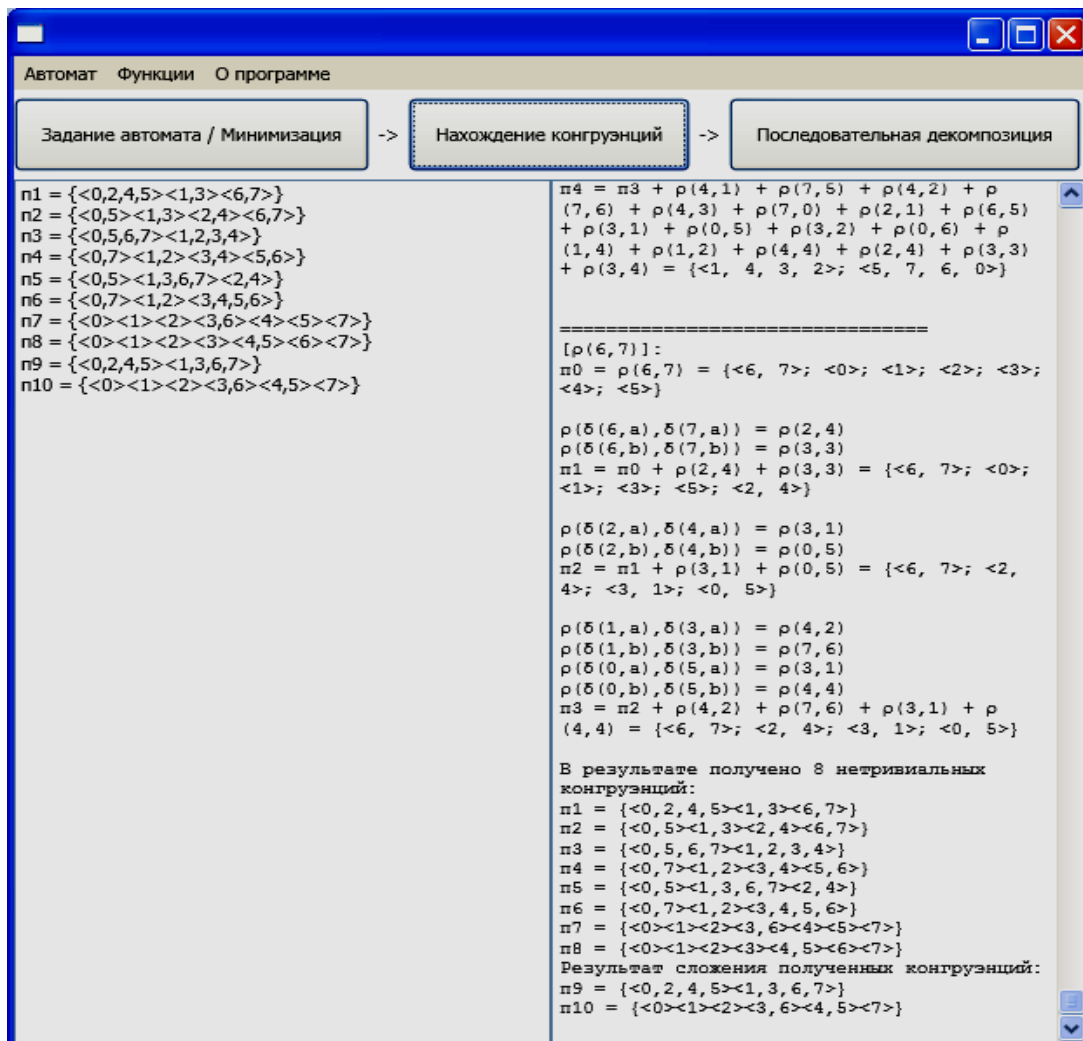


Рисунок 1

Отметим, что отыскание всех нетривиальных конгруэнций требует выполнения большого количества операций и является очень громоздкой задачей. Поэтому большой проблемой было правильно организовать иерархию структур, хранящих данные в памяти ЭВМ. В ходе научной работы было испробовано множество подходов для нахождения наиболее удобной для хранения и обработки данных архитектуры. Были сравнены скорости выполнения разных видов разработанных нами алгоритмов (рекурсивных и линейных) с разными вариантами архитектуры данных. В результате исследований были выбраны рекурсивные алгоритмы и архитектура данных с применением рекурсии. Разработка рекурсивных алгоритмов является более трудоемкой, нежели разработка линейных программных алгоритмов из-за особенностей использования при этом памяти ЭВМ. Проведенные исследования позволили повысить скорость работы программы в несколько десятков раз по отношению к первым версиям разработанных автором программных алгоритмов. В основу решения данной задачи был положен алгоритм отыскания нетривиальных конгруэнций, описанный в [1].

Цель последовательной декомпозиции автомата заключается в том, чтобы, по возможности, упростить реализацию логического блока автомата. В тех случаях, когда последовательная декомпозиция возможна, исходный автомат удается представить в виде композиции нескольких более простых автоматов.

Согласно соответствующей теореме (см. [1]), если автомат имеет нетривиальную конгруэнцию, то для него существует последовательная декомпозиция.

Для подготовки автомата к последовательной декомпозиции необходимо предварительно выбрать одну из найденных нетривиальных конгруэнций. При щелчке по кнопке «Последовательная декомпозиция» (см. рис. 2) программа выполнит следующие действия: найдет ортогональное к выбранной конгруэнции разбиение; закодирует блоки выбранной конгруэнции, блоки разбиения и входные сигналы; построит кодированные таблицы переходов; найдет минимальные ДНФ таблично заданных логических функций; выведет в виде минимальных ДНФ выражения для логических функций.

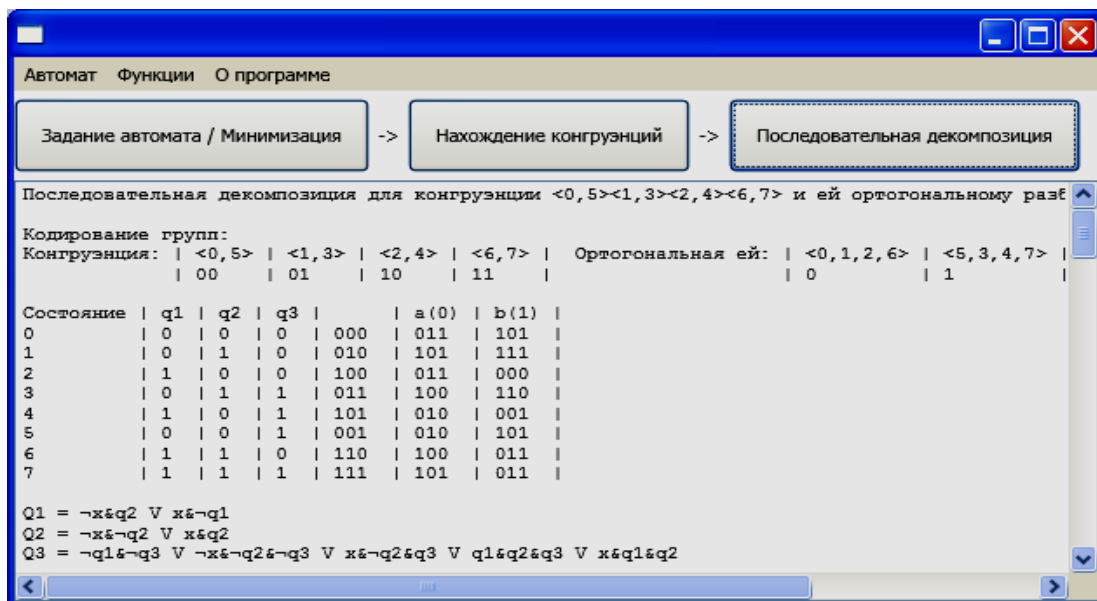


Рисунок 2

После получения аналитических выражений для всех двоичных функций, реализующих функцию переходов заданного автомата, становится возможным построение функциональной схемы, реализующей заданный автомат.

Предложенный программный комплекс отличается удобством и быстродействием, направлен на решение нескольких классов трудоемких задач, возникающих при работе с конечными автоматами.

#### Список цитированных источников

1. Карпов, Ю.Г. Теория автоматов / Ю.Г. Карпов. – СПб.: Питер, 2002. – 224 с.

УДК 336.717.72:004.942

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ЗАВИСИМОСТИ ОПТИМАЛЬНОГО УРОВНЯ ЛИМИТА ДЕНЕЖНОЙ НАЛИЧНОСТИ ОТ ЗНАЧЕНИЙ ТРАНСФЕРТНОЙ СТАВКИ

**Габрусевич О.В.**

УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно  
Научный руководитель – Цехан О.Б., к. ф.- м. н., доцент

Рассматривается подразделение банка, которое осуществляет прием и выдачу наличных средств физическим лицам. Заданы прогнозные данные: дневные суммы прихода и расхода денежных средств на горизонт планирования  $T$  (по дням). Для подразделения определено значение максимального лимита, ограничивающее остаток денежных средств, который может находиться в хранилище подразделения на конец дня. При необходимости можно доставлять в подразделение сумму средств, обеспечивающую его работу на несколько дней вперед, если при этом соблюдаются требования по лимиту.

Разработан [1] программный модуль, позволяющий имитировать динамику денежных средств в подразделении и строить графики инкассации с целью минимизации затрат на операции с наличностью. Выявлена зависимость общих затрат (состоящих из операционных, инкассационных затрат и затрат на фондирование) от уровня лимита.

Изучим влияние величины трансфертной ставки (ТС) на показатели процесса.

#### **Зависимость затрат от ТС**

Рост ТС ведет к росту затрат на фондирование, а следовательно, и на общие затраты. Функция зависимости затрат на фондирование является возрастающей, темпы ее роста зависят от значения ТС: чем больше её значение, тем интенсивнее она возрастает.

Результаты расчетов показаны в таблицах 1 – 2 и на рисунках 1.

Таблица 1 – Зависимость общих затрат от значений ТС

Лимит	1	2	5	7	9	11	13	15	17	19	
Общие з-ты при ТС	0,05	28028,0	26025,0	19018,0	15014,7	13012,4	10011,8	9009,4	8008,12	6006,9	5006,3
	0,13	28028,3	26025,0	19018,14	15014,8	13012,5	10011,9	9009,5	8008,2	6007,1	5006,5
	0,2	28028,35	26025,1	19018,7	15014,89	13012,6	10011,3	9009,7	8008,3	6007,2	5006,6
	0,4	28028,51	26025,28	19018,38	15015,09	13012,9	10011,31	9010,01	8008,73	6007,6	5007,1
	0,85	28028,85	26025,62	19018,78	15015,78	13013,4	10011,93	9010,72	8009,5	6008,5	5008,13

Таблица 2 – Зависимость затрат на фондирование от значений ТС

Лимит	1	2	5	7	9	11	13	15	17	19	
з-ты на ф-ние при ТС	0,05	0,037	0,038	0,044	0,05	0,058	0,069	0,078	0,088	0,1	0,11
	0,13	0,09	0,1	0,11	0,13	0,15	0,18	0,2	0,22	0,26	0,28
	0,2	0,151	0,154	0,178	0,201	0,233	0,278	0,312	0,353	0,403	0,443
	0,4	0,304	0,308	0,356	0,403	0,466	0,558	0,624	0,706	0,807	0,887
	0,85	0,645	0,655	0,757	0,858	0,991	1,185	1,32	1,5	1,71	1,88

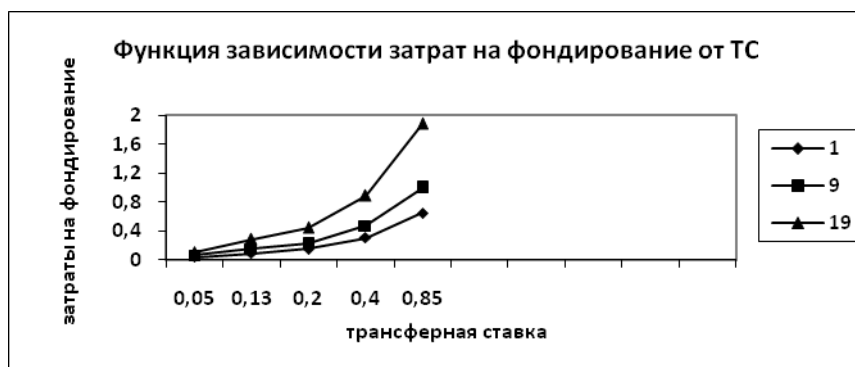


Рисунок 1 – Зависимость функции затрат на фондирование от значений ТС

### Зависимость оптимального лимита от ТС

Случай 1. Прогнозные значения сумм прихода и расхода на горизонт планирования (30 дней) отличаются незначительно (приход: от 1 до 34, среднее 12, расход: от 2 до 25, среднее 11).

Таблица 3 – Зависимость оптимального уровня лимита от значений ТС

трансферная ставка	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
оптимальный уровень лимита	52	51	51	39	38	37	36	35	34

С увеличением трансферной ставки оптимальный уровень лимита уменьшается, но так как с увеличением трансферной ставки увеличиваются общие затраты, то менее затратным будет тот, у которого наименьшая трансферная ставка.

Случай 2. Прогнозные значения суммы прихода больше суммы расхода на горизонт (30 дней) (приход: от 6 до 19, среднее 12, расход: от 1 до 10, среднее 5).

Таблица 4 – Зависимость оптимального уровня лимита от значений ТС

трансферная ставка	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
оптимальный уровень лимита	300	300	10	10	9	8	8	8	8

Скорость изменения оптимального уровня лимита тем больше, чем больше сумма прихода и меньше сумма расхода.

### Зависимость сумм движения наличности от ТС

Случай 1. Данные суммы движения наличности взяты при оптимальном лимите. Оптимальный лимит рассчитан в таблице 3.

Таблица 5 – Зависимость оптимального уровня лимита от значений ТС

Трансферная ставка	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Сумма движение наличности	20,9	21,8	21,8	33,8	34,8	35,8	36,8	37,8	38,8

Сумма движения наличности увеличивается при увеличении трансферной ставки.

Случай 2. Данные суммы движения наличности взяты при оптимальном лимите. Оптимальный лимит рассчитан в таблице 4.

Таблица 6 – Зависимость оптимального уровня лимита от значений ТС

Трансферная ставка	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
Сумма движение наличности	0	0	228	228	229	230	230	230	230

Скорость изменение суммы движения наличности тем больше, чем больше сумма прихода и меньше сумма расхода.

### **Список цитированных источников**

1. Габрусевич, О.В. Программное обеспечение для расчета затрат на инкассацию при разных уровнях лимита [Электронный ресурс] // Современные технологии программирования и методы разработки программ: сб. материалов 2 Международной научно-практической конференции «Технологии информатизации и управления». – Гродно, 2011-1 электрон. опт.диск (CD-ROM).

УДК 372.016:004

## **КОМПЛЕКСЫ СИСТЕМЫ ТЕСТИРОВАНИЯ E-JUDGE**

***Грязных П.А., Дядищев А.О.***

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Силаев Н.В., доцент*

Единообразие и неоперативность традиционных приемов процесса обучения для большинства обучаемых становится тормозящим фактором. Для увеличения интереса и повышения интенсивности необходимо вносить соревновательный элемент в процесс обучения, например, в виде олимпиад и соревнований различных уровней.

Системы тестирования представляют собой весьма сложное программное обеспечение.

Данная система предназначена для автоматизированного тестирования задач по информатике в соответствии с некоторыми заданными требованиями.

Для облегчения разработки и сопровождения он был нами разбит на несколько крупных модулей:

- Основной модуль – модуль-менеджер, который управляет и координирует работу остальных модулей системы. Он осуществляет общее управление, а также позволяет изменять общие настройки;
- Сервис тестирования – позволяет работать комплексу в виде сервиса, что удобно при организации постоянно доступного тестирования;
- Модуль тестирования – модуль, осуществляющий непосредственно собственно процесс тестирования;
- Модуль установки комплекса – модуль-инсталлятор, служащий для установки и первоначальной настройки комплекса;
- Визуальный редактор настроек – модуль, служащий для изменения настроек для конкретной задачи с помощью удобного графического интерфейса;
- Модуль e-Judge Contest – модуль, являющийся удобной оболочкой для работы с комплексом при организации локальных и удаленных студенческих олимпиад;
- Модуль e-Judge Study – модуль, являющийся удобной оболочкой для работы с комплексом при организации лабораторных, коллоквиумов, экзаменов.

Для разработки интерфейса нами используется библиотека Microsoft Foundational Classes (MFC).

Модуль установки комплекса позволяет произвести инсталляцию комплекса на компьютер пользователя и произвести первоначальную настройку. При установке имеется возможность выбора необходимых компонентов.

Модуль e-Judge Study предназначен для облегчения работы преподавателей и для объективной оценки уровня подготовки школьников и студентов.

Преподаватель может гибко настроить модуль с помощью функциональной системы администрирования, которая позволяет изменять практически все параметры.

Интерфейс модуля сделан максимально легким и простым, для того, чтобы у обучаемых не возникло проблем при работе (что негативно сказывается на процессе обучения), чтобы преподаватели не тратили много времени на настройку, а больше времени уделяли непосредственно подготовке самих заданий и тестов к ним. Это также уменьшит нагрузку на сеть, так как не надо передавать лишние данные.

В системе предусмотрены три роли:

- Администратор – полный доступ ко всем настройкам модуля, возможность входа только в систему администрирования;
- Преподаватель – ограниченный доступ к настройкам модуля, возможность входа только в систему администрирования. Создаются и назначаются на группы администраторами;
- Пользователь – этот тип учетной записи используется для учащихся/студентов, доступ только к непосредственно системе тестирования. Учетные записи этого типа могут создаваться как администраторами, так и преподавателями (только в тех группах, которые назначены на них).

Пользователи организованы в группы. Пользователь может состоять сразу в нескольких группах или вообще не состоять ни в одной. Для каждой группы должен быть назначен преподаватель. Преподаватель может быть назначен сразу на несколько групп.

Используется трехуровневая иерархия для организации задач:

- Раздел – для объединения по крупным разделам. У разделов существуют типы, определяемые администратором, что позволяет более логично группировать, а также применять некоторые возможности сразу к большому набору задач;
- Тема – для объединения по сравнительно небольшим темам. Каждая тема входит в определенный раздел;
- Задача – непосредственно сама задача. Каждая задача входит в определенную тему.

Модуль e-Judge Contest предназначен для организации командных студенческих соревнований по программированию. Отличительные особенности таких соревнований – результаты тестирования в режиме реального времени, постоянная сортировка участников по рейтингу, «заморозка» результатов за определенное время до окончания соревнований. Система тестирования e-Judge позволяет организовывать такие соревнования, а данный модуль предоставляет удобный интерфейс, как организаторам, так и участникам.

УДК 004

## **ПРОБЛЕМЫ ИНДЕКСИРОВАНИЯ ДИНАМИЧЕСКОГО КОНТЕНТА ПОПУЛЯРНЫМИ ПОИСКОВЫМИ СИСТЕМАМИ**

***Данилевич Е.В., Крупская Е.И.***

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест*

В данной статье нами рассматривается возможность индексации динамического контента в двух наиболее популярных в русскоязычном сегменте Интернета поисковых системах Google и Яндекс [1].

Под динамическим контентом будем понимать такие компоненты сайта, как аудио-, видеофайлы, а также те, для создания которых использовали JavaScript, Flash, Silverlight.

При индексации робот поисковой машины добавляет сведения о сайте в базу данных, которая в дальнейшем используется для поиска информации на проиндексированных сайтах.

И в Яндексе и в Google поисковый робот получает список URL, которые он может проиндексировать, на основе результатов предыдущих сеансов сканирования, а также из файла Sitemap, предоставленного веб-мастером. Из данного файла поисковый робот берет информацию о структуре сайта. Его наличие полезно, если на сайте присутствует динамический контент, который не полностью индексируется поисковыми системами.

Google руководствуется протоколом Sitemap 0.9 согласно определению sitemaps.org. Яндекс поддерживает файлы Sitemap в формате XML и как текстовые файлы. Предпочтительнее является формат XML, так как он позволяет предоставить дополнительную информацию о страницах сайта.

Как Google, так и Яндекс индексируют не только HTML документы. Поисковый робот Яндекса индексирует документы следующих типов: PDF, Flash; doc/docx, xls/xlsx, ppt/pptx; ods, odp, odt, odg; rtf, txt. В PDF документах индексируется только текстовое содержимое. Во Flash документах индексируется текст, который размещен в блоках: DefineText, DefineText2, DefineEditText, Metadata. Ссылки индексируются, если они размещены в блоках: DoAction, DefineButton, DefineButton2. Документы более 10 Мб не индексируются [2].

Google индексирует содержимое следующих типов файлов: swf, pdf, ps, dwf, kml, kmz, gpx, hwp, xls, xlsx, ppt, pptx, doc, docx, odp, ods, odt, rtf, wri, svg, txt, tex; в том числе исходный код стандартных языков программирования: Basic (.bas), C/C++ (.c, .cc, .cpp, .cxx, .h, .hpp), C# (.cs), Java (.java), Perl (.pl), Python (.py), язык разметки для беспроводных устройств (.wml, .wap), XML (.xml) [3].

Все поисковые системы работают в основном с текстом. Если на сайте кроме текстовой информации присутствуют изображения, видео, аудио, Flash или Silverlight, то содержание таких файлов должно быть также представлено в текстовом формате. Таким образом, оно становится доступным для поисковых систем.

Так же как и робот Яндекса, Googlebot индексирует текст в Flash-файлах. Он распознает URL в SWF-файлах и переходит по ним. Если в SWF-файл загружается содержание из другого файла, поисковый робот также индексирует это внешнее содержание. Google не поддерживает индексирование Flash-файлов с содержанием на иврите и арабском.

Файлы в формате Silverlight не индексируются ни Google, ни Яндекс. Также не индексируется содержание аудио- и видеофайлов. Google не индексирует Flash, если он загружается при помощи JavaScript.

Таким образом, чтобы сайт был проиндексирован поисковым роботом, для размещения содержания и создания средств навигации, рекомендуется использовать HTML. Если на сайте присутствуют динамические компоненты, целесообразно предоставить текстовые версии страниц.

Для предоставления текстовой информации можно воспользоваться технологией sIFR (Scalable Inman Flash Replacement), которая позволяет заменять текстовые элементы их аналогами в формате Flash. При этом содержание и элементы навигации отображаются посредством встроенного Flash-объекта. Так как содержимое заключено в HTML-источнике, оно становится доступным для поисковых систем.



Также повысить качество индексирования динамических компонентов сайта можно за счет поддержки схемы сканирования AJAX от Google. Эта схема рассчитана на JavaScript, но работает также для Flash и любой другой технологии на стороне браузера.

**Список цитированных источников**

1. liveinternet @ Статистика, дневники, одноклассники, почта, знакомства, маркет [Электронный ресурс] / Статистика сайта «Сайты Рунета». – 2011. – Режим доступа: <http://www.liveinternet.ru/stat/ru/searches.html?period=month> – Дата доступа: 22.10.2011.
2. Яндекс помощь [Электронный ресурс] / Особенности индексирования документов. – Режим доступа: <http://help.yandex.ru/webmaster/?id=1111857> – Дата доступа: 22.10.2011.
3. Справка Google - Инструменты для веб-мастеров [Электрон. ресурс] / Какие типы файлов может индексировать Google? – Режим доступа: <http://www.google.com/support/webmasters/bin/answer.py?answer=35287> – Дата доступа: 22.10.2011.

УДК 004.91+347.78.031

**РАЗРАБОТКА ИНТЕРНЕТ-ПОРТАЛА, ПОДДЕРЖИВАЮЩЕГО НАУЧНЫЕ,  
КОММУНИКАЦИОННЫЕ И ОРГАНИЗАЦИОННЫЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ**

***Жавнерко Е.В., Барановский А.Т.***

*УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно  
Научный руководитель – Рудикова Л.В., к. ф.- м. н., доцент*

В настоящее время под влиянием интенсивного внедрения новых информационно-коммуникационных технологий и стремительного развития Интернет-технологий система взаимодействия радикально меняет свою структуру, появляются новые виды и формы, формируется он-лайн-овое пространство различных видов взаимодействия. Все это способствовало созданию и предоставлению пользователям различных сервисов, работающих в рамках одного веб-сайта, или Интернет-портала. Интернет-портал – это особый вид сайта, предоставляющий пользователю различные интерактивные сервисы, такие, как почта, поиск, погода, форумы, обсуждения, голосования и другие. В контексте разрабатываемого Интернет-портала кроме перечисленных выше сервисов пользователям должны быть доступны также сервисы для организации и проведения различных видов конференций (научные, образовательные и др.), новости из различных областей знаний, он-лайн-общение, календари, хранение и редактирование материалов, возможность обмена ими и др. Естественно, что в предлагаемой системе предусмотрена возможность одновременной работы со всеми сервисами, доступными пользователю. Таким образом, конечный пользователь портала получает возможность выбора именно тех служб, которые ему необходимы.

В основу разрабатываемого портала положена модульная структура, что в дальнейшем позволит наращивать функционал системы, используя различные дополнения (модули). Преимущества таких дополнений очевидны: они имеют общую платформу, что позволяет организовать взаимодействие модулей между собой, в случае сбоя работы одного модуля, вся система продолжает функционировать, легко организовать необходимые коммуникации [1].

Изначально, при работе с Интернет-порталом, пользователям доступен стандартный набор Интернет-приложений (модулей), которые, в свою очередь, поддерживают основные возможности портала: организация и проведение конференций, электронная почта, чат, хранение материалов, поиск, форум, новости, календари. В дальнейшем функционал портала предполагается расширить и добавить модули специфического назначения.

Перечислим основные модули системы.

*Организация и проведение конференций.* Данный модуль поддерживает процесс организации конференций и будет расширен до единой системы управления научными и образовательными конференциями. Модуль поддерживает все необходимые функции: создание конференции, регистрация участников, получение и обработка материалов, анализ результатов проведения конференции и т.д. [2].

*Информационная система.* Поддерживает новостную сторону, связанную с проведением различных конференций и форумов научной тематики. Отметим, что новостные статьи имеют исключительно ту тематику, которую выбрал для себя пользователь. Статьи собираются путем «сканирования» сети Интернета, обрабатываются и предоставляются пользователю. Для каждой статьи предусмотрена возможность обсуждения пользователями портала. В случае необходимости, пользователь может выполнить поиск по ключевым словам, отфильтровать статьи. Имеется возможность делиться информацией с другими пользователями, путем добавления отдельной статьи. На данном этапе можно проследить некоторое взаимодействие модулей информационной системы с системой обмена информацией.

*Система обмена информацией.* В нее включается электронная почта, чат, форум и, при необходимости, он-лайн-овое проведение конференций. В системе реализовано два типа чата.

1. Чат между двумя пользователями – стандартный способ общения, при котором только два пользователя обмениваются сообщениями между собой.

2. Чат группы пользователей – сообщениями обмениваются три или более пользователей, право на добавление новых собеседников имеется у любого участника чата.

Форум – класс веб-приложений для организации общения посетителей веб-сайта. Форум предлагает набор разделов для обсуждения. Работа форума заключается в создании пользователями тем в разделах и последующим обсуждением внутри этих тем.

В настоящее время все эти сервисы плотно вошли в повседневную жизнь. Все больше и больше пользователей используют их ежедневно, в силу чего трудностей работы с предлагаемой системой обмена информацией в рамках разрабатываемого Интернет-портала, как правило, не возникнет.

*Центр поддержки пользователей.* Центр поддержки пользователей обеспечивает возможность двухстороннего общения с пользователями приложений портала, анализ пользовательских предпочтений, исправление проявившихся ошибок или недостоверностей. Предлагаемый модуль организован в достаточно простой для восприятия и использования форме. Воспользовавшись центром поддержки, пользователь может отправить на рассмотрение свой вопрос, замечание или предложение. После этого ответственные за определенные типы обращений люди принимаются за решение возникших вопросов.

*Хранение и работа с документами.* Сервис, представляющий собой оболочку для работы с определенными типами документов в режиме он-лайн. Данный вид сервисов активно развивается в настоящее время, так как это дает возможность работать с документами в любом месте, где есть возможность выхода в Интернет. Здесь также наблюдается интеграция с модулем конференции.

*Дополнительные модули.* В качестве дополнительных модулей могут выступать своеобразные календари, электронные записные книжки, виртуальные библиотеки, веб-альбомы, он-лайн-игры и др.

Таким образом, предлагаемый Интернет-портал представляет собой совокупность веб-приложений и сервисов, предназначенных для различных целей. Он может исполь-

зоваться для организации конференций, общения, работы с документами, обсуждения, развлечения. Кроме того, благодаря взаимодействию приложений (рис. 1), работа с Интернет-порталом становится достаточно простой, к тому же она предлагает пользователю гибкую настройку рабочего пространства.

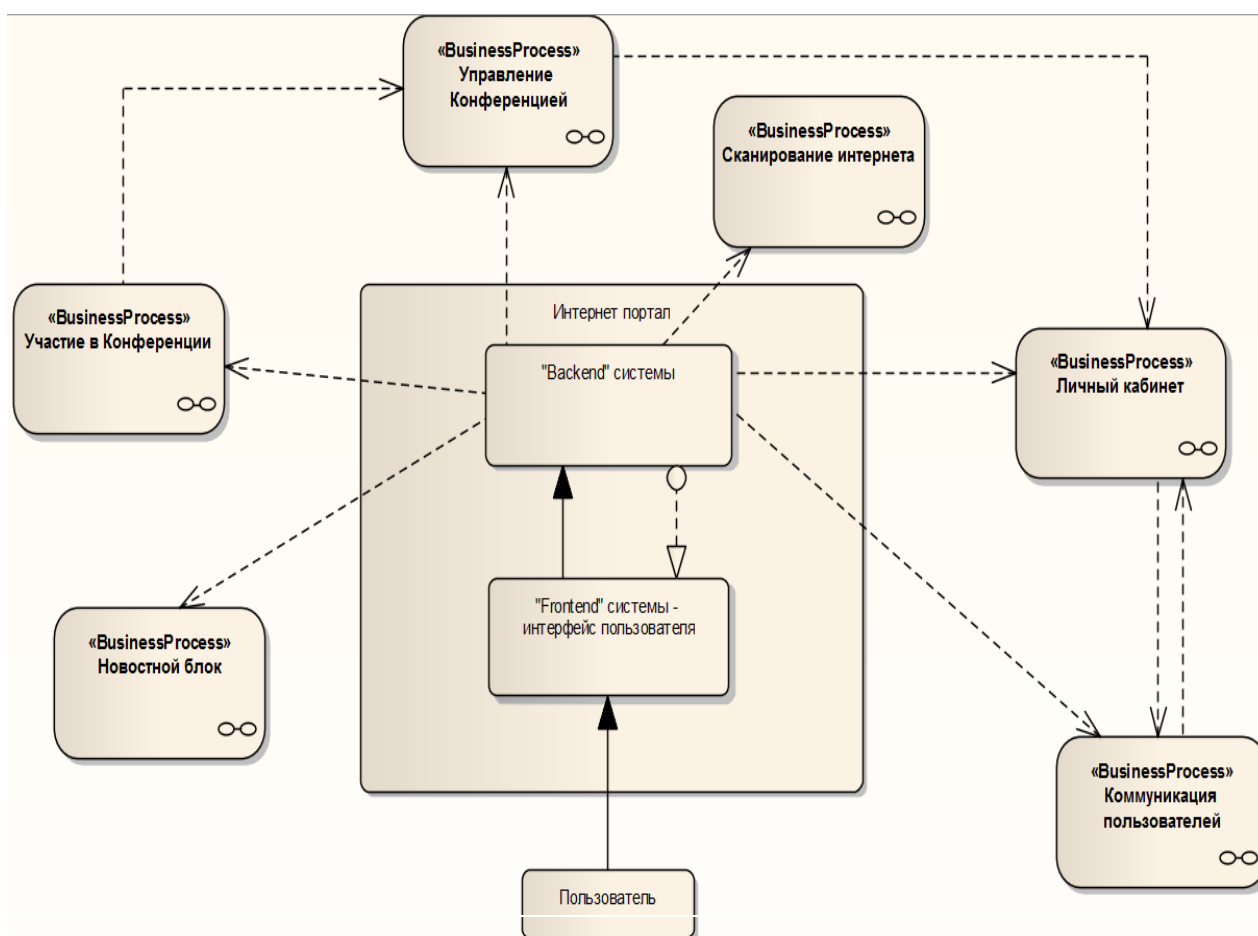


Рисунок 1 – Схема модулей Интернет-портала

#### Список цитированных источников

1. Фаулер, М. Архитектура корпоративных программных приложений / М. Фаулер. – М.: Вильямс, 2007. – 544 с.
2. Организация научной конференции [Электронный ресурс]. – Режим доступа: <http://www.arendazala.by/news.asp?id=1265>. – Дата доступа: 15.10.2011.

УДК 004.4

## МОДЕЛИ СИГНАЛОВ И ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УСТРОЙСТВ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ СИСТЕМ ОБРАБОТКИ ДАННЫХ

**Запотьлок А.Ф.**

УО “Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники”, г. Минск

Научный руководитель – Бранцевич П.Ю., к.т.н., доцент

Современные системы вибрационного контроля, диагностики, испытаний представляют собой аппаратно-программные комплексы, в которых функциональные возможно-

сти во многом определяются реализованным программным обеспечением. Программное обеспечение таких систем должно обеспечивать реализацию достаточно сложных алгоритмов обработки данных и взаимодействия с внешними устройствами и объектами. Очевидно, что отладка, проверка работоспособности, точностных и функциональных параметров разработанных программных средств требует взаимодействия с реальными объектами. Однако это требует значительных финансовых и временных затрат и не всегда возможно в силу определенных технологических условий. В связи с этим представляется целесообразной разработка системы моделирования сигналов, устройств, объектов, с которыми должно взаимодействовать разрабатываемое изделие, и с ее помощью осуществлять разработку и отладку проектируемых программных средств. В данном докладе рассматриваются типовые методы моделирования некоторых устройств и способы отображения и управления их характеристиками с использованием современных технологий построения пользовательского интерфейса.

Для простоты разработки была выбрана постоянно развивающаяся и популярная платформа Microsoft .NET Framework. Для проектирования пользовательского интерфейса была выбрана наиболее актуальная и развивающаяся технология WPF (Windows Presentation Foundation). Для данной платформы имеется множество доступных и бесплатных библиотек для качественной и современной разработки пользовательского интерфейса. При этом она остается простой и понятной для разработчика.

Основной целью проектирования данного программного обеспечения является создание системы моделирования сложных математических систем в виде совокупности абстрактных блоков, соединённых схематическими линиями, обозначающими направление потока данных. Фактически, каждый блок представляет собой математическую функцию, имеющую,  $N$  входных и  $M$  выходных параметров. При этом пользователь имеет возможность реализовать некоторые математические модели с помощью встраиваемого языка IronPython и дополнительных предопределённых математических функций, реализованных на нём. Ожидается, что данная абстракция должна максимизировать расширяемость программного средства и расширить круг специализации, что немаловажный финансовый фактор, который нельзя упускать из виду. Стоит отметить, что улучшение данных показателей достигается за счёт техники ООП (виртуальные методы, абстрактные интерфейсы, базовые классы) и шаблонов проектирования. Некоторую часть данной абстракции покрывает популярный шаблон проектирования «Модель-представление-поведение» (МПП).

Планируется практически продемонстрировать программное средство в работе на примере моделирования системы из простейших аналоговых и цифро-аналоговых устройств, применяемых в схемотехнике.

В настоящее время ведётся разработка описанного программного средства. Ожидается, что предлагаемый подход отображения и управления моделями устройств предоставит пользователям возможности удобного построения моделей и анализа их характеристик, что поспособствует более быстрому обучению принципам их работы, а также принятию технических решений.

#### **Список цитированных источников**

1. Рихтер, Дж. Программирование на платформе Microsoft .NET Framework, "Русская редакция", 2003. – 356-545 с.
2. Математическое моделирование технических систем: учеб. для вузов. – Мн.: ДизайнПРО, 1997. – 640 с.:ил.

УДК 681.3

## **ФОРМУЛИРОВАНИЕ ТРЕБОВАНИЙ НА СОЗДАНИЕ СРЕДСТВ АВТОМАТИЗАЦИИ УПРАВЛЕНИЯ ПЕРЕВОЗКАМИ ГРУЗОВ**

***Кисель Н.В., Кисло Д.А.***

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научный руководитель – Хвещук В.И., к.т.н., доцент*

Методологической основой для разработки автоматизированных систем (АС) является системная инженерия и стандарты, регламентирующие эту деятельность [1-3]. Одним из важных этапов в этой деятельности является формулирование требований на создание АС, который определяет весь процесс ее создания, внедрения и использования. В качестве объекта для автоматизации (ОА) рассмотрено предприятие по перевозке грузов, а методология для создания АС – системная инженерия. В работе представлены результаты применения методов системной инженерии при изучении, формализации ОА, разработке концепции АС и формулировании требований на создание системы в виде технического задания (ТЗ).

**Разработка модели деятельности предприятия.** Использован процессный подход к описанию деятельности предприятия. Отдельный процесс описывается как определенная совокупность операций, которые выполняются над объектами. Выделены следующие объекты: груз, маршрут, заказ, водитель, трак, прицеп, отправитель, получатель и перевозчик. Каждый объект имеет набор состояний и определяется набором атрибутов. Выполнение отдельной операции реализует перевод объекта из одного состояния в другое.

Модель деятельности предприятия представлена как совокупность параллельных процессов, взаимодействующих через общую базу данных. Выделены следующие процессы, каждый из которых закреплен за определенной категорией сотрудников:

- поиск и прием заказов на перевозки грузов – приемщик заказов на перевозку грузов;
- динамическое планирование выполнения заказов на перевозку – планировщик перевозок грузов;
- динамическое управление процессом выполнения перевозок – диспетчер перевозок грузов.

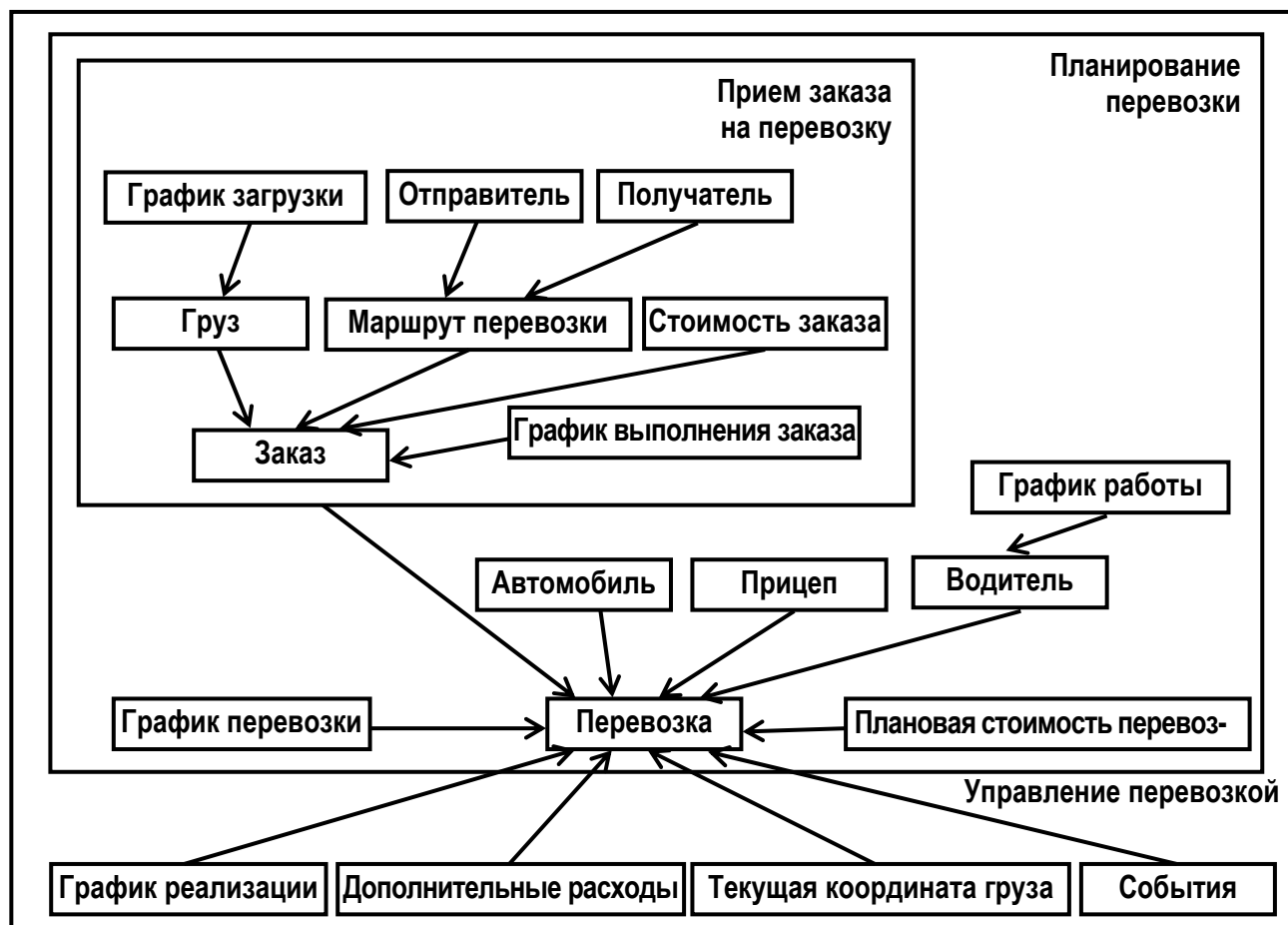
Для каждого из процессов определен набор типовых операций. Для процесса «прием заказов» определены следующие операции: прием заказа (груз + маршрут) на перевозку груза от клиента (отправителя) клиенту (получателю), формирование списка заказов на перевозку грузов предприятием.

Процесс «планирования перевозок» обеспечивает распределение заказов (груз + маршрут) между водителями (водитель + трак + прицеп) и включение их в список запланированных перевозок. Примерный перечень операций для данного процесса следующий: оценка стоимости перевозки груза; поиск свободных водителей; учет рейтинга водителей; поиск свободных траков; поиск свободных прицепов; оценка длины маршрута перевозки; планирование и закрепление за перевозкой (перевозками) – водителя, авто, прицепа, груза (грузов); совмещение перевозок; поиск промежуточных грузов.

Процесс «диспетчеризация перевозок» ориентирован на управление процессом перевозки грузов. Примерный перечень операций следующий: запуск перевозки на выполнение (перевод заказа из списка запланированных в список выполняемых); завершение

перевозки (перевод заказа из списка выполняемых в список выполненных заказов); управление перевозками (изменение стоимости перевозки, изменение времени доставки, замена автомобиля и/или прицепа, организация перегрузки грузов, продолжение перевозки); определение местоположения водителей, траков, прицепов; обмен информацией с водителями, клиентами и другие операции.

**Разработка структуры базы данных (БД).** На основе результатов формализации деятельности предприятия разработана концептуальная модель БД (см. рис. 1).



*Рисунок 1 – Концептуальная модель структуры БД*

КМ БД представлена как многоуровневая структура в виде набора сущностей и связей между ними. Для каждой сущности определены атрибуты.

**Разработка концепции АС.** В качестве основы для построения структуры АС использована клиент-серверная архитектура. Обобщенная структурная схема системы изображена на рисунке 2. В состав системы входят приложения («Поиск и прием заказов», «Планирование перевозок», «Управление перевозками») и база данных. Взаимодействие между предложениями осуществляется через БД. Каждое из приложений ориентировано на определенный класс пользователей.

**Разработка технического задания на создание АС.** Результаты разработки требований на создание АС для предприятия по перевозке грузов представлены в виде ТЗ [3]. ТЗ состоит из следующих разделов: общие требования к системе, требования к структуре и функционированию системы, требования к видам обеспечения системы (программному, информационному и техническому) и другие требования к процессу создания и ввода системы в действие.

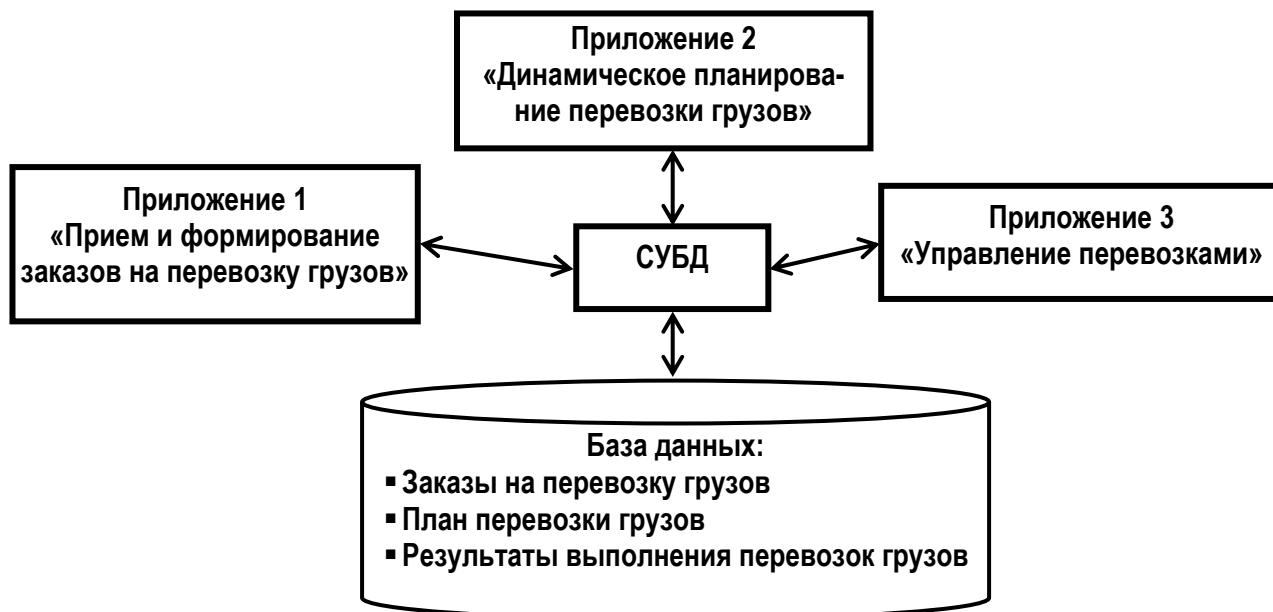


Рисунок 2 – Структурная схема системы

**Выводы.** Рассмотрены результаты применения методов системной инженерии при формулировании требований на разработку АС для предприятия по перевозке грузов. Результаты представлены в виде технического задания на создание системы. Разработана процессная модель деятельности предприятия, концептуальная модель структуры БД и концепция системы, являющиеся основой для формулирования требований к АС. Представленные результаты предполагается использовать при реализации компонентов рассмотренной АС.

**Список цитированных источников**

1. Системное проектирование. Процессы жизненного цикла систем: ИСО/МЭК 15288-2008.
2. Информационные технологии. Автоматизированные системы. Стадии создания: ГОСТ 34.601-90.
3. Информационные технологии. Техническое задание на создание автоматизированной системы: ГОСТ 34.602-90.

УДК 512:004

**ИНФОРМАЦИОННЫЕ КОРПОРАТИВНЫЕ СИСТЕМЫ**

*Касперович Ю.А.*

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест*

Информационная управляющая система (IMS, Information Management System) – комплекс математических методов, аппаратных, программных и организационных средств, обеспечивающий рациональное управление сложным объектом или процессом в соответствии с заданной целью.

Основное преимущество информационных корпоративных систем состоит в том, что они позволяют осуществлять управление полным операционным циклом компании, охватывающим фазы планирования, исполнения, контроля и анализа всей деятельности.

При построении корпоративной информационной системы (КИС) необходимо учитывать ряд важных факторов. Так, например, распространенной ошибкой многих компаний

является то, что сначала производится внедрение ERP системы, а затем компании оказываются перед фактом, что инфраструктура не готова для обслуживания этой системы. И именно от того, как построена ИТ-инфраструктура, насколько она надёжна и производительна, будет зависеть работа всех остальных приложений, ERP систем, баз данных, а как следствие, и бизнеса в целом.

Примеры КИС:

- ERP – системы планирования ресурсов предприятия;
- CRM – системы управления взаимоотношениями с клиентами;
- EIS – информационные системы для руководителей;
- MES – системы оперативного (цехового) управления производством/ремонтами;
- WMS – системы управления складами;
- SCM – системы управления цепочками поставок;
- HRM – системы управления персоналом;
- BPMS – системы управления бизнес-процессами;
- OLAP – система формирования отчетов;
- EAM – система управления фондами и активами предприятия;
- СЭД – система электронного документооборота;
- ECM – система управления контентом предприятия.

ERP-система (Enterprise Resource Planning System, система планирования (управления) ресурсами предприятия) – корпоративная информационная система, предназначенная для автоматизации учёта и управления.

ERP-системы строятся по модульному принципу, в той или иной степени охватывая все ключевые процессы деятельности компании.

Главная задача ERP-систем – создание единого информационного хранилища данных, обеспечивающего одновременный доступ к ней любого необходимого количества сотрудников предприятия, наделённых соответствующими полномочиями; содержащего необходимую информацию о предприятии, взаимосвязях его отделов, предоставляемых услугах, производимой продукции, работе всех служб и т.д.

Функции ERP-систем:

- ведение конструкторских и технологических спецификаций на всю номенклатуру изделий и услуг, материальные ресурсы и операции, необходимые для их производства;
- формирование планов производства и продаж;
- планирование потребностей в материалах и комплектующих, сроков и объёмов поставок;
- ведение договоров, управление запасами и закупками;
- планирование производственных мощностей;
- оперативное управление финансами, включая финансовый и управленческий учёт;
- управления проектами, включая планирование этапов и ресурсов.

**Особенности внедрения ERP-систем:**

ERP-системы относятся к категории «тяжёлых» программных продуктов, требующих достаточно длительной настройки, для того чтобы начать ими пользоваться.

ERP-системы строятся по модульному принципу и в ходе внедрения проектная команда в течение нескольких месяцев осуществляет настройку поставляемых модулей.



### **Достоинства ERP-систем:**

ERP-системы позволяют эффективно и единообразно управлять обработкой, логистикой, дистрибуцией, запасами, доставкой, выставлением счетов-фактур и бухгалтерским учётом.

ERP-системы в связке с CRM-системой и системой контроля качества позволяют максимально удовлетворить потребности компании в средствах управления бизнесом. ERP-система являет собой виртуальную модель компании.

### **Ограничения ERP-систем:**

- небольшие компании не могут позволить себе инвестировать достаточно денег в ERP и адекватно обучить всех сотрудников;
- внедрение является достаточно дорогим;
- эффективность всей системы может быть нарушена одним партнёром;
- проблема совместимости с прежними системами.

### **Перспективы ERP-систем.**

Развитие интернет-технологий привело к появлению ERP-систем, распространяемых на принципах On-demand (по требованию). Эта модель распространения позволяет снять или значительно уменьшить ряд перечисленных ниже ограничений.

Первой системой ERP такого рода стала NetSuite.

NetSuite – это ежегодный платеж за аренду системы, который покрывает не только стоимость использования системы, но и весь спектр сопутствующих услуг: автоматическое обновление, резервное копирование данных в онлайн-режиме, дублирование данных на уровне серверов и дата-центров, гарантии по восстановлению вышедшего из строя оборудования в течение 5-20 минут и т.д.

NetSuite располагается не на оборудовании клиента, а в специализированном дата-центре, доступ к ней возможен только через Web-браузер, и у заказчика отсутствуют начальные затраты на развертывание системы – не нужны сервера и сопутствующее оборудование, не нужны лицензии на СУБД, отсутствует необходимость в дополнительных IT-специалистах, поддерживающих все это оборудование в рабочем состоянии. Требования к компьютерам пользователей также отсутствуют – любая операционная система, позволяющая запускать один из вышеназванных браузеров, и любой компьютер.

**SAP R/3** (интегрированная автоматизированная система управления, ориентированная на предприятия с персоналом более 300 человек). **R (Real-time)** означает немедленную проводку и актуализацию данных, которые в рамках Интеграции немедленно доступны всем заинтересованным отделам предприятия. Цифра **3** означает, что в системе реализована трёхзвенная модель «архитектура клиент/сервер приложений/СУБД».

Использование информационных корпоративных систем предполагает:

- ориентацию на пользователя,
- ориентацию на Web,
- ориентацию на услуги и использование новых моделей доставки программ, к которым относятся направление cloud computing,
- модель SaaS (программное обеспечение как сервис).

Эффективное использование корпоративных информационных систем позволяет делать более точные прогнозы и избегать возможных ошибок в управлении.

Информационные системы позволяют извлекать максимум пользы из всей имеющейся в компании информации, из любых данных и отчетов о ее работе.

УДК 004.91+347.78.031

## **О ВОЗМОЖНОСТЯХ API МОДУЛЕЙ ИНТЕРНЕТ-ПОРТАЛА ПРИ РАЗРАБОТКЕ КЛИЕНТСКОГО ПРИЛОЖЕНИЯ**

***Клышевич В.С.***

*УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно  
Научный руководитель – Рудикова Л.В., к. ф.- м. н., доцент*

API (Application programming interface) – это определенный набор правил и спецификаций, с помощью которых программное обеспечение может общаться друг с другом. API служит интерфейсом между различными программами и облегчает их взаимодействие, аналогично тому, как пользовательский интерфейс облегчает взаимодействие между людьми и компьютерами [1].

Современное требование для Интернет-портала – это инфраструктура программных интерфейсов, которая должна пронизывать абсолютно все модули системы. Все модули системы в обязательном порядке должны обеспечивать коммуникации всех сервисов строго через внутренние интерфейсы, построенные на общем ядре, при этом сами интерфейсы должны быть открыты наружу.

Понятие модульности в предлагаемом Интернет-портале подразумевает в себе возможность разработки отдельных Интернет-приложений в виде своеобразных дополнений (модулей). Преимущество таких дополнений заключается в том, что, являясь по сути отдельными Интернет-сайтами, данные приложения имеют общую платформу (причем, не одинаковую, а именно общую – одну на всех), что позволяет организовать взаимодействие имеющихся приложений между собой, использование общих ресурсов, обработку одинаковых данных для решения задач, поставленных в соответствии со спецификой конкретного приложения. Более того, модульная структура позволяет намного упростить процесс разработки и добавления новых дополнительных модулей (за счет выделения определенных общих для всех приложений частей) и использования функционала одних модулей другими.

Универсальная платформа, разрабатываемая автором, предлагает следующие возможности:

- автоматическая генерация API в виде JSON или XML для всего функционала отдельного модуля;
- возможность скрывать отдельные разделы API на уровне бизнес-объектов с помощью Java аннотаций;
- автоматическая генерация клиентов к API на разных языках программирования в виде библиотек, готовых для интеграции под разные платформы;
- автоматическая генерация документации к API посредством комментариев.

Преимущества предлагаемого подхода:

- модуль разрабатывается один раз;
- одновременная разработка клиентов к модулю (Web, Android, iOS, Google Chrome [2], Safari);
- легкость интеграции с другими модулями;
- расширяемость за счет сторонних разработчиков.

Следует отметить также, что финальный модуль Интернет-портала должен представлять собой в первую очередь программный интерфейс с открытым API. Пользователь-

ский интерфейс к такому модулю разрабатывается как HTML клиент к API. Вся работа с API реализуется на уровне JavaScript. Именно по такому принципу создана текущая версия Twitter. Такой подход к реализации платформы дает, практически, неограниченные возможности как по интеграции, так и по расширяемости продуктов.

#### **Список цитированных источников**

1. Application programming interface [Electronic resource] – Mode of access: [http://en.wikipedia.org/wiki/Application\\_programming\\_interface](http://en.wikipedia.org/wiki/Application_programming_interface). – Date of access: 17.10.2011.
2. Google+ – лучший пример, что Google не понимает Платформу [Электронный ресурс]. – Mode of access: <http://habrahabr.ru/blogs/google/130332/>. – Date of access: 17.10.2011.

УДК 004.5

### **ХЗМ.CMS СРЕДА РАЗРАБОТКИ САЙТА WWW.RFE.BY**

***Ковалев С.Г., Бобров Д.В., Петров П.В., Кольчевский Н.Н.***  
*УО «Белорусский государственный университет», г. Брест*

Наличие информационного ресурса у какого-либо учреждения в сети Интернет позволяет получить исчерпывающую информацию о деятельности и об услугах, предоставляемых этим учреждением. Например, в настоящее время Белорусский государственный университет занимает 1208-е место из 12 тысяч университетов в Мировом веб-метрическом рейтинге университетов ("Webometrics Ranking of World Universities"). Развитие информационной составляющей университета делает образование современным, университет известным, престижным и узнаваемым.

С развитием информационных технологий стали появляться платформы разработки информационных ресурсов. Разработанные платформы позволяют создавать разнообразные продукты, оптимизировать и упрощать процесс создания веб-сайтов. С начала 2000-х годов стали появляться разнообразные системы управления и стал использоваться термин CMS. Система управления контентом (CMS) – это автоматизированный редакторский комплекс, позволяющий управлять содержанием и структурой Интернет-ресурса в режиме on-line. На практике это означает, что даже незнакомый с информационными технологиями пользователь может управлять содержанием своего сайта, не прибегая к услугам технического специалиста. Эволюция CMS происходит достаточно быстро, и это в первую очередь связано с появлением новых течений и стандартов, например, появление методики AJAX на текущий момент дает возможность представить интерфейс CMS практически неотличимым по интерактивности от обычных desktop-приложений. Выбор CMS под конкретный Интернет-сайт вопрос нелегкий, но решаемый.

Задачи исследовательской и практической работы по организации работы сайта [www.rfe.by](http://www.rfe.by) были следующими:

- Разработать программный продукт (веб-сайт), соответствующий международным стандартам w3c;
- Обеспечить устойчивую работоспособность проекта согласно предъявленным требованиям к аспектам безопасности.

Сайт факультета Радиофизики и Компьютерных технологий был разработан в октябре 2010 года с использованием первой белорусской коммерческой коробочной системы управления сайтом `x3m.cms` компании Abiatec.

Сайт состоит из семи основных разделов, в которых имеются подразделы. Выпадающее меню со ссылками на подразделы, разворачивающееся меню на внутренних страницах, а также счетчик дней, реализованы с помощью JavaScript-фреймворка jQuery [1], доработанного в соответствии с проектом. Ротация фотографий в верхней части сайта реализована на технологии Flash. Блок приветствия является «статичным» текстом, который был создан с помощью модуля «Статьи» системы x3m.cms. Эффект разворачивания изображений фотогалереи сделан с помощью jQuery плагина lightbox. На стороне сервера были проведены многочисленные работы по оптимизации сайта, что позволило увеличить скорость загрузки страниц по сравнению с неоптимизированной версией на 70%.

При открытии сайта через устаревший браузер, такой как Internet Explorer 6 версии, появляется предупреждение о том, что этот браузер является небезопасным для использования с учетом современных технологий, и предлагается обновить версию или загрузить браузер другой компании. Компания Microsoft, которая является разработчиком браузера Internet Explorer, официально признала, что используя браузер устаревшей версии, имеется высокий риск заражения компьютера вредоносными программами через известные ошибки в браузере. Microsoft запустила проект [www.theie6countdown.com](http://www.theie6countdown.com), на котором отображается статистика по использованию устаревшего браузера, а также проводит мероприятия по предотвращению использования данного браузера.

Система управления сайтом x3m.cms предназначена для создания интернет-проектов любой сложности. В основу административной части системы положен принцип асинхронного взаимодействия с пользователем (AJAX), x3m.cms работает в браузере как обычное desktop-приложение. Используя данный принцип, пользователи быстро привыкают к простому интерфейсу системы. Кроме того, значительно увеличивается скорость работы с сайтом. Таким образом, система не требует каких-либо специальных навыков от конечного пользователя – необходимым минимумом знаний является работа с программным пакетом Microsoft Office и работа с проводником Windows.

Преимуществами x3m.cms являются высокая надежность, скорость и модульная структура.

Безопасность является одним из самых важных аспектов работы любой системы управления. Одной из первостепенных задач для владельцев веб-проектов является качественная и надежная защита от хакерских атак, взлома и кражи хранящейся на сайте информации. В системе x3m.cms реализуется целый комплекс защитных мероприятий для сайта и сторонних приложений. Разработчики гарантируют работоспособность сайта даже при попытке взлома. Используемые при разработке стандарты кодирования и архитектура исключают появление таких уязвимостей, как: SQL-injection или cross-site scripting. Высокая надежность осуществляется и на уровне управления сайтом:

- Сквозная система авторизации. Аутентификация пользователей и администраторов осуществляется через единую систему авторизации. А система разграничения пользователей осуществляется по логину и паролю, который хранится в зашифрованном виде. Также существует возможность подключения защищенного соединения с использованием SSL-сертификатов.

- Система разграничения доступа. Многоуровневая система разграничения доступа позволяет ограничить доступ по целому ряду признаков: по доступу к сайту, по доступу к модулю (на чтение, редактирование, публикацию, удаление), по страницам на сайте, а также по конкретной информации, находящейся в каждом модуле.

– Система диагностики ошибок. Система фиксирует все ошибки, которые возникают на сайте, что позволяет администраторам вовремя реагировать на возникающие проблемы в системе или на попытку взлома.

– Журнал операций. Все операции администраторов системы фиксируются. Ведение журнала позволяет анализировать информацию о работе сотрудников по наполнению сайта информацией. Специальные фильтры позволяют эффективно оценить работу администраторов по необходимым параметрам.

По всем базовым показателям скорость работы системы x3m.cms превосходит большинство существующих аналогов. В основе управления системой заложен механизм AJAX. AJAX. По сути, это идея фонового взаимодействия веб-страницы с удаленным сервером через специальную компоненту, встроенную в ваш браузер.

x3m.cms построена на модульной архитектуре и состоит из ядра и 20 различных модулей, количество и функциональность модулей постоянно растет. Данная архитектура позволяет гибко подстраиваться под задачи любого проекта, обеспечивая надежный и доступный интерфейс управления. Общий принцип работы системы заключается в следующем: при совершении какой-либо операции браузер формирует запрос, который преобразуется с помощью слоя JavaScript API системы в формат JSON. Далее запрос в этом формате поступает на обработчик JSON формата, который разбирает данный запрос и составляет очередность выполняемых операций с учетом приоритета исполнения. Далее происходит вызов соответствующих модулей и выполнение функционала согласно имеющимся данным и происходит обработка запросов, которые в дальнейшем будут находиться в кэше браузера. На этом этапе происходит взаимодействие между базой данных MySQL и файловой системой сервера. Затем формируется объект в формате JSON, в котором будут находиться возвращаемые данные после выполнения модулей и происходит сжатие данных с помощью gzip – утилита сжатия и восстановления файлов, использующая алгоритм DEFLATE. После сжатия объект приходит клиенту, и в браузере видим результат выполнения операции.

Немаловажной составляющей информационных ресурсов является дальнейшее их развитие и продвижение в сетях Internet. Инструмент Google Analytics позволяет получать статистику о посещениях сайта. Принцип работы такого инструмента прост и состоит в следующем: на сайте размещается код, предоставляемый данным инструментом, в котором имеется уникальный идентификатор ресурса. После проверки системой наличия данного кода на страницах сайта система начинает собирать данные о пользователях, посещающих сайт. Объем данных достаточно большой – это тип и версия браузеров, скорость соединения, название провайдера, разрешение экрана, данные об имеющихся плагинах и много других параметров.

Статистика сайта www.rfe.by за годовой период следующая: количество посещений – 49 755, количество пользователей сайта 18 828 человек из 75 стран мира. Статистика наиболее активных посещений представлена в табл. 1 (исключая безусловное лидерство Беларуси – 44 538 посещений со средним временем пребывания на сайте 4 минуты).

Таблица 1 – Статистика сайта www.rfe.by по данным Google Analytics

Страна	Количество посещений	Среднее количество просмотренных страниц за одно посещение	Среднее время пребывания на сайте одного пользователя
Russia	2 549	1,83	00:00:59
Ukraine	654	1,79	00:01:09

Продолжение таблицы 1

United States	329	4,40	00:03:54
Germany	174	4,95	00:03:48
Kazakhstan	115	1,42	00:01:05

Максимум посещений за один день на сайте наблюдался 1 сентября 2011 г., когда Google Analytics зарегистрировало 580 уникальных посещений за день. К настоящему моменту распределение входящего трафика на сайт rfe.by следующее: 32,51% поисковый трафик – процент переходов на наш ресурс из поисковых машин Google, Yandex и др. 36,24% трафик переходов – процент переходов на наш ресурс из сторонних сайтов (лидирующее место занимает сайт vkontakte.ru). 31,25 % прямой трафик – процент прямых входов на наш ресурс пользователей, которым за год нашего существования уже хорошо знаком домен www.rfe.by. Преимущественной поисковой системой, где нас ищут, является Google. Безусловные лидирующие позиции среди ключевых слов запроса, когда пользователи нас ищут, занимает слово "радиофизик" и его формы "радиофизика", "радиофизики", "радиофизиков". Самой популярной страницей на сайте является страница с информацией о размере студенческой стипендии (4 391 просмотр за год).

Создание сайта факультета Радиофизики и Компьютерных технологий БГУ позволило решить задачу предоставления полной информации о факультете для будущих абитуриентов, а также для предоставления информации, такой как новости факультета и др., студентам и преподавателям. На данный момент реализуются версии на китайском, польском, немецком языках.

Устойчивая работоспособность гарантирована системой управления x3m.cms, в которой факторам безопасности уделяется большое внимание. В процессе разработки сайта были использованы технологии, позволяющие администрировать сайт без знаний специальных языков программирования.

#### **Список цитированных источников**

1. Изучаем jQuery 1.3. Эффективная веб-разработка на JavaScript / Джонатан Чаффер, Карл Шведберг. – Москва: Символ-Плюс, 2010. – 448 с.

УДК 004.453

## **ОБЕСПЕЧЕНИЕ ПОВЫШЕННОЙ НАДЕЖНОСТИ ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ ВСТРАИВАЕМЫХ СИСТЕМ НА БАЗЕ ОС GNU/LINUX**

**Коваленко В.Ю.**

*УО «Брестский государственный технический университет», Брест  
Научный руководитель – Костюк Д.А., к.т.н., доцент*

Одной из особенностей встраиваемых систем (ВС) является их длительное функционирование без перезагрузки и/или какого-либо специфического обслуживания. Поэтому для ВС часто характерны повышенные требования к надежности работы системного и прикладного программного обеспечения и устойчивости к сбоям, происходящим по вине как пользователя, так и из-за внутренних ошибок.

Залогом хорошо работающей системы является грамотно написанный и оттестированный код, учитывающий специфику работы и условия эксплуатации системы, ограниченность ресурсов, знание разработчиком особенностей аппаратуры, на которой код будет

исполняться, и использование возможностей, ею предоставляемых. Однако для многих коммерческих разработок оказываются неприемлемыми высокие затраты времени и сил, необходимые для написания высоконадежных программ, дополнительные методы тестирования и поиска ошибок. Требования к квалификации людей, пишущих такие программы, также являются очень высокими.

Вместо этого разработчики программных платформ ВС применяют различные подходы, призванные уменьшить вероятность неработоспособного состояния системы в результате сбоя, вызванного длительным функционированием одного из ее программных компонент либо незапланированным сочетанием внешних событий.

В настоящее время в сегменте ВС наблюдается интенсивный рост доли систем под управлением Unix-подобных операционных систем, в первую очередь GNU/Linux. Для данного класса программных платформ, благодаря их длительному доминированию в сегменте серверов, сравнительно легко реализуем ряд подходов, обеспечивающих изоляцию отдельных программных компонент и повышающих общую надежность функционирования системы. В настоящей работе мы рассмотрим возможности адаптации для ВС двух таких подходов: виртуализации и персистентности. Первый направлен на защиту ядра ОС от приложений и их самих друг от друга. Второй – на сохранение данных, быстрое восстановление работы и обеспечение многозадачности в условиях недостатка ресурсов, характерных для типичной ВС.

### **1. Технология виртуализации**

Виртуализация – запуск приложения в изолированной среде, т. н. «песочнице» (от англ. sandbox), когда его действия жестко контролируются виртуальной машиной (VM). Приложение изолировано от других программ и взаимодействует с ними через специальные интерфейсы, а доступ к ресурсам (памяти, портам и т. д.) инкапсулируется и также находится под контролем.

Можно выделить схожую технику изоляции, реализованную, в частности, в «тюрьмах» (jails) ОС FreeBSD и lxc-контейнерах ОС GNU/Linux. Вместо полноценной VM создается изолированное пространство, в рамках которого программа имеет полный контроль, но выйти за которое не может, имея доступ к ограниченным областям ОЗУ и др. ресурсов. Эти методы позволяют свести накладные расходы к минимуму и выгодно отличаются от варианта классической виртуализации: компиляции времени исполнения, интерпретации, паравиртуализации [1, 2].

По статистике значительная часть ошибок возникает в системном ПО, т.е. в различных модулях и драйверах. Крах модуля гораздо опаснее краха приложения для системы, т. к. он работает в пространстве ядра и может нарушить его работу. Чтобы застраховаться от подобного, возможно вынести ряд модулей и драйверов из пространства ядра. Такой подход характерен для т. н. микроядер.

Портативный терминал (специализированный планшетный компьютер), представляющий собой типичную ВС, включает следующие типовые компоненты системного ПО:

- модули для взаимодействия с системами GSM и GPS;
- модуль работы с энергонезависимой памятью;
- программа, обрабатывающая данные, выводящая их на экран и отслеживающая реакцию пользователя (может быть реализована в виде нескольких потоков и/или процессов).

Технология изоляции для такой системы может быть применена следующим образом. Прикладная программа загружается в «контейнер», реализованный с помощью модифи-

цированной версии Ix86 и управляемый гипервизором, который может влиять на планирование исполнения, выделяемые ресурсы и т. д. Модули и драйверы (поддержка файловых систем, Flash-памяти, GSM и GPS) также заносятся в контейнеры, при этом остальные подсистемы остаются без изменений. Взаимодействие между ними может быть установлено с использованием ряда стандартных технологий, например, технологии FUSE для реализации файловых систем в пространстве пользователя.

Стоит отметить, что функции драйверов, работающих в пространстве ядра, должны быть сведены к непосредственному вводу/выводу, а контроль ошибок, проверка данных, обработка внештатных ситуаций, ожидание готовности делегируется коду, выполняемому в пространстве пользователя.

Т. о. стабильность системы в целом должна значительно увеличиться. Однако становятся необходимыми меры, компенсирующие дополнительные затраты производительности и энергопотребления. Для этого может использоваться следующая технология.

## **2. Персистентность приложений**

Для снижения энергопотребления могут применяться различные способы. Например, перевод процессора в спящий режим, при котором энергопотребление становится минимальным, либо в режим ограниченной функциональности, когда отключаются различные блоки, не востребованные в данный момент, либо отключение питания периферийных компонентов, в которых нет необходимости. Одной из программных технологий, находящихся в русле данного подхода, является персистентность – возможность сохранения общего состояния приложения на время, когда оно не используется непосредственно. Для сохранения состояния приложения требуется:

- сохранить временные данные из оперативной памяти;
- состояние процессора;
- файлы, которые этот процесс создал (т. е. ссылки на их расположение в файловой системе, которые затем будут возвращены приложению);
- состояние VM, если приложение было запущено в изолированной среде.

Сумму этих компонентов можно назвать образом процесса. Когда требуется запуск приложения, образ восстанавливается в памяти, и программа продолжает выполнение с того места, где она была прервана. Использование VM значительно облегчает эту задачу, поскольку ресурсы и данные приложения находятся под контролем.

Приведем ряд примеров, иллюстрирующих преимущества предложенного подхода:

- процесс, выполняющий обработку порций данных, который длительное время может находиться в состоянии ожидания, может быть сохранен, а затем восстановлен при поступлении очередной порции;
- это удобный способ при достижении критически низкого заряда батареи быстро сохранить приложения или оставить только самые важные, не потеряв результаты работы остальных;
- при необходимости поочередно работать с несколькими «тяжелыми» процессами, которым не хватает ресурсов для параллельной работы, пользователь может чередовать их образы в памяти по необходимости, обеспечивая корректную работу обоих.

## **Выводы**

Т. о., для обеспечения повышенной надежности программного обеспечения встраиваемых систем на базе ОС GNU/Linux может быть применен следующий комплекс решений:

- адаптация системы контейнеров для использования в ВС на основе ARM;



- создание модуля ядра, обеспечивающего персистентность приложений;
- модификация стандартного загрузчика приложений для запуска сохраненного образа в ВМ и восстановления ее состояния.

**Список цитированных источников**

1. Калиновский, Р.В. Технология виртуализации для смартфонов: Сб-к конкурсн. научн. работ студентов и магистрантов. – Брест, 2007. – Ч.1. – С. 99-102.
2. Костюк, Д.А. Построение прозрачных виртуализованных окружений для изоляции уязвимых программных систем / Д.А. Костюк, С.С. Дереченник // Комплексная защита информации: матер. XVI научно-практич. конф., Гродно, 17-20 мая 2011 г. Гродно, 2011. – С. 209-212.

УДК 004.415.25

**ПРОДВИЖЕНИЕ БИЗНЕСА В ИНТЕРНЕТЕ С ПОМОЩЬЮ  
АВТОМАТИЗИРОВАННОЙ БИРЖИ РЕКЛАМНЫХ СООБЩЕНИЙ**

**Кондратьев А. П.**

*УО «Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники», г. Минск*

*Научный руководитель – Поттосина С. А., к.ф.-м.н., доцент*

С появлением новых каналов коммуникаций, таких как интернет и социальные сети, которыми массово пользуются потребители, возникла задача эффективного использования данных каналов в маркетинговых целях. В связи с тем, что аудитория традиционных средств массовой информации смещается в интернет, актуальной проблемой является нахождение новых путей к вниманию потребителей, а также формирование положительного образа товара либо услуги, которую предоставляет бизнес в интернете.

Преимуществами интернет-маркетинга являются: низкая стоимость контакта, низкая цена доставки информации потенциальному потребителю, возможность расширения географии рынка сбыта, получение быстрой обратной связи на той или иной вид маркетинговой активности, мониторинг рекламных кампаний в режиме реального времени. Потребители приветствуют наличие информации о товарах и услугах в интернете и используют её при принятии решений о покупке [1].

С наступлением века информационных технологий и развитием интернета перестают работать традиционные для глобальной сети способы и формы подачи рекламы. Эффективность рекламных кампаний, основанных на форматах прежнего поколения, неуклонно падает. У пользователей сети развивается «баннерная слепота», они перестают замечать рекламные объявления, выполненные в графических, анимационных форматах – тех видах, которые имели наибольшую эффективность на заре развития интернета. В этой связи появилась необходимость в новой, нетрадиционной форме подачи информации рекламного характера. Сначала такой формой стала контекстная реклама, а сейчас становится реклама, основанная на рекомендациях и сообщениях в социальных сетях [2].

Маркетинг в социальных сетях – перспективное развивающееся направление в интернет-маркетинге. Это связано с тем, что пользователи смотрят через призму недоверия на традиционные виды и форматы рекламы в интернете.

Если бизнес никак не заявляет о себе в социальных сетях, это не значит, что там не обсуждаются его продукты и услуги. На основании имеющихся отзывов и информации у

пользователей формируется мнение о продуктах компании. Целью маркетинговых мероприятий является улучшение мнения о компании у пользователей, стимулирование положительного информационного поля вокруг продукта [3].

Наиболее эффективным методом взаимодействия в социальных сетях могут стать рекламные сообщения, основанные на рекомендациях и экспертных мнениях пользователей. Рекомендации не воспринимаются пользователями как реклама, а наоборот, видятся как полезная и ценная информация. Для распространения информации привлекаются лидеры мнений или агенты влияния. Это те пользователи сети, которые имеют большой авторитет среди других пользователей, и, как следствие, большое число подписчиков и последователей. Они оказывают огромное влияние на мнения и решения, принимаемые аудиторией. А значит, их мнение о компании, бренде или продукте способно сформировать мнение потребителей. Это могут быть интернет-журналисты, специалисты в определенной отрасли, а также люди, затрагивающие в своих блогах интересные темы. Благодаря лидерам, информация распространяется на широкий круг потенциальных потребителей. Одно только позитивное упоминание компании у агента влияния способно улучшить репутацию компании и сформировать положительное отношение среди читателей.

Выявим и формализуем стороны, участвующие в процессе донесения информации рекламного характера до потребителей. С одной стороны, это рекламодатели, являющиеся источниками информации, с другой – это множество лидеров мнений и авторитетных пользователей. Для связи этих сторон предлагается система по продвижению бизнеса на основе биржи рекламных сообщений.

Принцип работы системы следующий. Рекламодателям и потенциальным распространителям информации предлагается зарегистрироваться в централизованной системе, которая представляет собой веб-сервис. Рекламодатели озвучивают свои цели, предлагают рекламную информацию к размещению и указывают цену предложения. Владельцы рекламных мест (авторитетные пользователи) могут просмотреть список предложений и согласиться либо отказаться от распространения информации. Также они имеют возможность выставить свою цену спроса на рекламные сообщения. Таким образом, здесь работает принцип биржи: фактически ведутся торги за рекламные сообщения и когда цена спроса соответствует цене предложения, сделка совершается. От такого принципа выигрывают все участники рынка, как продавцы, так и покупатели, так как и те и другие получают максимальную выгоду от использования рыночных механизмов формирования цены.

Система глубоко интегрируется в социальные сервисы и сети. Благодаря этому от авторитетных пользователей требуется минимум усилий при работе с системой. Для них доступен автоматический режим работы, при котором они задают фильтры для рекламных сообщений и настройки частоты записей, этот режим может быть полезен для тех из них, кто экономит время.

Контроль размещения рекламы автоматизируется. Система с заданной периодичностью проверяет наличие размещения рекламных материалов на рекламных площадках, которые сотрудничают с рекламодателем.

При использовании системы также возможно отследить «жизненный путь» запущенной информации, увидеть динамику её распространения, управлять бюджетом рекламной кампании, получить обратную связь от участников системы.

Использование системы позволяет достичь маркетинговых целей:

- распространение информации рекламного характера;
- повышение узнаваемости бренда;
- старт кампаний вирусного продвижения;
- формирование положительных мнений о товаре или услуге;
- как следствие, увеличение продаж.

Таким образом, лавинообразный рост аудитории интернета и социальных сетей заставляют компании обратиться к специалистам по интернет-маркетингу. Формирование мнения о компании у потребителей во многом зависит от мероприятий маркетинга, проводимых в интернете. Существуют методы и технологии для продвижения в социальных сетях, такие как использование тематических сообществ и использование лидеров мнений. В будущем каждое действие агента влияния будет поощряться и спонсироваться, а самими агентами смогут стать обычные люди, с небольшим числом подписчиков, ведь они тоже могут влиять на своих знакомых. Благодаря появлению новых инструментов для взаимодействия рекламодателей и пользователей сети, а также работы с рекомендациями, компании, использующие эти инструменты, получают преимущества в конкурентной борьбе и смогут укрепить свои позиции на рынке.

#### **Список цитированных источников**

1. МакКонел, Б. Эпидемия контента. Маркетинг в социальных сетях и блогосфере / Б. МакКонел, Хуба Дж. – М.: Вершина, 2009.
2. Интернет-маркетинг на 100% / С. Сухов [и др.]. – СПб.: Питер, 2009. – 240 с.
3. Ших, Кл. Эра Facebook. Как использовать возможности социальных сетей для развития вашего бизнеса / Кл. Ших, – М.: Манн, Иванов и Фербер, 2010. – 304 с.

УДК 005.7:004.738.5

## **РАЗРАБОТКА ВНУТРИКОРПОРАТИВНОГО ПОРТАЛА НА SHAREPOINT 2010**

***Конончук А.Н.***

*УО «Белорусский государственный университет», г. Минск  
Научный руководитель – Горячкин В. В., к. ф.- м. н., доцент*

Какие основные части включает в себя современный внутрикорпоративный портал? В первую очередь, это создание корпоративной «социальной сети» с возможностью написания блогов, ведением форумов, инструментарием для взаимодействия между участниками портала, групповой календарь, система управления задачами, создание и размещение wiki страниц и новостных блоков. Во-вторых, неотъемлемой частью современного корпоративного портала является возможность организации документооборота с контролем версий. В-третьих, это возможность создавать отчеты и использовать на портале элементы бизнес-аналитики.

Именно для решения этих задач и была создана платформа SharePoint 2010, позволяющая быстро разрабатывать и внедрять готовые решения в производство.

В основе порталов, создаваемых с помощью SharePoint, лежит гибко настраиваемые шаблоны с множеством реализованного функционала, подключаемого и отключаемого по желанию.

Разработка портала может осуществляться пользователями разных уровней. Начиная от профессионалов, создающих абсолютно новый функционал, и администраторов, делающих профессиональную настройку сервера SharePoint, системы безопасности и т.д.; и заканчивая конечными пользователями, в руках которых удобный и знакомый каждому пользователю интерфейс Microsoft Office, позволяющий быстро и просто создавать новые страницы сайта, вопросники, блоги, и размещать документы для общего доступа.

На наш взгляд, платформа SharePoint 2010 – это очень практичный инструмент для разработки, который включает в себя современную систему обеспечения безопасности и конфиденциальности тех данных, с которыми ведется работа. На данной платформе можно разрабатывать системы, позволяющие взаимодействовать с программным продуктом тысячам пользователей. Сам интерфейс очень удобен и полностью «синхронен» с интерфейсом последних продуктов Microsoft Office. По этой причине, с точки зрения удобства и узнаваемости конечными пользователями, внедрение порталов является очень эффективным. Особое внимание уделяется синхронизации с офисными приложениями от Microsoft. Наличие SharePoint портала открывает пользователям Microsoft Office новые возможности. Ярким примером является совместное редактирование документов, размещенных для публичного доступа. Все пользователи, одновременно просматривающие документ, могут видеть в режиме реального времени все изменения, сделанные остальными, общаться по встроенному текстовому и видео чату, помечать необходимые блоки документа только для личного редактирования.

Было проведено проектирование и разработка внутрикорпоративного портала. В результате исследования предметной области реализованы и внедрены такие дополнительные функции, как:

- расширение профиля пользователя с добавлением таких параметров, как департамент и менеджер;
- построение иерархии работников компании с возможностью просмотра и быстрого перехода на страницу выбранного пользователя;
- система сбора заданий пользователя;
- система автоматизированной обработки заявок на командировку членов компании и отчета о расходах;
- персонализация портала, развертывание стандартного функционала;
- механизм оповещения пользователя по электронной почте;
- реализована возможность построения отчетов, например, по продажам компании по аналитическому кубу данных, построенному на основе информации хранящейся в базе данных сервера (интеграция с Performance Point).

Внедрение данных механизмов и возможностей в первую очередь направлены на построение более гибкого и качественного менеджмента компании. Все взаимодействие происходит внутри портала, доступного на любом компьютере, имеющем доступ в интернет. Предусмотрено также автоматическое создание мобильной версии портала.

За счет механизма Business Connectivity Services в SharePoint 2010 возможна интеграция среды с множеством современных систем для работы и анализа данных.

Говоря о платформе Share Point 2010, можно сказать: «Быстро, качественно разработали – быстро, качественно внедрили». Компания Microsoft уделяет этому продукту особое внимание и место. Это наиболее динамично развивающийся продукт Microsoft. По-

этому с уверенностью можно сказать, что изучение его и использование имеет смысл и перспективы.

**Список цитированных источников**

1. Krause, J. SharePoint 2010 as a Development Platform / Jorg Krause, Christian Langhirt, Alexander Sterff, Bernd Pehlke, Martin Döring. – United States of America, NY: Apress, 2010. – 1170 p.

УДК 656.2

**РЕОПТИМИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЭВКЛИДОВЫХ ЗАДАЧ КОММИВОЯЖЕРА  
МЕТОДОМ ЭЛАСТИЧНЫХ СЕТЕЙ**

**Ком О.В.**

*УО «Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники», г. Минск*

*Научный руководитель – Ревотюк М.П., к. т.н, доцент*

В классической постановке [1] формальная модель задачи коммивояжера (ЗК) имеет вид:

$$\min \left\{ \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n c_{ij} x_{ij} \left| \begin{array}{l} \sum_{i=1}^n x_{ij} = \sum_{j=1}^n x_{ij} = 1; x_{ij} \geq 0, i, j = \overline{1, n}; \\ u_i - v_j + nx_{ij} \leq n - 1, i = \overline{2, n}, j = \overline{2, n}, i \neq j \end{array} \right. \right\} \quad (1)$$

Принадлежность модели ЗК моделям линейного программирования, несмотря на *NP*-полноту ЗК, порождает мысль о возможности реоптимизации решения после каких-либо изменений матрицы  $\|c_{ij}, i, j = \overline{1, n}\|$  в (1). Проблема реоптимизации также является *NP*-полной [2]. Возникает потребность в создании эвристических рекуррентных алгоритмов построения нового решения с использованием информации о существующем решении. В настоящей работе рассматривается применение метода эластичных сетей для реоптимизации решения евклидовой ЗК и проводится экспериментальная оценка его эффективности.

В методе эластичных сетей предлагается рассматривать каждый из маршрутов коммивояжера как отображение окружности на плоскость так, что в каждый город на плоскости отображается как некоторая точка этой окружности. При этом требуется, чтобы соседние точки на окружности отображались в точки, по возможности ближайшие и на плоскости. Алгоритм стартует с помещения на плоскость небольшой окружности. Замкнутая линия первоначального кольца, неравномерно расширяясь, проходит практически около всех городов и, в конечном итоге, определяет искомый маршрут.

Каждая точка расширяющегося кольца движется под действием двух сил. Первая перемещает ее в сторону ближайшего города, а вторая смещает в сторону ее соседей на кольце так, чтобы уменьшить его длину. По мере расширения такой эластичной сети каждый город оказывается ассоциированным с определенным участком кольца.

Очевидно, что итерационный характер метода эластичных сетей порождает вопрос правила остановки. Момент остановки влияет на отклонение полученного решения от оптимального. Многими авторами установлено, что для ЗК с 30 городами, метод эластичной сети генерирует наикратчайший маршрут примерно за 1000 итераций. Для 100 городов найденный этим методом маршрут лишь на 1% превосходил оптимальный [2].

Известно, что у любого оптимального решения евклидовой 3К есть общее свойство: вершины, расположенные на выпуклой оболочке, посещаются в том порядке, в котором они расположены на границе такой оболочки [2]. В ходе работы алгоритма, реализующего метод эластичных сетей, выпуклая оболочка оказывается построенной. Очевидно, что при изменении расположения или добавлении некоторого города нет необходимости заново пересчитывать координаты всех вершин сети, изменяющиеся в ходе каждой итерации.

Новые вершины, оказавшиеся рядом с найденной оболочкой, могут быть часто включены в новый маршрут за значительно меньшее время по сравнению с независимым поиском нового решения. В [2-3] изучен вопрос устойчивости решения при изменениях, вносимых в матрицу расстояний, а в [3] получены необходимые и достаточные условия устойчивости оптимального решения 3К при изменениях в исходном множестве вершин.

Используя упомянутые условия устойчивости, можно исключить итерации поиска решения. Однако реализация такой идеи нуждается в конструировании вычислительной схемы, связывающей известные эвристики.

Обозначим расстояние между городами с произвольными номерами  $i$  и  $j$  как  $d(i, j) = |\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j|$ .

Пусть  $\gamma_1, \dots, \gamma_n$  – оптимальный маршрут посещения городов в открытой 3К, когда фиксированы начальный и конечный города маршрута –  $\gamma_1$  и  $\gamma_n$ . Для закрытой 3К вида (1) такими городами могут быть любые смежные города кратчайшего гамильтонова цикла.

В случае добавления нового города с номером  $z = n + 1$  маршрут  $\gamma_1, \dots, \gamma_k, z, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$  остается оптимальным, если выполняется условие

$$d(\gamma_k, z) + d(z, \gamma_{k+1}) - d(\gamma_k, \gamma_{k+1}) = \min_{i, j} \{d(i, z) + d(z, j) - d(i, j), i, j \in \overline{1, n}\}. \quad (2)$$

Пусть  $D_k = d(\gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}) - d(\gamma_{k-1}, \gamma_k) - d(\gamma_k, \gamma_{k+1})$ . В случае удаления города  $\gamma_k$  из оптимального маршрута  $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_k, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$ , когда  $1 < k < n$ , маршрут  $\gamma_1, \dots, \gamma_{k-1}, \gamma_{k+1}, \dots, \gamma_n$  останется оптимальным, если справедливо условие

$$D_k \leq \min_j \{d(\gamma_1, \gamma_j) - d(\gamma_1, \gamma_k) - d(\gamma_k, \gamma_j), j \in \overline{2, n} \setminus k\} \quad (3)$$

или условие

$$D_k \leq \min_i \{d(\gamma_i, \gamma_n) - d(\gamma_i, \gamma_k) - d(\gamma_k, \gamma_n), i \in \overline{1, n-1} \setminus k\}. \quad (4)$$

Удаление начальных или конечных городов оптимальность остающегося маршрута не меняет.

Очевидно, что изменение положения некоторого города соответствует ситуации его удаления и добавления в новую точку на плоскости.

Вычислительная сложность процедур проверки условий (2)-(4) –  $o(n^3)$ . Практически проверка таких условий может проводиться путем построения областей устойчивости решения. Если условия (2)-(4) не выполняются, то необходимо провести поиск оптимального или близкого к нему решения.

Для ускоренной оценки истинности (2)-(4) предлагается учесть траекторию движения точек эластичной сети при выполнении итераций. Кроме этого, известен ряд приемов приближенного решения задачи реоптимизации 3К за полиномиальное время [3]. При добавлении одного нового города хорошие результаты дает эвристика "самой дешевой вставки". Доказано, что полученный результат отличается максимум в полтора раза от

оптимального, а такую небольшую разницу многие оценивают как приемлемую. Другие алгоритмы имеют верхнюю границу в  $4/3$  оптимума, но строго это пока не доказано [3].

При удалении одной вершины предлагается просто склеивать образовавшийся разрыв. Доказано, что полученный результат не более чем в полтора раза отличается от оптимального [3].

Эксперимент по оценке времени реоптимизации решения ЗК после добавления нового города подтвердил полезность реоптимизации (рис. 1).

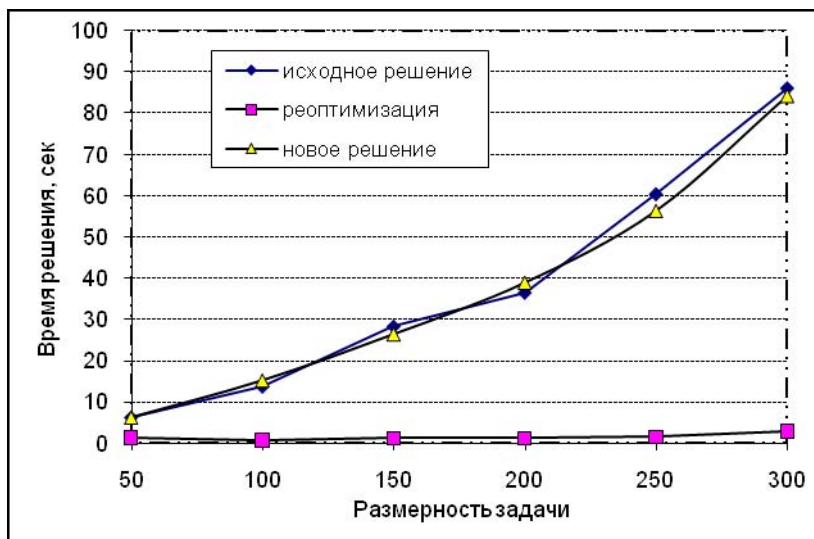


Рисунок 1 – Результаты оценки эффективности реоптимизации

Таким образом, при решении последовательно порождаемых задач коммивояжера с изменением состава посещаемых городов реоптимизация может рассматриваться как эффективный прием преодоления высокой вычислительной сложности нового решения изменившейся задачи. Схема выделения областей устойчивости для ускорения формирования решения применима к симметричным и асимметричным ЗК, независимо от метода их решения.

**Список цитированных источников**

1. Gutin, G. The Travelling Salesman Problem and Its Variations / Gutin G., Punnen A.P. – Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2007. – 830 p.
2. Laporte, G. The traveling salesman problem: An overview of exact and approximate algorithms / Eur. J. Oper. Res. 1992. – Vol. 59. – P. 231-247.
3. Иванко, Е.Е. Достаточные условия устойчивости оптимального маршрута в задаче коммивояжера при добавлении новой вершины и при удалении существующей / Е.Е. Иванко//Вестн. Удмуртск. ун-та. Матем. Мех. Компьют. науки, 2010. – № 1. – С. 48-57.

УДК 614.833.3, 614.833.4

**ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ ДЛЯ РАСЧЕТА И ВИЗУАЛИЗАЦИИ ЗОН ЗАРАЖЕНИЯ В ИЗМЕНЯЮЩИХСЯ МЕТЕОРОЛОГИЧЕСКИХ УСЛОВИЯХ**

**Котов Д.С.**

УО «Белорусский государственный университет», г. Минск  
 Научный руководитель – Саечников В.А., д. ф.-м. н., профессор

Согласно [1], для прогноза масштабов заражения непосредственно после аварии должны браться конкретные данные о количестве выброшенного (разлившегося) СДЯВ

и реальные метеоусловия: температура воздуха, скорость ветра на высоте 10 метров (на высоте флюгера), степень вертикальной устойчивости воздуха. Предельная продолжительность сохранения неизменными метеорологических условий (степени вертикальной устойчивости воздуха, направления и скорости ветра) составляет 4 часа.

Если рассмотреть приложение 2 к [1], то можно увидеть, что метеорологические условия могут меняться и в течение более короткого времени. Например, если авария произошла перед восходом солнца, при ясном небе, без снежного покрова и скорости ветра 2 м/с, степень вертикальной устойчивости будет инверсия, с восходом солнца степень вертикальной устойчивости будет уже изотермия, а через два часа после восхода солнца – конвекция.

Следовательно, необходимо иметь методику прогнозирования зон поражения при выбросах и проливе сильнодействующих ядовитых веществ в изменяющихся метеорологических условиях.

С целью создания такой методики, проанализировано, какие параметры влияют на масштаб заражения сильнодействующими ядовитыми веществами при авариях (разрушениях) на химически опасных объектах и транспорте, меняются с изменением метеорологических условий.

При скорости ветра меньшей либо равной 0,5 м/с зона возможного заражения имеет вид окружности. При изменяющихся метеорологических параметрах радиус первой окружности, равный  $r_{м1}$ , рассчитывается исходя из метеорологических параметров на момент времени возникновения аварии и промежутка времени, в течение которого эти метеорологические параметры оставались неизменными.

При изменении метеорологических параметров необходимо повторить расчет зоны поражения, при этом необходимо иметь в виду, что первичное облако уже будет отсутствовать. При расчете величины, на которую увеличилась зона заражения вторичным облаком, следует исходить из времени постоянства первых метеорологических параметров и времени, прошедшего с момента аварии.

При скорости ветра более 0,5 м/с зона поражения представляет собой полуокружность или сектор. В том случае, если при вторых метеорологических условиях направление ветра такое же, как и при первых метеорологических условиях, расчет глубины зоны заражения аналогичен выше описанному для скорости ветра не более 0,5 м/с.

При скорости ветра более 0,5 м/с, когда при вторых метеорологических условиях направление ветра  $\gamma$  отличное от направления ветра при первых метеорологических условиях, формулы расчетов сохраняются, но графическое представление зоны заражения на картах и планах изменяется.

При указанных условиях зоны поражения могут быть представлены тремя секторами (рисунок). Первый сектор – это сектор, образовавшийся при первых метеорологических условиях, характеризуется углом  $\gamma_1$ . Второй сектор – это сектор, образовавшийся при вторых метеорологических условиях в области, не подвергшейся заражению СДЯВ при первых метеорологических условиях, характеризуется углом  $\gamma_2$ . Третий сектор – это сектор, образовавшийся при первых и вторых метеорологических условиях, характеризуется углом  $\gamma_3$ .

В случае, когда образуются три сектора, значения радиуса первого сектора численно равны, глубине зоны заражения от источника заражения при первых метеорологических условиях. Все линейные и угловые параметры сектора сохраняются неизменными в течение всего времени, пока сохраняются неизменными вторые метеорологические условия.



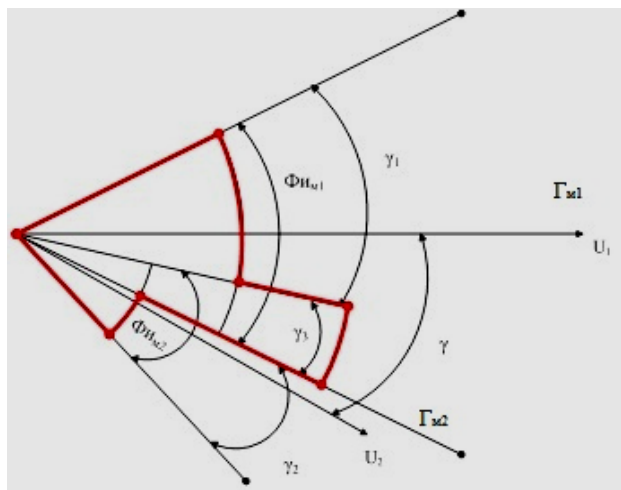


Рисунок – Схема образования трех секторов

Радиус второго сектора численно равен глубине зоны заражения от источника заражения при вторых метеорологических условиях  $\Gamma_{\text{м2}}$ . Угловые параметры сектора сохраняются в течение всего времени, пока не изменяются вторые метеорологические условия. С течением времени меняется только радиус сектора.

Радиус третьего сектора находится сложением глубин зон заражения от источника заражения при первых и вторых метеорологических условиях ( $\Gamma_{\text{м1}}$  и  $\Gamma_{\text{м2}}$ ). Угловые параметры сектора сохраняются в течение всего времени, пока не изменяются вторые метеорологические условия. С течением времени меняется только радиус сектора.

Выведены формулы, позволяющие рассчитать угловые параметры трех секторов, при двух метеорологических условиях.

Показано, что, развивая предложенную методику, можно вывести формулы нахождения угловых параметров зон поражения при трех и более различных метеорологических условиях, характеризующихся различным направлением ветра. При этом количество условий и формул расчета будет лавинообразно увеличиваться.

Поэтому разработана методика, алгоритм и программное средство нахождения линейных и угловых размеров зон поражения при различных метеорологических условиях, характеризующихся различным направлением ветра, методами электронно-вычислительной техники.

При разработке алгоритма прогнозирования зон поражения при выбросах и проливе сильнодействующих ядовитых веществ при изменяющихся метеорологических условиях исходили из положения, что ранее [2, 3] уже разработан алгоритм расчета глубины зоны заражения для конкретного СДЯВ.

В результате реализации алгоритма, составляющего основу программного обеспечения расчета зон поражения при выбросах и проливах сильнодействующих ядовитых веществ в изменяющихся условиях, формируется трехмерный массив окончательной глубины зоны заражения, используемый для визуализации зоны заражения. При этом индексы массива соответствуют градусам (0...359), минутам (0...59) и секундам (0...59).

Визуализация зоны заражения осуществляется на электронных картах в программе ArcView 3.1 при выполнении скрипта, написанного на встроенном языке Avenue. Скрипт выполняется только при первой визуализации, а в дальнейшем изменения в характере зоны заражения происходят при изменении результатов в файле, описывающем трехмерный массив окончательной глубины зоны заражения.

### **Список цитированных источников**

1. Методика прогнозирования масштабов заражения сильнодействующими ядовитыми веществами при авариях (разрушениях) на химически опасных объектах и транспорте: РД 52.04.253-90.
2. Котов, С.Г. Программные средства расчета зон поражения при авариях на технологических установках, содержащих СДЯВ / С.Г. Котов, В.А. Саечников, Д.С. Котов // Проблемы и перспективы развития транспортных систем и строительного комплекса: материалы II Междунар. науч.-практ. конф. – Гомель: БелГУТ, 2008. – 329 с.
3. Котов, Д.С. Программное средство расчета масштабов заражения сильнодействующими ядовитыми веществами / Д.С. Котов, В.А. Саечников // Традиции, тенденции и перспективы в научных исследованиях: материалы IV международной студенческой научно-практической конференции: в 2 ч. / редкол.: О.А. Еремеева [и др.] – Чистополь: ИНЭКА, 2009. – Ч. 1. – С. 310–311.

УДК 681.5:004.42

## **АВТОМАТИЗАЦИЯ ЭТАПА ПОДГОТОВКИ ИСХОДНЫХ ДАННЫХ ДЛЯ КОМПЬЮТЕРНОЙ ПРОГРАММЫ «ТВИНД»**

***Кофанов В.А.***

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест*

Нередко при решении сложных задач строительной физики приходится использовать большой объем исходных данных. И чем более достоверную информацию мы хотим получить, тем больше увеличивается объем этих данных. Например, для того, чтобы использовать компьютерную программу «ТВИНД», зарегистрированную в Национальном центре интеллектуальной собственности (свидетельство №139), для расчета нестационарных температурно-влажностных полей в ограждающих конструкциях от воздействий окружающей среды, необходимо задать значительный массив данных о состоянии окружающей среды в различные моменты времени. Количество этих данных зависит от дискретности измерений состояния окружающей среды и от времени, в диапазоне которого мы проводим расчеты.

В качестве исходных данных, характеризующих воздействие окружающей среды на ограждающую конструкцию, используются температура, относительная влажность воздуха и атмосферные осадки. Получить информацию об этих трех параметрах представлялось возможным двумя способами.

Первый способ предполагал поездку на выбранную метеостанцию и проведение на ней кропотливой работы по переносу данных с бумажных носителей в электронный формат, так как метеостанции данные о фактическом состоянии окружающей среды в электронном формате не предоставляют. Ручной ввод этих данных приводит к нецелесообразности использования компьютерной программы, которая создается для сокращения времени расчета, поэтому первый способ на этапе накопления данных в дальнейшем может использоваться только в исключительных случаях.

Второй способ заключается в получении данных с сайтов сети Интернет и на первый взгляд является наиболее приемлемым для получения информации о фактическом состоянии окружающей среды. Тем не менее данный способ имеет свою специфику. Информацию с сайтов можно было получить одним файлом с расширением «\*.txt» или «\*.csv», а также с различной кодировкой «ANSI», «UTF-8» и «Unicode». Приложение Microsoft Excel позволило импортировать полученный из сети Интернет файл после выбо-

ра корректных настроек импорта. После этого путем несложных манипуляций можно экспортировать данные температуры, относительной влажности воздуха и атмосферных осадков в отдельный файл, который впоследствии будет использоваться программой «ТВиНД». В сравнении с первым способом второй имеет значительные преимущества, выигрывая в доступности и в скорости получения информации. Однако из-за того, что файлы с различных сайтов отличаются друг от друга структурой содержащихся в них данных, то дальнейшее их накопление в приложении Excel вызывает неудобства, связанные с большим количеством операций по их форматированию и преобразованию к единому шаблону, что приводит к увеличению времени накопления информации.

Содержание файлов, полученных из сети Интернет, можно разделить на два блока. В первом блоке содержится различная информация, среди которой стоит отметить следующую: адрес сайта, с которого был получен файл, код метеостанции, наименование и порядок полей данных. Второй блок представляет собой набор символов расположенных в порядке, определенном в начале файла, и разделенных между собой запятыми либо точкой с запятой. Кроме этого, файлы могут иметь следующие недостатки:

- первый блок в файле может отсутствовать;
- в каждом файле свой определенный порядок полей;
- данные в файле могут располагаться в обратном хронологическом порядке;
- в файле могут отсутствовать данные измерений параметров окружающей среды в различные моменты времени;
- в файле могут отсутствовать данные одного из трех параметров окружающей среды, необходимых для выполнения расчетов в программе «ТВиНД».

В связи с этим в среде программирования «Delphi 7» была создана программа «Weather data - ТВиНД», которая, учитывая перечисленные особенности импортируемых файлов, выполняет функции накопления, хранения и обработки данных, содержащих сведения о фактическом состоянии окружающей среды. Внешний вид программы показан на рисунке 1.

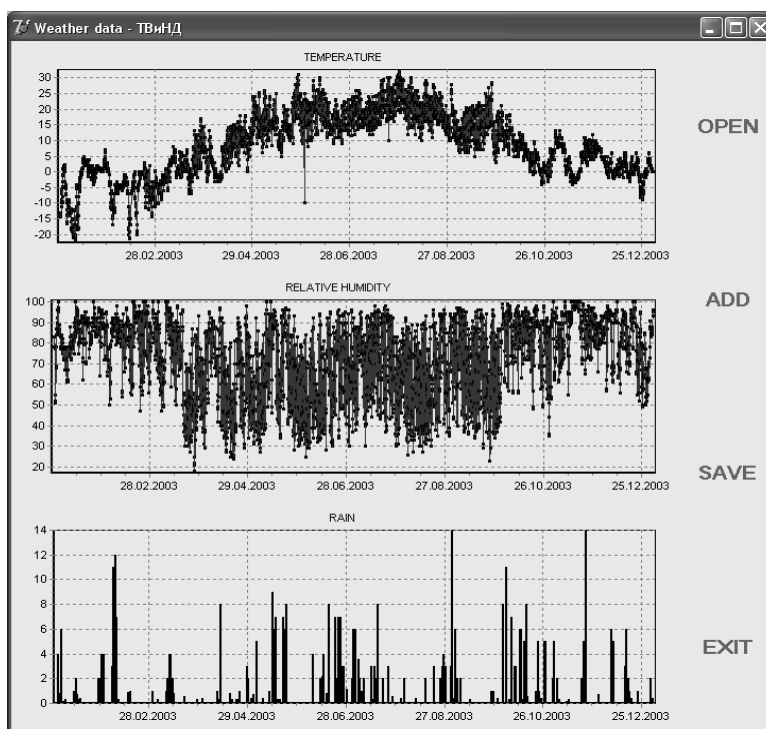


Рисунок 1 – Внешний вид компьютерной программы «Weather data - ТВиНД»

Программа «Weather data - ТВиНД», открывая файл с данными, автоматически определяет адрес сайта, с которого получен файл, и порядковые номера полей данных, с которых необходимо считывать информацию. После этого создается отдельный массив, в который записывается значение даты и времени измерения, температуры, относительной влажности воздуха и атмосферных осадков, а также ссылки на последующий и предыдущий массивы. Такая конструкция хранения данных позволяет добавлять значения параметров одновременно в начало и в конец списка и тем самым обрабатывать данные, которые записаны в файле в обратном хронологическом порядке.

Если информация на какой-то определенный момент времени отсутствует, то создается пустой массив, содержащий только дату и время измерения и ссылки на соседние массивы. Когда мы добавляем новый файл, программа считывает из него записи и, если таковых данных нет в списке, заполняет пустые массивы. Таким образом, происходит накопление данных, а также решается проблема пропущенных или отсутствующих в файлах данных.

Накопленные данные экспортируются в три текстовых файла отдельно для температуры, относительной влажности воздуха и атмосферных осадков, которые являются исходными данными для программы «ТВиНД».

Использование программы «ТВиНД» совместно с разработанной программой «Weather data - ТВиНД» позволяет значительно сократить время на подготовку исходных данных, связанных с описанием температуры, относительной влажности воздуха и атмосферных осадков.

УДК 004.384:658.5

## **СИСТЕМА ЭЛЕКТРОННОГО ДОКУМЕНТООБОРОТА «СИГМА»**

***Крощенко А.А.***

*УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», г. Брест*

Системы электронного документооборота (СЭД) относятся к наиболее востребованным системам автоматизации бизнес-процессов на предприятии. Следуя [1], СЭД – организационно-техническая система, обеспечивающая процесс создания, управления доступом и распространения электронных документов в компьютерных сетях, а также обеспечивающая контроль над потоками документов в организации. Подобные системы решают массу проблем, переводя документооборот на новый уровень автоматизации. К задачам, решаемым СЭД, относятся [2]: поддержка системы контроля качества, формализация деятельности каждого сотрудника, экономия ресурсов за счет сокращения бумажной документации и связанные с ней освобождение физического места для хранения документов и уменьшение затрат на копирование и доставку документов в бумажном виде и другие. К существующим СЭД-решениям можно отнести такие системы, как «CompanyMedia», «DIRECTUM», «Канцлер» и другие, а также бесплатные (open source) системы «Alfresco» и «Nuxeo». Следует отметить, что коммерческие решения достаточно дороги и требуют доработки со стороны разработчиков при внедрении. Бесплатные системы лишены первого недостатка, но, как правило, требуют существенной доработки.

Перед нами была поставлена задача создания системы электронного документооборота и внедрения ее в работу подразделений УО «БрГУ им. А.С. Пушкина».

В качестве архитектурной технологии для создания системы была выбрана клиент-серверная технология. Причинами подобного решения стали, во-первых, преимущества, которые дает использование данной технологии [3] (простота обслуживания вычислительной системы, возможность использования ресурсов сервера клиентами с различными программно-аппаратными характеристиками), а, во-вторых, наличие в указанном учреждении развитой локальной вычислительной сети.

В результате была разработана система «Сигма». Основными достоинствами предложенного решения являются:

1. Соответствие установленным формам оформления документации (карточка учета);
2. Возможность одновременной работы группы пользователей;
3. Подсистема контроля за исполнением (механизм всплывающих окон с уведомлениями);
4. Возможность «прикрепления» к сформированному заданию документов в формате «doc» и «pdf»;
5. Нетребовательность к ресурсам;
6. Персонализированные настройки клиента;
7. Наличие поисковой подсистемы, осуществляющей одновременный поиск по нескольким полям карточки;
8. Полноценный инсталляционный пакет для клиентской части системы.

На базе клиентской части системы организованы два уровня доступа. Назовем их условно нулевым и первым. На нулевом уровне осуществляется доступ работников, выполняющих функции ввода и редактирования данных, а также контроля за исполнителями. На первом уровне осуществляется доступ для исполнителей заданий. Исполнителями считаются лица, которым поручено выполнение заданий в соответствии с резолюциями вышестоящих должностных лиц. Этот уровень доступа дает лишь возможность ознакомления с имеющимися документами, адресованными данному исполнителю.

Работа с системой осуществляется следующим образом: некоторая уполномоченная группа пользователей (например, работники канцелярии), обладающие нулевым уровнем доступа, осуществляют регистрацию документации посредством заполнения специальной формы (карточки). Далее руководитель (или лицо, имеющее сходные полномочия), также обладающий нулевым уровнем доступа, назначает исполнителей задания. Канцелярия и руководство контролируют процесс исполнения и делают необходимые отметки в карточке. Каждый из исполнителей (первый уровень доступа) имеет возможность не только получать уведомления о новых назначенных для него заданиях, но и получать сообщения от системы о заданиях, которые требуют немедленного исполнения. Также у исполнителей есть возможность загрузить копию документа в формате pdf или doc на локальный компьютер.

Для ознакомления с возможностями системы и урегулирования спорных вопросов в ее эксплуатации разработана справочная система, где описываются возможные действия пользователя и следующие за ними ответные реакции системы.

#### **Список цитированных источников**

1. Система автоматизации документооборота – Википедия. – Режим доступа: <http://www.ixbt.com/soft/sed.shtml>. – Дата доступа: 18.10.2011.
2. Статья:СЭД (подробнее) – TADVISER. – Режим доступа: [http://www.tadviser.ru/index.php/Статья:СЭД\\_\(подробнее\)](http://www.tadviser.ru/index.php/Статья:СЭД_(подробнее)). – Дата доступа: 18.10.2011.
3. Многоуровневые системы клиент-сервер – Сети. – Режим доступа: <http://www.osp.ru/nets/1997/06/142618>. – Дата доступа: 18.10.2011.

УДК 004.932.2; 303.732.4

## РАЗРАБОТКА МЕТОДА ОЦЕНКИ ФОРМЫ ГРАНИЦ СЕГМЕНТИРОВАННЫХ ОБЪЕКТОВ ПО ЛЮМИНЕСЦЕНТНЫМ ИЗОБРАЖЕНИЯМ ЖИВЫХ КЛЕТОК

*Лисица Е.В.<sup>1</sup>, Яцков Н.Н.<sup>1</sup>, Апанасович Т.В.<sup>2</sup>, Ру Х.<sup>2</sup>, Апанасович В.В.<sup>1</sup>*

<sup>1</sup> УО «Белорусский государственный университет», г. Минск

<sup>2</sup> Центр Джефферсона по исследованию раковых заболеваний, Филадельфия  
Научный руководитель – Апанасович В.В., д. ф.-м. н., профессор

### Введение

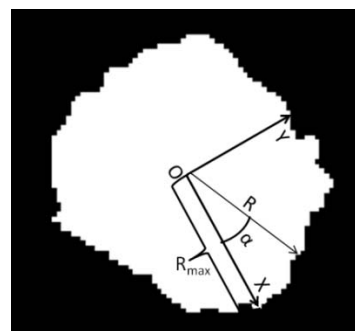
Биологические микроматрицы срезов тканей и клеток, исследуемые с использованием метода люминесцентной микроскопии, являются одним из наиболее быстроразвивающихся экспериментальных направлений современной науки. Эффективность микроматриц обусловлена возможностью оперативного получения огромного количества биологической информации на клеточном уровне в ходе клинических и медико-лабораторных исследований [1].

Цифровая обработка изображений живых клеток включает этапы сегментации и локализации объектов-клеток [2]. Учет параметров индивидуальных объектов позволяет более точно идентифицировать раковые клетки различных стадий, а также выделить области неоднородностей на изображениях. Одна из основных групп параметров, характеризующих признаки клеточных объектов, – параметры формы. Например, площадь, эксцентриситет, выпуклость, заполнение и т.д. [2]. Однако данные коэффициенты отражают в основном только геометрическую сторону объекта (сжатость, выпуклость и т.д.) и не позволяют описать степень (не)однородности границы объекта [2]. Учет характеристик (не)однородности границ клеток позволит более точно выделять биологические объекты на изображениях, а также значительно упростит последующую статистическую обработку полученной информации.

В работе предложен метод оценки формы границ сегментированных объектов по люминесцентным изображениям живых клеток. В основе метода лежит оценка степени однородности границ объектов. На первом этапе работы метода вводится набор индивидуальных клеточных систем координат для каждого сегментированного объекта изображения. На втором этапе выполняется оценка степени однородности границ объектов на основе меры коэффициента корреляции Пирсона. Для репрезентативного набора экспериментальных клеток [3], выполнено сравнение разработанной оценки с наиболее широко используемыми параметрами, такими как эксцентриситет и выпуклость.

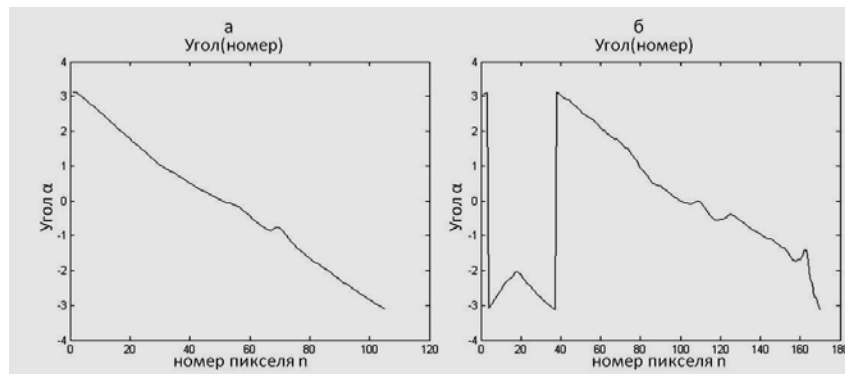
### Клеточная система координат

Центр клеточной системы координат – геометрический центр масс. В качестве оси  $OX$  выбрана прямая, проходящая через центр ядра и максимально удаленную точку границы клетки. Ось  $OY$  – прямая, перпендикулярная оси  $OX$ , проходящая через центр ядра. Координатой пикселя является угол отклонения  $\alpha$  от оси  $OX$  и расстояние до центра  $R$  (рис. 1).



**Рисунок 1 – Клеточная система координат**

Для выпуклых объектов характерна линейная зависимость угла  $\alpha$  от номера пикселя  $n$ . (см. Рисунок 2а), что нехарактерно для клеток с вогнутыми контурами границ 2б.



а) выпуклый объект б) вогнутый объект

Рисунок 2 – Примеры зависимости угла  $\alpha$  от номера пикселя  $n$

Следует отметить, что регистрируемая функциональная характеристика представляет собой набор натуральных значений в декартовой системе координат. Однако для последующего анализа практичнее использовать полярную систему координат, в которой переменная может принимать иррациональные значения.

### Коэффициент корреляции

Для оценки линейной связи угла  $\alpha$  и номера пикселя  $n$  используется коэффициент корреляции Пирсона  $r_{n\alpha}$ .

$$r_{xy} = \frac{\sum(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum(x_i - \bar{x})^2 \sum(y_i - \bar{y})^2}}, \quad (1)$$

где  $x$  и  $y$  – исследуемые случайные величины. Коэффициент корреляции характеризует степень линейной зависимости между переменными и принимает значения от -1 до 1. Предполагается, что выпуклые округлые клетки будут иметь значение параметра близким к 1, а клеткам с экспериментальным искажением (характеризуемые выпуклостью своих границ) будет соответствовать коэффициент корреляции, значительно меньший 1.

### Результаты

В таблице 1 представлены результаты расчета коэффициентов корреляции, эксцентриситета и выпуклости для девяти различных клеток, примеры которых расположены на рисунке 3.

$$K = b/a, \quad (2)$$

где  $a$  и  $b$  большая и малая полуоси ограничивающего эллипса

$$S = Area/ConvexArea, \quad (3)$$

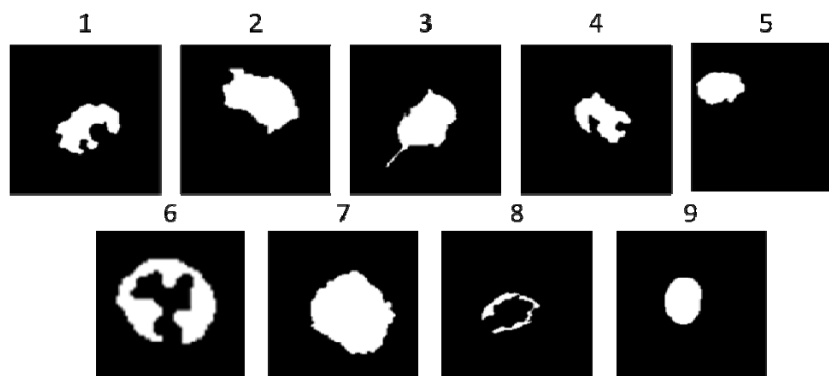
где  $Area$  – площадь объекта и  $ConvexArea$  – площадь ограничивающего прямоугольника.

Таблица 1 – Коэффициенты корреляции, эксцентриситета и выпуклости для девяти клеток, маски которых представлены на рисунке 3

Номер клетки	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$r_{n\alpha}$	0.97	0.96	0.95	0.05	0.99	0.53	0.99	0.08	0.99
Эксцентриситет	0.82	0.81	0.78	0.78	0.75	0.62	0.50	0.68	0.64
Выпуклость	0.76	0.86	0.7523	0.78	0.93	0.63	0.95	0.32	0.99

Из результатов, представленных на рисунке 3 и в таблице 1, действительно следует, что коэффициент корреляции  $r_{n\alpha}$  наиболее точно отражает степень гладкости / однородности границ объекта. Так, для объектов, содержащих большое количество выпуклостей

на границах, он принимает значения в пределах от 0 до 0.6. В случае, когда у объекта наблюдаются незначительные отклонения в форме, не искажающие его структурную форму, коэффициент принимает значения, близкие к 1.



*Рисунок 3 – Маски клеток*

### **Выводы**

Разработан метод оценки формы границ сегментированных клеток. В основе метода лежит оценка степени однородности границ объектов на основе коэффициента корреляции Пирсона. Коэффициент корреляции позволяет значительно точнее оценить степень искаженности границ объектов, чем параметры эксцентриситета и выпуклости, а также использовать элементы корреляционного анализа для проверки статистических гипотез об однородности границ клеток.

### **Список цитированных источников**

1. Carpenter, A.E. et al. CellProfiler: image analysis software for identifying and quantifying cell phenotypes // *Genome Biology*. – 2006. – №7. – С.100.1-100.10.
2. Гонсалес, Р. *Обработка изображений в среде MATLAB* / Р. Гонсалес, Р. Вудс, С. Эддинс. – М.: Техносфера, 2006. – С.421-425, 436-443.
3. Lisitsa, Y. Fully-automated segmentation of tumor nuclei in cancer tissue images / Y. Lisitsa, M. Yatskou, V. Apanasovich, R. Hallgeir, T. Apanasovich. – *PRIP*. – 2011. – С.116-120.

УДК 004.682

## **АВТОМАТИЗАЦИЯ УПРАВЛЕНЧЕСКОГО УЧЕТА АРЕНДНЫХ ОТНОШЕНИЙ**

*Магуйло В.С., Аверина И.Н.*

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест*

На каждом предприятии в целях оптимального управления ведется необходимый управленческий учет. При этом предприятие самостоятельно вырабатывает форму ведения управленческого учета и средства ее автоматизации, так как организация управленческого учета по законодательству Республики Беларусь не регламентирована жесткими стандартами и нормативными актами. Управленческий учет – это внутренний учет, главными критериями которого являются объективность и полезность получаемой информации. Управленческий учет основывается, как правило, на данных бухгалтерского учета, которые аккумулированы в предназначенной для этого базе данных. Поэтому целесообразно включение задач управленческого учета в базу данных бухгалтерского учета, формируя тем самым на предприятии единую базу данных для учета и управления.



В частности, управленческий учет арендных отношений имеет много специфических элементов: расчет и обоснование арендной платы, учет составляющих ее показателей, учет множества необходимой документации по каждому объекту недвижимости. Как правило, это набор файлов MS Word расчетных таблиц, разработанных в MS Excel. Для автоматизации управленческого учета арендных отношений целесообразна доработка функций системы автоматизации бухгалтерского учета, используемой на предприятии. Такая доработка будет актуальна и востребована в связи с динамичным развитием рынка аренды недвижимости в Республике Беларусь.

Предметом исследования является управленческий учет арендных отношений в ООО «Будаўнічы рай», г. Брест. Основной вид деятельности ООО «Будаўнічы рай» – сдача в аренду собственных и взятых в лизинг торговых площадей рынка строительных материалов и услуг (171 торговый павильон с общей площадью 4 695,6 м<sup>2</sup>). Бухгалтерский учет на предприятии ведется автоматизированным способом в «1С: Предприятие 7.7» с применением в качестве базовой типовой конфигурации от ЗАО «Мисофт». Для учета специфики деятельности предприятия выполнена пользовательская доработка типовой конфигурации. В ходе исследования изучена схема управленческого учета арендных отношений в ООО «Будаўнічы рай» и проведен анализ ее автоматизации.

Один из подходов к управленческому учету подразумевает систему сбора и интерпретации информации о затратах, издержках и себестоимости оказываемых услуг, то есть – это расширенная система организации учета для целей контроля за деятельностью предприятия. Особенностью учета фактических затрат в ООО «Будаўнічы рай» на содержание павильонов является то, что по данным бухгалтерского учета, блоки павильонов объединены в инвентарные объекты основных средств (группа ОС – сооружения) и все затраты отражаются по дебету счета 20 по блокам, а не по каждому павильону в отдельности. Для формирования нанимателям счетов на оплату арендной платы предусмотрен документ, перегруженный информацией – в нем параллельно с расчетом сумм отражаются количественные показатели счетчиков электроэнергии, объема газа для отопления и другие общие затраты в денежном эквиваленте, распределяемые по павильонам пропорционально площади павильонов.

В результате исследования выработана оптимальная модель базы данных для управленческого учета арендных отношений (рис. 1).

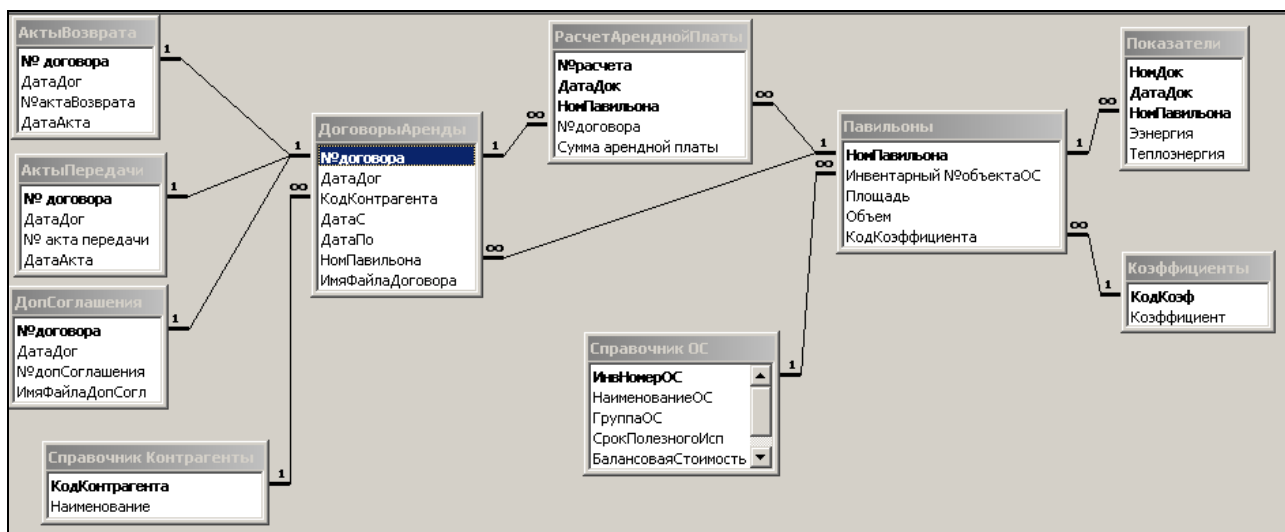


Рисунок 1 – Схема базы данных управленческого учета арендных отношений

Реализация этой модели предлагается на примере типовой конфигурации «1С: Предприятие. Бухгалтерский учет» от ОДО Юкола-Инфо в виде взаимосвязанных справочников, документов, журналов документов и отчетов. При этом все новые объекты объединены в пользовательском интерфейсе в отдельном пункте меню. Из типовой конфигурации в модели используются только два справочника – «Контрагенты» и «Основные средства (ОС)».

В предлагаемой модели базы данных справочник «Павильоны» связан с типовым справочником объектов ОС, что позволяет формировать множество необходимых отчетов по затратам, как в разрезе блоков павильонов, так и по каждому павильону в отдельности.

Согласно законодательству, арендные отношения регламентируются договором аренды, согласно которому арендодатель обязуется предоставить арендатору имущество за плату во временное пользование. В договоре аренды обязательно оговариваются сроки аренды, сумма арендной платы за месяц и прочие условия. Все изменения условий договора аренды оформляются отдельным документом – дополнительным соглашением. Связь дополнительных соглашений, актов передачи и возврата с договором об аренде реализована при помощи ввода на основании. Причем предусмотрена привязка к базе данных в 1С файлов с текстами документов в формате MS Word, их просмотр, редактирование и создание новых на основе типовых текстов. Для упорядочения учета договоров аренды и всех вытекающих документов в предлагаемой модели предназначен «Журнал документов по аренде».

По действующему законодательству [1] размер арендной платы рассчитывается исходя из площади торгового места и ставки арендной платы за 1 м<sup>2</sup>. При этом ставка арендной платы определяется путем умножения базовой ставки на повышающие (понижающие) коэффициенты. Базовая ставка арендной платы для г. Бреста составляет 0,7 базовых величин [1]. Повышающие или понижающие коэффициенты устанавливаются решениями облисполкомов. Так, для ООО «Будаўнічы рай» ныне действующие повышающие коэффициенты к ставке арендной платы были приняты решением Брестского облисполкома от 28 июля 2010 г. № 737 [2].

Для автоматизации присвоения павильонам периодически назначаемых коэффициентов предлагается применять специальную обработку, позволяющую разносить новые коэффициенты в удобном групповом режиме и записывать их значения в таблицу истории для каждого павильона.

Расходы арендодателя по содержанию, эксплуатации, текущему ремонту арендуемого недвижимого имущества, отоплению, энергоснабжению, связи, коммунальным и другим услугам не включаются в арендную плату и оплачиваются арендатором отдельно по договоренности сторон на основании фактических затрат. Таким образом, выписываемый на основании договора аренды счет на оплату включает сумму арендной платы в месяц, включая НДС, коммунальные и прочие платежи в соответствии с фактическими показателями затрат, необходимых для эксплуатации арендуемого помещения. В связи с этим предлагается выполнять регистрацию показателей счетчиков по каждому павильону при помощи отдельного документа «Показатели». Некоторые затраты, а именно: стоимость газа, затраченного на отопление, вывоз мусора, охрана и др., распределяются между павильонами пропорционально объему или площади. Расчет суммы к оплате и формирование счетов на оплату осуществляется в документе «Расчет Арендной-

Платы» на основании документа «Показатели» с учетом известных расценок, размеров распределяемых затрат и сумм предоплаты за прошлый месяц.

Внесенные предложения по доработке типовой конфигурации «1С: Предприятие» позволяют автоматизировать управленческий учет торговых помещений, сдаваемых в аренду, расчеты по арендной плате, расширить формируемые отчеты на базе данных бухгалтерского учета, а также упорядочить весь документооборот по вопросам аренды.

**Список цитированных источников:**

1. О некоторых вопросах аренды и безвозмездного пользования имуществом: Указ Президента Республики Беларусь от 23 окт. 2009 г. // Нац. реестр правовых актов РБ. – 2009. – № 518. – 1/12068.
2. Об установлении повышающих коэффициентов к ставке арендной платы на рынках и торговых центрах частной формы собственности: Решение Брестского областного исполнительного комитета от 31 марта 2010 г. // Нац. реестр правовых актов Респ. Беларусь. – 2010. – № 737. – 9/30884.
3. Подобед, Т.А. Аренда недвижимости: бухгалтерский и налоговый учет: пособие для бухгалтеров / Т.А. Подобед // Центр бухгалтерской аналитики ООО «ЮрСпектр» . – 2010.

УДК 681.3

## **ФОРМИРОВАНИЕ МОДЕЛИ-ЭТАЛОНА В ЧАСТИ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ПРОИЗВОЛЬНЫХ ВХОДОВ И МОНИТОРИНГА ПРОЦЕССОВ**

*Медведюк О.И., Сидорук О.В.*

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научный руководитель – Муравьев Г.Л., к.т.н., доцент*

Обучение моделированию делает актуальной задачу построения специальных сред, обеспечивающих использование вместо реальной системы ее программного имитатора [1] в качестве модели-эталона, имитирующей поведение системы. Это требует разработки принципов построения и использования модели-эталона, разработки правил генерации и настройки имитатора на произвольные входные потоки, правил настройки модели на пользовательские требования по мониторингу происходящих в ней процессов.

В работе рассматриваются задачи обеспечения настраиваемости параметров входных потоков (окружения) эталона, что предусматривает использование произвольных распределений, трассового задания потоков, имитацию нестационарных потоков, в том числе задание параметров потоков "по расписанию" [2]. Другая группа задач – обеспечение наблюдаемости процессов модели-эталона, что включает управление составом, полнотой, точностью мониторинга и расчета характеристик функционирования.

Работа акцентирована на максимальное использование возможностей доступных стандартных средств. Так, в качестве средства реализации модели-эталона использовалась бесплатная версия системы GPSS World, а для описания кодов – соответствующие языки GPSS и высокоуровневый язык PLUS [1].

Система строится в виде совокупности шаблона имитатора на языке GPSS, используемого для генерации моделей, специализированной библиотеки PLUS-функций и их шаблонов, программ настройки PLUS-шаблонов. Последние обеспечивают функционально-адекватную трансформацию шаблона имитатора, "вставки" вызовов PLUS-функций как для генерации входных процессов с заданными вероятностными свойствами, так и для обеспечения наблюдаемости системы, сбора данных о характеристиках ее функционирования.

Предложены: принципы построения масштабируемого шаблона имитатора и правила его настройки на параметры системы и точки мониторинга, обеспечивающие учет случайных факторов и требований пользователя; соответствующие программные средства (библиотеки PLUS-функций; классы, модули на языке C++) обеспечения функциональности имитатора. Результативность выводов подтверждена макетированием применительно к системам, описываемым в терминах стохастических сетей, сетей массового обслуживания [3].

**Список цитированных источников**

1. Рыжиков, Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии. – СПб.: Корона, 2004. – 320 с.
2. Кельтон, В. Имитационное моделирование / В. Кельтон, А. Лоу. – СПб.: Питер, 2004. – 630 с.
3. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания. – М.: Физико-математ. лит-ра, 2004. – 772 с.

УДК 004.514.62

**РАСПРЕДЕЛЕННАЯ СИСТЕМА ВИЗУАЛИЗАЦИИ СХЕМ ДОРОЖНО-ТРАНСПОРТНЫХ ПРОИСШЕСТВИЙ С ПОРТАТИВНЫМ ТЕРМИНАЛОМ**

***Мешечек Н.Н.***

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научные руководители – Дереченник С.С., к.т.н., доцент; Костюк Д.А., к.т.н., доцент*

В последнее время при создании распределенных систем ввода и отображения информации, предусматривающих возможность мобильного доступа, все чаще обращаются к решению на базе планшета с сенсорным экраном в качестве унифицированного портативного терминала. Несмотря на неидеальность сенсорного управления, предполагающего использование одной и той же поверхности (экрана) для ввода и вывода информации, популярность подобных устройств продолжает возрастать – благодаря присутствию им унификации аппаратных средств, высокой портативности и монолитности конструкции, а также гибкости программных элементов управления. Реализация на основе свободно-доступных программных платформ (преимущественно вариантов Embedded Linux) позволяет легко добавлять новые вспомогательные средства в интерфейсы устройств в виде отдельных вспомогательных приложений.

В рамках данного подхода нами предлагается реализация распределенной программно-аппаратной системы для составления и отображения схем дорожно-транспортных происшествий (ДТП). Система предназначена для использования сотрудниками ГАИ в ходе составления схемы и регистрации ДТП, а также для подготовки иллюстративных материалов разъяснительного и профилактического характера. Аппаратная часть системы представляет собой комбинацию стандартных компонент: офисного компьютера и электронного планшета с модулями GSM-связи и GPS-позиционирования, работающего под управлением ОС Android. Структура системы представлена на рис. 1.

За подготовку схем ДТП отвечают два программных компонента: Портативный редактор схем, используемый сотрудником ГАИ на месте происшествия, и САПР схем ДТП, работающая на стационарном компьютере. Оба компонента используют одну и ту же библиотеку графических примитивов, включающую элементы дорог и улиц, изображения возможных участников движения, пиктограммы дорожных знаков и светофоров, а

также поясняющие элементы, такие как стрелки, надписи, геометрические фигуры и линии. Элементы дорог включают наиболее распространенные шаблоны дорог и перекрестков, а также варианты дорожной разметки. Для участников движения предусматривается возможность задания произвольного цвета графического примитива.

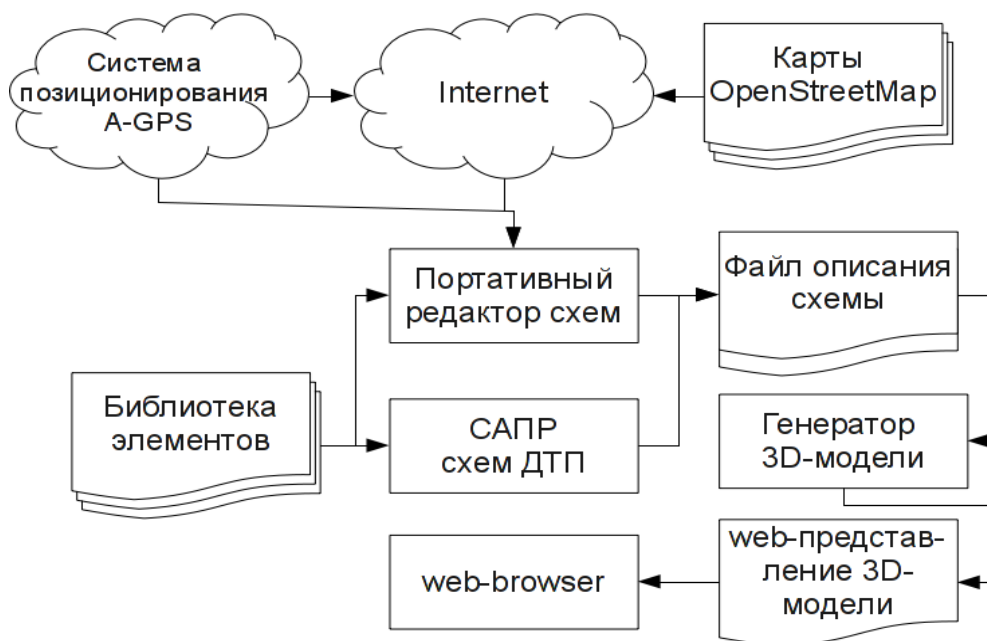


Рисунок 1 – Структура системы

Подсистема формирования схемы на стационарном компьютере имеет классический интерфейс САПР и позволяет формировать схему из примитивов, выбирая их на инструментальной панели соответствующей группы.

В отличие от стационарной версии, портативный редактор схем работает на электронном планшете. Интерфейс составления схемы модифицирован с учетом особенностей емкостного сенсорного экрана и максимально использует принципы прямого объектного управления. Манипуляции над примитивами выполняются типовыми интуитивно-понятными жестами: прямолинейное движение для перемещения, щипковые движения для изменения размера, круговые – для вращения и др. Кроме того, создание схемы на планшете упрощено использованием готовых свободно-распространяемых карт городов, предоставляемых проектом OpenStreetMap. Для загрузки фрагмента карты используется автоматическое определение географических координат с помощью модуля A-GPS. Получаемый фрагмент интегрируется в создаваемую схему в виде наборов полигонов и линий, а также текстовых надписей.

И для настольной САПР, и для портативного редактора предусматривается возможность создавать несколько кадров для иллюстрации развития ДТП. Созданная схема ДТП сохраняется в виде XML-файла, содержащего элементы схемы и значения их атрибутов.

Модуль визуализации схемы ДТП включает генератор трехмерной модели, запускаемый на стационарном компьютере. Результатом, помимо стандартных растровых изображений схем, являются динамические модели ДТП, генерируемые в виде фрагментов кода на html и пригодные к интеграции на произвольную веб-страницу. Динамика веб-представления обеспечивает большую наглядность схемы за счет возможности проиграть ее, отслеживая с разных ракурсов перемещения участников происшествия.

УДК 681.3

**РАЗРАБОТКА СТРУКТУРЫ БАЗЫ ДАННЫХ И КОНЦЕПЦИИ ИС «УЧЕТ НИРС ВУЗА»***Мисейко А.П., Ракитский А.В.**УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научный руководитель – Хвещук В.И., к.т.н, доцент*

Одной из важных задач при оценке деятельности университета является учет и документирование результатов научно-исследовательской работы студентов (НИРС) на различных структурных уровнях вуза: по университету в целом, по отдельному факультету, по отдельной кафедре, по отдельному преподавателю. Все результаты НИРС разделены на несколько групп (эффективность НИРС, основные количественные показатели по НИРС, студенческие научные объединения, НИРС и подготовка научных кадров), каждая из которых включает определенную совокупность отдельных показателей. В процессе решения данной задачи участвуют практически все преподаватели вуза, руководители различных структурных и научных подразделений вуза (лаборатории и т.д.), студенты, бакалавры и аспиранты. В работе рассматриваются результаты разработки структуры базы данных (БД) и концепции информационной системы (ИС) для автоматизации задачи учета НИРС вуза.

Основу любой ИС составляет БД, которая ограничивает спектр возможных задач по автоматизации и имеет первостепенное значение. Разработка структуры БД выполнялась по следующей схеме: определение внешней среды ПрО (источников и потребителей информации о НИРС); построение схемы документооборота в ПрО; определение задач для автоматизации, их анализ и классификация; построение концептуальной и логической моделей ПрО; нормализация структуры БД и другие. Основные результаты процесса разработки БД и ИС следующие.

**Определение внешней среды задачи.** Данная задача выделена из процесса функционирования вуза и для нее определены входные и выходные потоки информации, инициаторы и потребители этой информации. Входную информацию задачи можно разделить на следующие группы:

1. Нормативно-справочные документы вуза (и других организаций) об организации и проведении научных мероприятий (например, конференций, конкурсов и других мероприятий).
2. Нормативные документы об участниках (о студентах, бакалаврах, аспирантах) и руководителях НИРС вуза.
3. Нормативные документы о научных подразделениях (о лабораториях, темах и т.д.) и студенческих научных объединениях вуза.

Источниками входной информации являются научно-исследовательский сектор, отдел кадров, деканат факультета и другие подразделения вуза.

Выходная информация представляет собой совокупность различных отчетных документов (например, отчеты «Эффективность НИРС», «Основные показатели НИРС», «Студенческие научные общества», «НИРС и подготовка научных кадров» и другие документы), которые формируются, как правило, два раза в год и используются на разных уровнях организационной структуры вуза для оценки результатов НИРС вуза.

**Определение будущих пользователей ИС.** Основными потребителями информации о результатах НИРС являются сотрудники университета, которые осуществляют руководство НИРС, а также сотрудники, ответственные за организацию научной деятель-

ности НИРС на разных уровнях (вуз, факультет, кафедра). Выделены следующие типы пользователей ИС:

1. Проректор университета по научной работе, его заместитель по НИРС.
2. Декан факультета, его заместитель по НИРС на факультете.
3. Заведующий кафедрой, его заместитель по НИРС на кафедре.
4. Преподаватели кафедр вуза.
5. Студенты, аспиранты, бакалавры.
6. Администратор системы.

**Определение задач для автоматизации.** На основе изучения и анализа процесса учета НИРС в вузе выделены следующие функциональные группы задач для будущей автоматизации:

1. Формирование и ведение информации об участниках НИРС (о студентах, бакалаврах, аспирантах), руководителях НИРС (о преподавателях) и пользователях системы (см. выше).
2. Формирование и ведение информации о научных организационных структурах НИРС (о конференциях, форумах, научных объединениях, грантах, выставках, конкурсах и других структурах).
3. Формирование информации о результатах НИРС (о статьях, тезисах, докладах, внедрениях и других результатах).
4. Формирование отчетных документов по НИРС (примерный перечень см. выше) для разных групп пользователей.
5. Организация санкционированного доступа пользователей к ресурсам системы.

**Разработка структуры БД.** Создание модели структуры БД проводилась по классической схеме:

- разработка концептуальной модели (КМ) БД, включающая создание локальных КМ для каждой задачи (определение сущностей, атрибутов, ключей, доменов, диаграммы «сущность-связь») и их объединение в единую КМ БД;
- разработка логической модели БД (преобразование КМ в логическую модель, нормализация отношений и другие действия);
- выбор средств реализации и разработка физической модели БД.

Результатом разработки является совокупность взаимосвязанных таблиц, которые находятся в третьей нормальной форме и содержат все атрибуты, необходимые для формирования отчетных документов по НИРС вуза.

**Концепция ИС.** В основу построения ИС положена клиент-серверная архитектура системы. Система представляет собой совокупность приложений, взаимодействующих между собой через общую БД. Для каждого типа пользователя определено отдельное приложение. Предполагается поэтапная реализация ИС в виде совокупности следующих приложений:

- приложение «Преподаватель» – формирование информации о результатах НИРС, формирование отчетных документов о результатах НИРС преподавателя;
- приложение «Кафедра» – формирование нормативно-справочной информации о мероприятиях кафедры, формирование отчетных документов о результатах НИРС кафедры;
- приложение «Факультет» – формирование нормативно-справочной информации о мероприятиях факультета, формирование отчетных документов о результатах НИРС факультета;

- приложение «Университет» – формирование нормативно-справочной информации о мероприятиях вуза, формирование отчетных документов о результатах НИРС вуза;
- приложение «Администратор» – создание, восстановление, архивирование БД, формирование и ведение нормативно-справочной информации по НИРС вуза.

**Выводы.** Разработана структура БД и концепция ИС для автоматизации процесса решения задачи учета и документирования результатов НИРС на разных уровнях вуза. Предполагается продолжить работы по созданию ИС «Учет НИРС вуза» в рамках курсового и дипломного проектирования.

УДК 004

## **СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СЕМЕЙСТВА ЯДЕР CORTEX-M**

***Морозова В.С., Стальбовская Н.И.***

*УО «Белорусский национальный технический университет», г. Минск  
Научный руководитель – Щербаков А.В., доцент, к. ф.-м. наук*

Архитектура Advanced RISC Machines (ARM) была разработана одноименной английской компанией, организованной в 1990 году. Ядро Cortex, в отличие от других ядер семейства ARM, является завершенным процессорным ядром, объединившим в себе стандартный центральный процессор и системную архитектуру. В основе Cortex использована Гарвардская архитектура. Cortex-семейство доступно в трех основных концепциях: Cortex-A (Application), Cortex-R (Real Time) и Cortex-M – для наиболее распространенных и востребованных применений в стандартных приложениях, которое очень критично относится к стоимости и срокам выпуска процессоров, в нее входят: Cortex-M3, Cortex-M0, Cortex-M1 и Cortex-M4.

ARM Cortex-M3 – 32-бит процессор был разработан специально для высокопроизводительных приложений с ограниченным бюджетом. Ядро процессора обладает производительностью, достаточной для выполнения команд умножения и деления за один машинный цикл. Основные характеристики ARM Cortex-M3:

- самая высокая производительность – 150 МГц;
- до 32 уровня приоритетов;
- встроенный модуль энергосбережения;
- поддержка огромным количеством средств разработки третьих фирм;
- реализует набор инструкций Thumb / Thumb-2; Single cycle 16,32-bit MAC; Single cycle dual 16-bit MAC;
- поддерживает работу группы команд: операции над данными, ветвление, генерации исключений, эксклюзивная загрузка сигнала;
- поддерживается всеми доступными средствами разработки для ARM процессоров.

Структурная блок-схема процессорного ядра ARM Cortex-M3 приведена на рис. 1, с последующим кратким пояснением.

Процессор ARM Cortex-M3 содержит контроллер прерываний Nested Vectored Interrupt Controller (NVIC), обеспечивающий высокоскоростную обработку прерываний. NVIC обеспечивает до 16-ти уровней приоритетов прерываний. Оптимизированный для пониженного энергопотребления контроллер NVIC обеспечивает режимы Sleep и Deep Sleep, которые позволяют быстро снизить потребление. Ядро ARM Cortex-M3 содержит



блок защиты памяти – Memory Protected Unit (MPU), который обеспечивает граничное управление памятью, позволяющий приложениям реализовывать различные уровни привилегий безопасности, разделяя код, данные и стеки для различных задач, что требуется для критичных к сбоям решений.

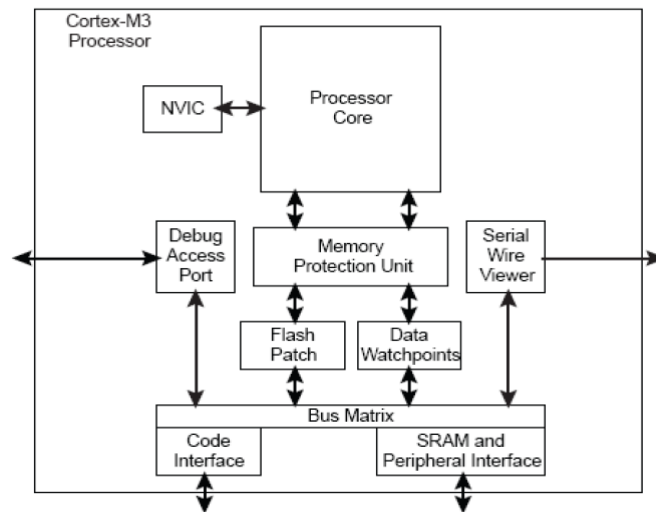


Рисунок 1 – Структурная блок-схема процессорного ядра Cortex-M3

Ядро ARM Cortex-M3 реализует аппаратную поддержку функций отладки. Отладка позволяет отображать состояние системы и памяти через стандартный JTAG разъем или 2-проводной интерфейс Serial Wire Debug (SWD). Для трассировки в ядре реализован модуль ITM (Integrated Trunk Module), отслеживающий точки просмотра данных и сообщения профилирования.

ARM Cortex-M0 – это Cortex-M3 с усеченным набором команд, предназначенный для более дешевых и менее требовательных с точки зрения производительности решений. ARM Cortex-M0 позволит заменить 16-битные микроконтроллеры и, в меньшей степени, 8-битные микроконтроллеры. Основные характеристики ARM Cortex-M0:

- самая высокая производительность – 80 МГц;
- до 14 уровней приоритетов;
- позволяет достигнуть снижения средней потребности мощности по сравнению с аналогичными примерами;
- поддержка огромным количеством средств разработки третьих фирм;
- реализует набор инструкций Thumb/ Thumb-2, может выполнять Thumb подпрограммы процессоров ARM7 и ARM9;
- поддерживается всеми доступными средствами разработки для ARM процессоров;
- поддерживает работу группы команд: операции ветвление, расширенные 32-битные команды, команды блокировки;
- снизу вверх совместим с процессором Cortex-M3.

32-битное ядро процессора ARM Cortex-M1, разработанное фирмой ARM в тесном сотрудничестве с Корпорацией Actel, представляет собой первый ARM процессор, предназначенный для работы в ПЛИС. Основные характеристики ARM Cortex-M1:

- самая высокая производительность – 80 МГц;
- до 14 уровней приоритетов;
- позволяет достигнуть снижения средней потребляемой мощности по сравнению с аналогичными примерами;

- поддержка огромным количеством средств разработки третьих фирм;
- выполняет любую программу с набором команд Thumb, может выполнять Thumb подпрограммы процессоров ARM7 и ARM9;
- снизу вверх совместим с процессором Cortex-M3;
- поддерживает работу группы команд: операции над данными, ветвление, генерации исключений, множественная загрузка сигнала;
- поддерживается всеми доступными средствами разработки для ARM процессоров.

Следующим этапом развития является серия на базе ядра Cortex-M4, лицензию приобрели: NXP, STMicroelectronics, Freescale, Winbond Electronics, Texas Instruments и др. Процессор Cortex-M4 представляет собой высокоэффективное решение для приложений управления цифровым сигналом, сохраняя ведущие в отрасли показатели семейства процессоров ARM Cortex-M по поддержке микроконтроллерных функций. Основные характеристики ARM Cortex-M4:

- самая высокая производительность – до 168 МГц;
- до 32 уровней приоритетов;
- высокая эффективность обработки данных вкуче с низким потреблением энергии;
- поддержка огромным количеством средств разработки третьих фирм;
- совместим с процессором Cortex-M3;
- реализует набор инструкций Thumb / Thumb-2; Single cycle 16,32-bit MAC; Single cycle dual 16-bit MAC;
- поддерживает работу группы команд: операции над данными, ветвление, генерации исключений, эксклюзивная загрузка сигнала;
- поддерживается всеми доступными средствами разработки для ARM процессоров.

В числе областей применения процессора ARM Cortex-M0 названы медицинские приборы, счетчики, управляющие системы, игровые аксессуары, компактные блоки питания. Основные сферы применения ARM Cortex-M1 – контрольно-измерительные встраиваемые системы, сетевое и телекоммуникационное оборудование. Основные сферы применения ARM Cortex-M3 – бытовая техника, автоматизированный электропривод, системы мониторинга, автоматизация зданий, преобразовательная техника, игровые устройства и многое другое. Область применения ARM Cortex-M4 охватывает управляющие системы, автомобильное производство, автоматизированные промышленные задачи.

#### **Список цитированных источников**

1. Меджахед, Дж. STM32: эпоха 32-битных микроконтроллеров наступила // Новости электроники [Электр. ресурс]. – 2011. – Режим доступа: <http://www.compeljournal.ru/enews/2011/2/3> – Дата доступа: 16.02.2011

УДК 51-7

## **ИНСТРУМЕНТАЛЬНАЯ ПОДДЕРЖКА КОЛИЧЕСТВЕННОЙ ОЦЕНКИ ПОТЕНЦИАЛЬНЫХ РИСКОВ ИТ-ПРОЕКТОВ**

**Неверович Ж.В.**

*УО «Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники», г. Минск*

*Научный руководитель – Поттосина С.А., к. ф.-м. наук, доцент*

Эффективное управление рисками ИТ-проектов включает в себя не только проведение анализа рисков на качественном содержательном уровне, но и их количественную оценку. Методы количественной оценки потенциальных рисков проекта достаточно сложны в

применении и затратные по времени. Для того чтобы облегчить и ускорить процесс количественной оценки, была спроектирована программа количественной оценки потенциальных рисков IT-проекта. Разработанная программа позволяет вести учет рисков проекта, подлежащих количественной оценке, задавать модель параметров проекта для проведения количественной оценки, проводить анализ чувствительности с построением диаграммы «торнадо», осуществлять имитационное моделирование Монте-Карло и строить графики распределения значений параметров проекта.

Программа реализована на языке Java с использованием веб-сервиса на основе JAX-WS 2.0. Бизнес-логика системы количественной оценки потенциальных рисков IT-проекта реализована EJB session-компонентами версии 3.0. В качестве СУБД выбрана PostgreSQL 9.1. Доступ к данным в СУБД осуществляется с помощью Java Persistence API TopLink. В качестве сервера приложений выбран Sun Glassfish Enterprise Server v3. При построении модели параметра проекта используются символьные выражения. Для организации вычислений данных выражений применяется обратная польская запись.

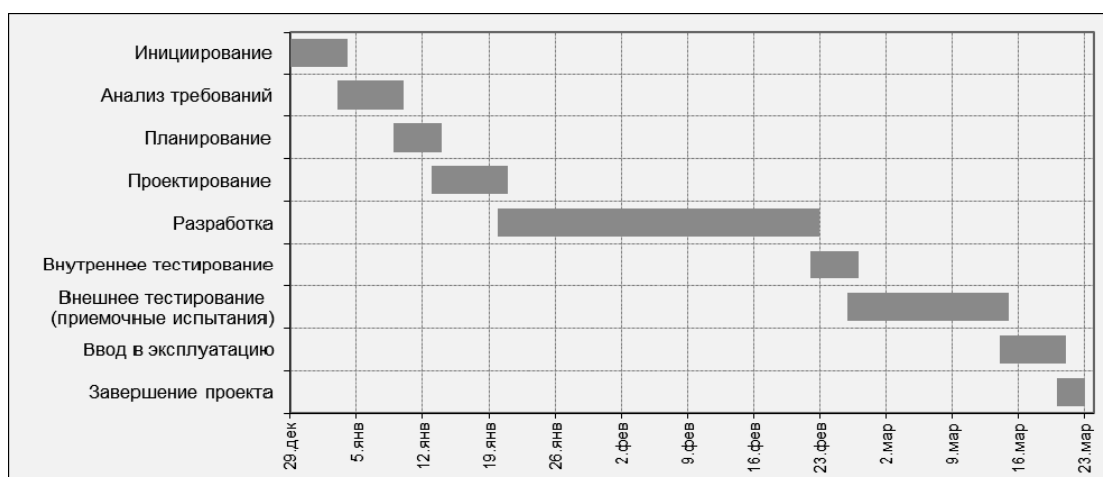
С помощью разработанной программы проведем количественную оценку рисков IT-проекта по созданию каталога товаров и услуг интернет-магазина. Диаграмма Ганта данного проекта представлена на рисунке 1.

Команда проекта выявила наличие в проекте риска увеличения длительности всего проекта. Для проведения количественной оценки риска будем использовать имитационное моделирование Монте-Карло. Метод Монте-Карло способен значительно повысить качество принимаемых решений, предлагая четкий анализ рисков, различных сценариев и вероятности достижения цели [1].

Опираясь на диаграмму Ганта, зададим длительность проекта формулой (модель параметра проекта)

$$T = \sum_{i=1}^n t_i, \tag{1}$$

где  $T$  – длительность всего проекта;  $t_i$  – длительность  $i$ -го этапа проекта;  $n$  – количество этапов проекта.



**Рисунок 1 – Диаграмма Ганта проекта по созданию каталога товаров и услуг интернет-магазина**

Основная идея метода Монте-Карло заключается в том, что длительность каждого этапа проекта рассматривается как случайная величина. В качестве функции распределения продолжительности этапов выбирается треугольное распределение, описание

которого требует задания трех параметров: минимального ( $t_L$ ), наиболее вероятного ( $t_M$ ) и максимального ( $t_H$ ) значений длительности этапов проекта. Минимальные, наиболее вероятные и максимальные значения продолжительности этапов определяются экспертами, которые имеют соответствующий опыт работы в подобных проектах.

Имитация проекта подразумевает расчет по математической модели общей длительности проекта заданное количество раз. Число итераций расчета влияет на точность результата: чем больше, тем точнее, но слишком большое их число замедляет расчет. Для данного проекта общую длительность проекта рассчитаем 500 раз.

На каждой итерации продолжительности этапов проекта определяются с помощью генерируемого в диапазоне от 0 до 1 случайного числа  $R$ , которое вводится согласно треугольному распределению в формулу

$$t_i = \begin{cases} t_H - \sqrt{(t_H - t_M)(1 - R)(t_H - t_L)}, & \text{если } R > \frac{t_M - t_L}{t_H - t_L}, \\ t_L + \sqrt{R(t_M - t_L)(t_H - t_L)}, & \text{иначе,} \end{cases} \quad (2)$$

где  $t_i$  – длительность  $i$ -го этапа согласно треугольному распределению;

$R$  – случайное число в диапазоне от 0 до 1;

$t_L$  – минимальная (оптимистичная) длительность  $i$ -го этапа по мнению экспертов;

$t_M$  – наиболее вероятная длительность  $i$ -го этапа по мнению экспертов;

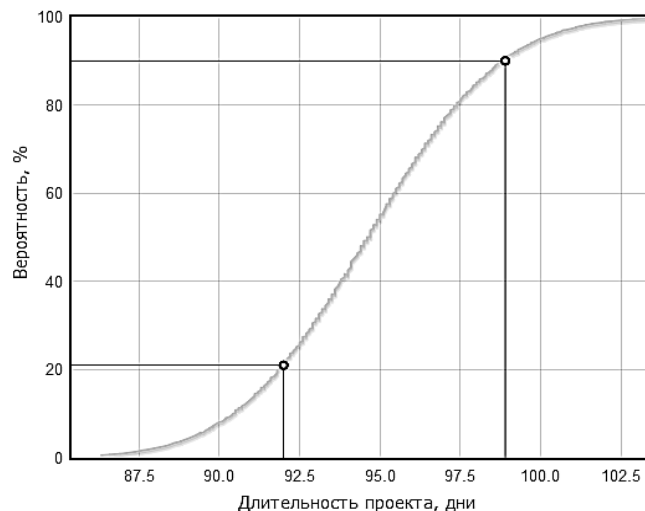
$t_H$  – максимальное (пессимистичное) значение длительности  $i$ -го этапа, по мнению экспертов.

Подставляя вычисленные значения продолжительности этапов в модель (формула 1), определяется длительность всего проекта. Таким образом, по результатам всех итераций получается набор значений длительности всего проекта – их распределение нам и интересно посмотреть.

На рисунке 2 изображен график распределения длительности проекта в целом. График распределения позволяет получить ответы на следующие вопросы:

– Насколько вероятно, что команда проекта сумеет завершить проект в срок, установленный руководством?

– Если вероятность благоприятного исхода составит менее 90% (такое значение предпочтительно с точки зрения команды), то, на сколько дней необходимо сдвинуть крайний срок?



**Рисунок 2 – График распределения длительности проекта**

Чтобы ответить на 1-й из поставленных вопросов, на графике необходимо:

- отметить на оси X продолжительность проекта, которая соответствует сроку, установленному руководством (92 дня);
- сдвинуться от этой даты вверх до пересечения с кривой графика;
- сдвинуться от точки пересечения влево до пересечения с осью Y.

Значение, находящееся на оси Y (21%), и есть вероятность того, что проект удастся завершить за 92 дня.

Совершенно ясно, что эта вероятность значительно ниже, чем предпочитаемая в 90%. Определяется длительность проекта с 90%-ой вероятностью. По графику видно, что крайний срок исполнения проекта нужно сдвинуть на 7 дней (2-й вопрос).

#### **Список цитированных источников**

1. Милошевич, Д.З. Набор инструментов для управления проектами / Д.З.Милошевич; пер. с англ. Е.В. Мамонтова – М.: Компания АйТи; ДМК-Пресс, 2008. – 729 с.

УДК 681.3

## **АЛГОРИТМЫ ПОСТРОЕНИЯ ТЕСТОВЫХ СПЕЦИФИКАЦИЙ СИСТЕМ**

***Никонюк А.Н., Осмоловец А.М.***

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научный руководитель – Муравьев Г.Л., к.т.н., доцент*

Для автоматизации тестирования моделей, для целей обучения аналитическому и имитационному моделированию систем, для генерации уникальных вариантов архитектур необходимо решать задачу автоматического формирования параметров систем заданной сложности и режима функционирования, соответствующих тестовых описаний. Такие спецификации, представляющие собой наборы значений параметров и характеристик систем, описываемых в терминах сетей массового обслуживания [1, 2], необходимы и для целей тестирования и для построения имитационных моделей, оценки их адекватности.

Трудоемкость формирования значений параметров большого числа систем, трудоемкость проверки их корректности, трудности обучения моделированию на реальных системах делают эту задачу актуальной.

Указанные описания должны обладать такими свойствами, как уникальность, управляемая сложность, полнота, контролируемость, документированность.

Управляемая сложность обеспечивается наличием эмпирически, либо математически обоснованных правил порождения тестовых описаний, правил их хранения и учета. Полнота обеспечивается наличием в спецификациях наборов соответствующих характеристик, выполняющих роль эталонных. Контролируемость наряду с полнотой обеспечивается автоматической генерацией соответствующих результативных моделей и их имитацией, а документированность – генерацией соответствующих отчетов.

Соответственно для компьютерной генерации тестовых описаний необходимы:

- алгоритмы генерации сетевых структур и их параметров;
- алгоритмы и правила генерации имитационных моделей сетевых структур;
- процедуры настройки алгоритмов на заданные ограничения по сложности и режимам функционирования сетей;

- средства имитационного моделирования для тестирования описаний сетевых структур и получения наборов характеристик требуемой полноты и точности;
- процедуры ведения базы данных тестовых описаний, описаний моделей;
- процедуры генерации отчетов по результатам выполнения предыдущих пунктов.

В основу генерации тестовых описаний заданной сложности положен смешанный аналитико-рандомизированный подход. На начальном этапе устанавливаются ограничения по сложности описаний, например, в части количества узлов и потоков сети, устанавливаются требования к режиму функционирования сети, значениям коэффициентов загрузок узлов и т.п. При отсутствии ограничений на число вариантов обеспечивается порождение всех возможных сетевых структур.

Для этого генерируются каркасы сетей заданной сложности в одномерном формате на базе рекурсивного алгоритма перебора. “Сжатый” формат представления результатов этого этапа использован для оптимизации программной реализации алгоритмов. Полученные каркасы переводятся в матричный формат для выполнения управляемого “дооснащения” КС вероятностными узлами, реализующими прямые и обратные связи в структуре сети. Анализ и отсеивание некорректных каркасов производится на базе алгоритма обхода графов.

Далее выполняется доопределение значений параметров структур. Аналитически определяются значения матриц переходов, интенсивности потоков заявок и др., выполняется декомпозиция обобщенных параметров по потокам заявок. Вероятностным способом определяются такие недостающие параметры, как распределения законов поступления и обслуживания заявок в узлах сети, канальности узлов и т.д.

При необходимости могут быть использованы и другие типы узлов стохастических сетей, например, ресурсы типа память (накопитель), разделяемые заявками во времени и объеме. Для этого предложены алгоритмы трансформации исходных каркасов, обеспечивающие расстановку этих узлов с учетом заданных ограничений на количество узлов, типы (накопители устройств, накопители фрагментов сети, всей сети), режимы использования (способы освобождения и занятия).

Полученные описания используются для автоматической генерации имитационных моделей, выполняющих роль эталона – программного имитатора системы. Для получения имитационных моделей и моделирования использовалась бесплатная версия системы GPSS World [3].

Таким образом, предложен:

- подход к автоматизации формирования тестовых спецификаций систем, описываемым в терминах сетевых моделей [1, 2];
- правила, алгоритмы генерации описаний, включая генерацию каркасов сетей, структур и параметров сетей;
- правила трансформации сетевых спецификаций в модельные описания на языке GPSS;
- программные средства обеспечения функциональности системы (классы, поддерживающие все этапы генерации и сохранения результатов, модули на языке C++).

Результативность выводов подтверждена макетированием на языке C++ с использованием кросс-платформенного инструментария QT, библиотеки линейной алгебры uBLAS, системы моделирования GPSS World.

#### **Список цитированных источников**

1. Советов, Б.Я. Моделирование систем / Б.Я. Советов, С.А. Яковлев. – М.: Высш. шк., 2001. – 430 с.

2. Ивницкий, В.А. Теория сетей массового обслуживания / В.А. Ивницкий. – М., Физико-математическая литература, 2004. – 772 с.
3. Рыжиков, Ю.И. Имитационное моделирование. Теория и технологии / Ю.И. Рыжиков. – СПб.: Корона, 2004. – 320 с.

УДК 004.6

## **ОПТИМИЗАЦИЯ ВЫВОДА ТЕКСТОВОЙ ИНФОРМАЦИИ СТАНДАРТНЫХ ФОРМ WEB-ПРИЛОЖЕНИЙ (на примере системы управления «Учет военнообязанных»)**

**Охримчук В.В.**

*УО «Брестский государственный университет имени А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Козинский А.А., к. пед. н., доцент*

В статье описаны некоторые этапы моделирования программной системы управления учетом военнообязанных. Их изложение представляет интерес, во-первых, как поэтапное описание реализации математической модели системы управления, во-вторых, как задача, требующая применения нестандартных решений, моделей и средств современных технологий программирования.

Объектом автоматизации системы «Учет военнообязанных» является комплекс задач по постановке военнообязанных на учет. Для этого используются: извещения, приписные карты, именные списки и другие документы, представленные стандартными формами учета. Цель автоматизации – сокращение большого объема ручных трудозатрат для ведения информации и отчетных документов по решению комплекса задач учета военнообязанных, учетных карточек, приписных карт, мобилизационных предписаний, извещений, повесток, алфавитных карточек, именных списков. Все вышеперечисленные компоненты системы дают представление об объеме документов, подлежащих обработке и, соответственно, доле труда. Большая часть такого труда в настоящее время выполняется сотрудниками военкомата без применения средств автоматизации.

Сопутствующими задачами системы управления «Учет военнообязанных» определены: поиск продублированных данных о ВО в форме визуального контроля по совпадающим фамилии, имени, отчеству с выводом для проверки дополнительных сведений (дата рождения, адрес места жительства, другие сведения по выбору), масштабирование данных для вывода в поле формы ограниченного размера, импорт данных из имеющейся базы данных. Отметим, что существующая система управления данными не удовлетворяет требованиям заказчика, что и послужило основанием для разработки описываемой системы.

Число экземпляров форм, требующих обработки пропорционально мощности базы данных. Число печатных форм на каждого военнообязанного более десяти. Предварительная экспертная оценка показала, что мощность базы данных составляет около 100 тысяч записей.

Сложность автоматизированного заполнения такого рода форм (фиксированный размер и сложная разметка) состоит в невозможности априорно определить занимаемое место для вывода данных. Использование мелких шрифтов на электронной форме затрудняет чтение информации и эстетическое представление.

Входная информация для системы представлена стандартными печатными формами. Фрагмент одной из форм, реализованных в системе, приведен на рисунке.

Год рождения	1980				Степень годности
(18.) № ВУС	Код должности	УЧЕТНАЯ КАРТОЧКА			Г
100	915	к военному билету серии № <u>НБ 1047628</u>			
(фамилия, имя, отчество)	(10.) Военское звание	<u>рядовой</u>	ПРЕДНАЗНАЧЕН:		
<u>Иванов</u>			№ команды и литер по ВУС	<u>Р00000А</u>	
<u>Иван</u>	(16.) Категория учета	<u>1</u>		<u>100</u>	
<u>Иванович</u>					
Число, месяц, год рождения		(17.) Группа учета	<u>ОПС</u>	на воинскую должность	<u>стрелок</u>
<u>14</u>	<u>07</u>	<u>1980</u>	(18.) Состав		
(1.) Место рождения			<u>солдаты</u>	В/звание по штату	<u>рядовой</u>
<u>г. Брест</u>					
<u>Брестская обл.</u>		(19.) Наимен. воинск. должности и ВУС (долж. квалифик.)		№ маршрута	<u>10/1284 10/2154</u>

**Рисунок – Фрагмент учетной карточки**

Решение проблемы было построено с использованием Java Script Фреймворка jQuery, который позволяет облегчить работу с элементами HTML страниц. С его помощью реализована возможность динамического масштабирования записей на электронной форме на стороне клиента (для наглядности на рисунке некоторые масштабируемые данные подчеркнуты). Фрагмент скрипт-кода для масштабирования приведен ниже.

Фрагмент 1 – jQuery код для масштабирования

// jQuery методы для вписывания данных в формы

```
$(document).ready(function () {
```

```
    var minFontSize = 8;
```

```
    var minLineHeight = 7;
```

// Уменьшение размеров текста, чтобы он не выходил за внешний контур ячейки

```
    $('<u>.data</u>').each(
```

```
        function() {
```

```
            var cont = $(this).parent().parent();
```

```
            if (cont.hasClass('dcont'))
```

```
                cont = cont.parent();
```

```
            var width = cont.width();
```

```
            var height = cont.height();
```

```
            // Уменьшаем по ширине
```

```
            while (($<u>this</u>.width() > width - 2) || ($<u>this</u>.height() > height + 1)) {
```

```
                var newFontSize = $<u>this</u>.css('font-size');
```

```
                newFontSize = newFontSize.replace("px", "") - 1;
```

```
                $<u>this</u>.css('font-size', newFontSize + 'px');
```

```
                if (newFontSize <= minFontSize) {
```

```
                    $<u>this</u>.css('width', width + 'px');
```

```
                    break;
```

```
                }
```

```
            }
```

```
            // Уменьшаем отступы между строками
```

```
            if (height > 0)
```

```
                while ($<u>this</u>.height() > height) {
```



```

var newLineHeight = $(this).css('line-height');
newLineHeight = newLineHeight.replace("px", "") - 1;
$(this).css('line-height', newLineHeight + 'px');
if (newLineHeight <= minLineHeight) {
    $(this).css('height', height + 'px');
    break;
}
}
$(this).css('position', 'static');
});
});

```

Условиями функционирования программной системы учета военнообязанных является сетевая вычислительная система, состоящая из сервера, работающего под управлением операционной системы (Microsoft либо Linux), с установленным программным обеспечением (сервер Apache, MySQL, PHP), протоколами Ipv4, Ipv6, IPX, TCP и стандартных браузеров-клиентов Firefox, Google Chrome, Opera [2].

К пользователям программной системы учета военнообязанных предъявляются следующие требования: владение навыками ведения диалога средствами операционной системы; наличие навыков внесения и редактирования записей базы данных с использованием экранных форм; умение использовать средства СУБД для формулирования запросов; навыки работы с браузером.

Приведенное описание этапов создания системы «Учет военнообязанных» дает представление об использованных математических моделях, технологиях и средствах, которые повышают эффективность работы программистов.

В настоящее время готовится внедрение и испытание системы «Учет военнообязанных».

#### **Список цитированных источников**

1. Java Script jQuery [Электр. ресурс] – Режим доступа: <http://jquery.com/>. – Дата доступа: 20.09.2011.
2. HTTP-сервер Apache [Электр. ресурс] – Режим доступа: <http://apache.com/>. – Дата доступа: 20.09.2011.

УДК 512:004

## **ИЗ ПРАКТИКИ ПРИМЕНЕНИЯ ТЕХНИЧЕСКИХ СРЕДСТВ ОБУЧЕНИЯ ПРИ ИЗУЧЕНИИ ОСНОВ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ**

***Ракович О.Г.***

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест*

Процесс информатизации общества затрагивает сферу образования не только в качестве поддержки и информационного обеспечения учебного процесса, но и как неотъемлемая часть самого процесса подготовки студентов по специальным разделам, а также по различным предметам, не имеющим прямого отношения к информатике. Таким образом, подготовка в области информационных технологий для будущего педагога становится не менее важной, чем для специалиста в любой другой области.

Постепенно информатизация как особая сфера человеческой деятельности все более гуманизируется, что связано, с одной стороны, с развитием самой вычислительной

техники, с другой, - с невозможностью обработать гуманитарную информацию без специальных технологий, что приводит к необходимости вносить в курс информационных технологий на гуманитарных специальностях изучение соответствующих программных средств. Необходимо, чтобы не только профильные учителя информатики могли работать с имеющейся в распоряжении школы компьютерной техникой, но и учителя - предметники, специализирующиеся не в области информатики, могли на достаточно высоком уровне взаимодействовать с компьютерным оборудованием и специализированными прикладными программными продуктами.

Студенты овладевают такими современными методами научного познания, как формализация, моделирование, компьютерный эксперимент и т.д. Имеются в виду умения грамотно пользоваться источниками информации, оценивать достоверность информации и соотносить полученную информацию с накопленными ранее знаниями, умениями правильно организовать информационный процесс и оценивать информационную безопасность.

Одной из основных целей преподавания курса «Основы информационных технологий» для студентов гуманитарных специальностей считаем необходимым показать будущим учителям - предметникам, не связанным с информационными технологиями, различные варианты применения компьютеров и компьютерных систем в преподавании различных предметов. Кроме того, в ходе обучения студенты должны сформировать у себя умения и навыки работы с наиболее распространенными программными продуктами и создавать с их помощью различные вспомогательные дидактические программы по своему предмету.

В процессе проведения практических занятий по дисциплине «Основы информационных технологий» со студентами социально-педагогического факультета нами был применен способ проверки приобретенных знаний, умений и навыков в виде проведения фрагмента урока с использованием мультимедиа средств обучения. В частности, выполнение практических заданий, посвященных созданию презентаций, требовало выбора соответствующей своей специализации темы урока. Применение презентации способствовало повышению наглядности, усвоению большего количества материала за меньший промежуток времени. Кроме того, необходимо было продемонстрировать на практике эффективность использования технических средств обучения, а именно – компьютера (ноутбука) и мультимедиа-проектора. В результате проведения занятия в такой форме студенты получали оценку не только за создание наглядного материала, но и за умение правильно его применить в практической деятельности, то есть продемонстрировать педагогические способности. Хотелось бы отметить, что возможность показать себя в качестве педагога перед своими сокурсниками вызывает у студентов особый интерес к подобной форме проведения занятий. В то же время обращалось особое внимание и на то, насколько умело и быстро студент может подготовить используемую технику и уверенно ли владеет ею в процессе демонстрации учебного материала. Выяснилось, что выбор подходящей темы урока, создание соответствующего теме презентационного материала и даже умение грамотно преподнести его учащимся не вызывают особых нареканий.

В прошлом студенты овладевали навыками работы с такой техникой в процессе изучения дисциплины «Технические средства обучения». К сожалению, в настоящее время данная дисциплина практически исключена из учебных планов гуманитарных специаль-

ностей педагогических вузов. При этом аргументируется данная ситуация тем, что на современном этапе все традиционные технические средства обучения успешно заменил компьютер. Однако к современным средствам обучения относятся мультимедиа-проектор, сканер, графический планшет, интерактивная доска. В недалеком будущем в школах будет применяться такое средство обучения, как электронный планшет, который придет на смену традиционным учебникам. Необходимость квалифицированного подхода к современным техническим средствам обучения со стороны будущих преподавателей очевидна, так как невозможно каждого педагога обеспечить компетентным в обслуживании данных устройств помощником. Реальность же такова, что у студентов возникают проблемы при применении мультимедиа-средств на этапе подготовки и в процессе их использования. Решение этой проблемы видится в том, чтобы включить в состав дисциплины «Основы информационных технологий» теоретическую и практическую составляющие изучения технических средств обучения. Поэтому в рамках преподаваемой дисциплины было уделено особое внимание овладению навыками грамотного обращения с разнообразной мультимедиа-техникой. Студенты практиковались в умении подключать, настраивать, устранять мелкие неполадки оборудования. Проведение таких занятий сократило время на подготовку к представлению презентаций и способствовало активизации использования технических средств обучения, а также позволило чувствовать себя уверенно при работе с ними.

УДК 004.921

## **ПРИМЕНЕНИЕ СТЕГАНОГРАФИИ ДЛЯ ЗАЩИТЫ АВТОРСКОГО ПРАВА ФОТОГРАФИЙ В ФОРМАТЕ JPEG**

**Савлевич Ю.И.**

*УО «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова», г. Витебск  
Научный руководитель – Савельева Н. В., к. ф.- м. н.*

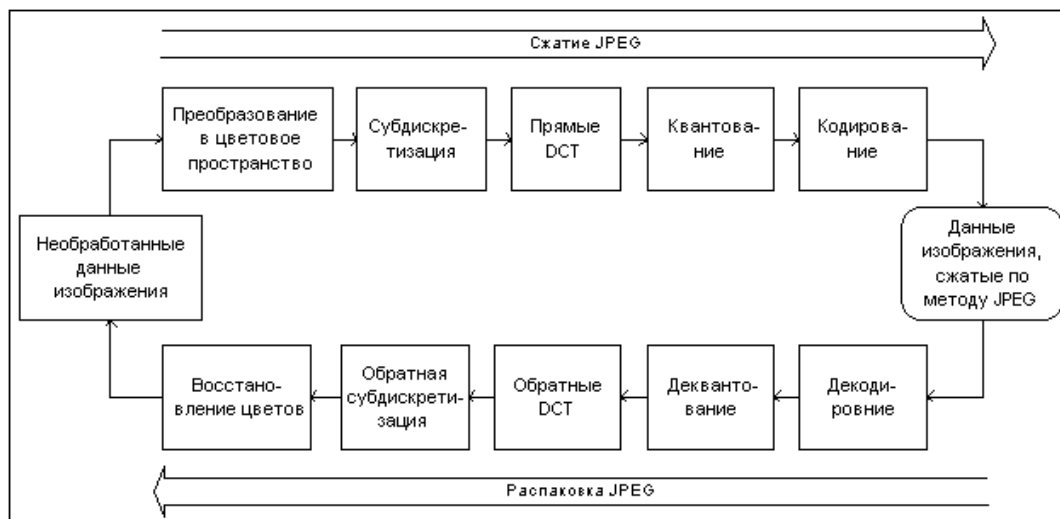
В последнее время в мире становится всё актуальнее проблема пиратства, и, как следствие, защиты информации от несанкционированного использования. Особенно данная проблема актуальна для цифровых данных. Цифровая информация подвержена незаконному копированию, что мешает её создателям получать прибыль и продолжать развивать свои идеи. Вопрос безопасности информации и защиты авторских прав напрямую касается и пользователей цифровых фотокамер, желающих защитить свои фотографии, которые могут стать для них источником заработка.

Основная цель настоящей работы – разработка метода защиты авторского права на цифровые фотографии в формате JPEG посредством внесения в изображение дублирующей метки с информацией о пользователе и камере.

В цифровой фотографии существуют информационные поля, например, время, дата, модель фотоаппарата, которым сделан снимок. Но эти поля можно легко изменить, что подвергнет сомнению авторство фотоснимка. Таким образом, предлагается использовать поле цифрового снимка «данные», которое недоступно для изменения пользователю напрямую. Для модификации этого поля можно использовать стеганографические алгоритмы, комбинируя их с алгоритмами шифрования. На наш взгляд, целесообразно дублировать информацию о снимке из доступных для редактирования полей непосред-

ственно в поле «данные» изображения с целью последующего сравнения для заключения о том, менялась ли информация о фотоснимке.

Рассмотрим подробнее формат JPEG [1]. Алгоритм JPEG (см. рис. 1) позволяет сжимать изображение как с потерями, так и без потерь. Но поскольку режим сжатия без потерь используется крайне редко, то ограничимся рассмотрением режима со сжатием.



**Рисунок 1 – Алгоритм сжатия JPEG**

При сжатии изображение преобразуется из цветового пространства RGB в YCbCr, после чего для каналов изображения Cb и Cr, отвечающих за цвет, может выполняться т.н. прореживание, когда каждому блоку из 4 пикселей (2x2) яркостного канала Y ставятся в соответствие усреднённые значения Cb и Cr (схема прореживания "4:2:0"). При этом для каждого блока 2x2 вместо 12 значений (4 Y, 4 Cb и 4 Cr) используется всего 6 (4 Y и по одному усреднённому Cb и Cr). Если к качеству восстановленного после сжатия изображения предъявляются повышенные требования, прореживание может выполняться лишь в каком-то одном направлении – по вертикали (схема "4:4:0") или по горизонтали ("4:2:2"), или не выполняться вообще ("4:4:4").

Далее яркостный компонент Y и отвечающие за цвет компоненты Cb и Cr разбиваются на блоки 8x8 пикселей, и каждый блок подвергается дискретному косинусному преобразованию (ДКП). Полученные коэффициенты ДКП квантуются (для Y, Cb и Cr в общем случае используются разные матрицы квантования) и пакуются с использованием кодов Хаффмана [2]. Матрицы, используемые для квантования коэффициентов ДКП, хранятся в заголовочной части JPEG-файла и обычно строятся так, что высокочастотные коэффициенты подвергаются более сильному квантованию, чем низкочастотные. Это приводит к огрублению мелких деталей на изображении (чем выше степень сжатия, тем более сильному квантованию подвергаются все коэффициенты).

При сохранении изображения в JPEG-файле указывается параметр качества, задаваемый в некоторых условных единицах, например, от 1 до 100 или от 1 до 10. Большее число обычно соответствует лучшему качеству (и большему размеру сжатого файла). Однако даже при использовании наивысшего качества (соответствующего матрице квантования, состоящей из одних только единиц) восстановленное изображение не будет в точности совпадать с исходным, что связано как с конечной точностью выполнения ДКП, так и с необходимостью округления значений Y, Cb, Cr и коэффициентов ДКП до ближайшего целого.

Для сокрытия информации об авторе фотографии нами выбран метод сокрытия в спектре изображения после квантования [3], который основан на использовании частот блоков изображения после их квантования, но перед этапом кодирования. При этом сокрытие может осуществляться при помощи классических методов компьютерной стеганографии. При использовании данного метода объем скрываемых данных пропорционален объему сжатого изображения, при этом увеличение объема внедряемой информации может приводить к изменениям исходного изображения и снижению эффективности последующего этапа кодирования. Однако возможность варьировать качество сжатого изображения в широком диапазоне не позволяет легко установить, являются ли возникающие в результате сжатия погрешности следствием сокрытия данных или использования больших коэффициентов квантования.

Приведем краткое описание данного метода. Пусть  $m_j$  – биты скрываемого сообщения,  $B_{i,j}$  – значения ненулевых элементов блоков квантованного спектра немодифицированного изображения, упорядоченные согласно порядку их кодирования в алгоритме JPEG ( $i$  – номер бита элемента,  $j$  – номер элемента),  $B'_{i,j}$  – соответствующие блоки модифицированного изображения. Введем двоичную последовательность  $k_j$ , биты которой поставим в соответствие блокам  $B_{i,j}$ , при этом  $k_j=1$ , если в младший бит  $j$ -го блока скрывается очередной бит сообщения, и  $k_j=0$  в противном случае.

Прямое и обратное стеганографическое преобразование  $F: M \times V \times K \rightarrow V$  и  $F^{-1}: V \times K \rightarrow M$  для данного метода имеют вид (1) и (2) соответственно:

$$B'_{i,j} = \begin{cases} B_{i,j}, & \text{если } i \neq 0 \\ B_{i,j}, & \text{если } i = 0 \text{ и } k_j = 0 \\ m_l, & \text{если } i = 0 \text{ и } k_j = 1, \text{ где } l = \sum_{p=1}^j k_p \end{cases} \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (1)$$

$$m_j = B'_{0,l}, \text{ где } l \mid \sum_{p=1}^l k_p = j \mid j = 1, 2, 3, \dots \quad (2)$$

Для обеспечения высокой степени безопасности внедряемую метку будем кодировать шифром сложной замены [4]. Напомним, что шифры сложной замены называют многоалфавитными, т.к. для шифрования каждого символа исходного сообщения применяют свой шифр простой замены. Многоалфавитная подстановка последовательно и циклически меняет используемые алфавиты. При  $r$ -алфавитной подстановке символ  $x_0$  исходного сообщения заменяется символом  $y_0$  из алфавита  $V_0$ , символ  $x_1$  – символом  $y_1$  из алфавита  $V_1$  и т.д., символ  $x_{r-1}$  заменяется символом  $y_{r-1}$  из алфавита  $V_{r-1}$ , символ  $x_r$  заменяется символом  $y_r$  снова из алфавита  $V_0$  и т.д.

Чтобы получить достаточно сложный шифр, выберем, например, число алфавитов равным 7. Далее закодированная метка представляется в бинарной форме и заносится в изображение. Для добавления шумов в кодируемом сообщении его можно разбить на части по 2 символа, и между каждыми двумя символами кодировать дополнительные случайные 2 символа.

Таким образом, извлечение и замена метки будут значительно затруднены. Чтобы проверить, не используются ли данные нелегально, необходимо программным продуктом извлечь из изображения сокрытую информацию и сравнить ее с информацией в полях, доступных для редактирования.

Процесс внедрения метки имеет смысл осуществлять непосредственно в момент создания фотографии, т.е. в самой фотокамере. Предлагается встраивать данный алгоритм в программное обеспечение, установленное в фотокамере. Дальнейшее развитие описанной в настоящей работе идеи также возможно, причем это особенно актуально для фотоснимков формата raw.

**Список цитированных источников**

1. ISO/IEC IS 10918–1 | ITU–T Recommendation T. 81. JPEG standart, first edition; ins. 15.02.1994 – International Standard Organization, 1994. – 5 p.
2. Huffman, D. A Method for the Construction of Minimum-Redundancy Codes / D. Huffman // Proceedings of IRE, 1952. – Vol. 40, № 9. – P. 1098-1101.
3. Аграновский, А. В. Основы стеганографии / А.В. Аграновский [и др.]. – Ростов-на-Дону, 2003. – 116 с.
4. Романец, Ю.В. Защита информации в компьютерных системах и сетях / Ю.В.Романец, П.А. Тимофеев, В.Ф. Шаньгин. – М.: Радио и связь, 2001.– 376 с.

УДК 631.3

**РАЗРАБОТКА КОНЦЕПЦИИ АРМ ДЛЯ ИССЛЕДОВАНИЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТИ  
ПРЕДПРИЯТИЯ ПО ПЕРЕВОЗКЕ ГРУЗОВ**

***Садко В.И., Слюсарева М.А.***

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научный руководитель – Хвещук В.И., к.т.н., доцент*

**Общие положения.** Деятельность предприятия по перевозке грузов включает решение таких производственных задач, как поиск, оценка и прием заказов, планирование и управление выполнением заказов и другие. Одной из важных задач в этой деятельности является оценка деятельности предприятия в общем и отдельных его компонентов, которая относится к задачам стратегического уровня и ориентирована на руководство предприятия. Анализ внешней среды представляет собой оценку состояния и перспектив развития важнейших, с точки зрения организации, субъектов и факторов окружающей среды – отрасли, рынков, потребителей, поставщиков и совокупности глобальных факторов внешней среды, на которые организация не может оказывать непосредственное влияние. Рассматриваются вопросы формализации данной задачи и результаты разработки концепции автоматизированного рабочего места (АРМ) для оценки деятельности предприятия.

Деятельность предприятия ориентирована на оказание услуг по перевозке грузов другим предприятиям и осуществляется в рыночных условиях. Клиентами (заказчики перевозок и потребители грузов) предприятия могут быть как юридические, так и физические лица. Отдельный груз рассматривается как неделимый и перевозится в отдельном прицепе. Груз имеет координаты погрузки и разгрузки, расстояние перевозки, стоимость перевозки. Поступление заказов на перевозку грузов для предприятия носит динамический характер и не зависит от предприятия. Перевозки осуществляются водителями предприятия на автомобилях с прицепами, которые могут быть как личными, так и в собственности предприятия. Распределение заказов на перевозку грузов между водителями, а также управление перевозками динамически осуществляют сотрудники предприятия (менеджеры и диспетчера).

**Формализация задачи оценки деятельности предприятия.** В качестве показателей деятельности предприятия рассматриваются: показатели затрат на транспорте (коэффициент выпуска на линию, коэффициент технической готовности парка, пробег транспортного средства и другие), показатели затрат, связанных с выполнением погрузочно-разгрузочных работ, с повреждением и потерей груза, с нарушением срока доставки груза; показатели деятельности водителей и другие.

В качестве показателей для оценки внешней среды выступают: показатели оценки поставщиков (доход, получаемый по поставщику, качество сервиса, предоставляемое поставщиком, уровень экспертизы поставщика), показатели оценки потребителей, показатели тяжести трудового процесса (физическая динамическая нагрузка, масса поднимаемого и перемещаемого груза вручную, статическая нагрузка), процент идеальных заказов и другие.

Для оценки деятельности предприятия все показатели разделены на две группы: общие показатели (абсолютные и средние по затратам на перевозки, по клиентам, по грузам, по маршрутам, по водителям, по автомобилям, по прицепам и другие), характеризующие результаты производственной деятельности за определенный временной период (декада, месяц, квартал, год) предприятия в целом или отдельных компоненты предприятия; временные показатели, определяющие изменения показателей о функционировании предприятия во времени, а также функциональные зависимости некоторых показателей.

Для перечисленных показателей разработаны расчетные формулы и схемы для их исследования. Определены требования к структуре и составу информации в БД о статистике функционирования предприятия, которая является основной исходной информацией для расчета и исследования показателей для оценки деятельности предприятия.

**Концепция и назначение АРМ.** При разработке концепции АРМ использованы следующие положения: диалоговый режим взаимодействия пользователей с АРМ; клиент-серверная архитектура системы; графическое представление результатов оценки и анализа деятельности предприятия; санкционированный доступ к ресурсам АРМ и другие.

АРМ представляет собой совокупность приложений, взаимодействующих через общую БД. В состав АРМ входят следующие компоненты АРМ:

- приложение формирования статистики о функционировании предприятия – сбор и хранение событий о выполненных перевозках грузов предприятием;
- приложение руководителя предприятия – оценка и графическое представление показателей о деятельности предприятия и его отдельных компонентов на основе результатов обработки статистики о функционировании предприятия;
- приложение администратора – создание, хранение, восстановление базы данных (БД) АРМ, управление доступом пользователей к АРМ и другие;
- БД статистики о функционировании предприятия;
- БД результатов оценки деятельности предприятия.

Основные возможности АРМ ориентированы на руководство предприятия и обеспечивают следующие функциональные возможности:

1. Обработка статистики о функционировании предприятия и формирование набора показателей для анализа и оценки его деятельности и представление их как в графическом виде, так и в виде базы данных результатов.

2. Исследование динамики изменения показателей на определенных временных интервалах и их графическое представление, другие возможности.

**Выводы.** Определен состав показателей для оценки деятельности предприятия по перевозке грузов автомобильным транспортом. Разработана концепция АРМ, определены основные компоненты АРМ и их функциональное назначения. Предполагается использовать полученные результаты для реализации АРМ и разработки практических рекомендаций для руководителей предприятий по перевозке грузов.

УДК 005.8

## **БАЗОВАЯ ИНФРАСТРУКТУРА ВИРТУАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ ПРОЕКТАМИ**

**Самосюк А.А.**

*УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно  
Научный руководитель – Волчок В.А., к.т.н., доцент*

Введено понятие виртуальной команды, проанализированы особенности данной формы совместной работы. Предложена базовая инфраструктура виртуального управления проектами, рассмотрены отдельные элементы. Выявлены тенденции построения инфраструктуры.

На современном этапе развития для проведения научных исследований требуется привлечение специалистов, зачастую разобщенных географически. Организация работы в подобных случаях требует комплексного подхода к построению инфраструктуры управления, основанного на использовании новейших технологий, общепризнанных мировых практик и стандартов.

Базовая инфраструктура виртуального управления проектами состоит из 3-х основных элементов:

- 1) участники проекта;
- 2) технологии;
- 3) процессы.

Участниками проекта являются все заинтересованные стороны (спонсор, заказчик, деловые партнеры, менеджер и команда проекта, другие участники), где центральным элементом является виртуальная команда. Виртуальная команда – группа лиц с общими целями, выполняющих свои роли, которые в процессе сотрудничества практически не общаются лично.

Формат виртуальной команды предоставляет следующие возможности:

- использовать в команде проекта специальные экспертные знания без привязки к географическому региону;
- формировать команды из исполнителей, работающих в разные смены или часы;
- браться за выполнение проектов, реализация которых в иных условиях была бы невозможной из-за высоких командировочных расходов.

Преимуществами от использования формата виртуальных команд являются:

- гибкое планирование команды;
- более высокая продуктивность членов команды, ввиду того, что работы структурированы и подробно описаны, а действия участников команды четко скоординированы;
- высокая мотивация членов команды (ограниченные сроки, ориентация на достижение конкретных целей).

Технологии, применяемые в виртуальном управлении проектами, можно разделить по уровням инфраструктуры:

- уровень архитектуры: клиент-серверная, p2p;
- уровень сети: проводные, беспроводные, локальные, глобальные сети;



- уровень канала доступа: wimax, wifi, 3g, adsl;
- уровень устройств доступа: персональный компьютер, ноутбук, смартфон, устройства виртуальной реальности;
- уровень программного обеспечения (ПО).

Уровень ПО можно разделить на два подуровня:

- 1) ПО совместной работы (подсистема передачи текстовой информации, подсистема передачи аудиовизуальной информации, подсистема автоматизации коллективной работы), обеспечивающее эффективные коммуникации между участниками проекта;
- 2) специализированное ПО, предназначенное для выполнения конкретных задач.

Процессы определяют весь жизненный цикл проекта, формы и методы коммуникаций, а также применяемые в ходе проекта технологии. Группы процессов стандартизированы и подробно описаны в стандартах по управлению проектами, в частности в Руководстве к Своду знаний по управлению проектами РМВОК.

Анализ элементов инфраструктуры виртуального управления проектами выявил следующие тенденции:

- 1) использование широкого многообразия способов взаимодействия, а соответственно и новейших технологий на всех уровнях инфраструктуры; усиление интерактивности взаимодействия;
- 2) ориентация на мобильность и в связи с этим переход на облачную архитектуру технологической части;
- 3) стандартизация процессов управления и компетентности специалистов в форме стандартов и методологий.

В силу того, что основная проблема в управлении виртуальной командой – это проблема контроля за деятельностью команды, именно благодаря стандартизации процессов и методов управления возможна четкая координация действий виртуальной команды для достижения поставленных целей. Технологии же являются связующим звеном между участниками проекта. Они позволяют эффективно выстроить процесс управления, предоставляют средства для осуществления коммуникаций между участниками команды.

#### **Список цитированных источников**

1. Руководство к своду знаний по управлению проектами (руководство РМВОК) – четвертое издание, 2008. – Project Management Institute, 463 с.
2. Луцинский, В. Расстояние – не помеха. Построение виртуальных ИТ-команд [Электрон. ресурс] // IT Manager. – 2009. – №11. – С. 12-16. – Режим доступа: <http://www.it-world.ru/news/articles/139601.html>. – Дата доступа: 12.10.2011.
3. Будунов, С. Управление виртуальными командами в распределенных проектах [Электр. ресурс] / С. Будунов // Intelligent Enterprise/RE. – 2011. – №2 – Режим доступа: <http://www.iemag.ru/analytics/detail.php?ID=22655>. – Дата доступа: 12.10.2011.

УДК 514.115

## **СРЕДСТВА ДИНАМИЧЕСКОЙ ГЕОМЕТРИИ В ПРОЦЕССЕ ОБУЧЕНИЯ**

***Силаева З.Н., Силаев Н.В.***

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест*

В последнее время преподаватели естественнонаучных дисциплин все чаще отмечают неумение школьников и студентов вуза логически рассуждать, а в дисциплинах геометрического цикла – представлять в воображении геометрические объекты. Думается,

что эти вызывающие тревогу факты порождены реформами школьного образования (отменой устных экзаменов по математике, заменой вступительных экзаменов в вуз тестированием). Не последнюю роль, на наш взгляд, здесь играет и бурное развитие средств мультимедиа, позволяющих получать информацию в облегченной форме.

В связи с этим мы предлагаем использовать на занятиях по геометрии компьютерные программы, обеспечивающие представление геометрических объектов и их совокупностей динамически. Подобные средства неофициально получили название *динамической геометрии*. Они появились еще в эпоху использования операционной системы MS DOS (исполнитель PlaniMir, среда КуМир), а с появлением сред типа Windows они стали еще более «дружелюбны» по отношению к пользователю. К их числу относятся, например, программы The Geometer's Sketchpad (в русской версии «Живая Геометрия») и «1С: Математический конструктор».

Программа динамической геометрии – это среда, позволяющая «оживлять» геометрический чертеж, т.е. создавать на экране компьютера модель, способную изменяться под управлением целенаправленных действий исследователя-обучаемого. Так как в основе геометрических объектов лежат объекты ООП, для которых, в частности, характерен принцип наследования, то по ходу логически правильных построений есть возможность оставлять неизменными «первичные» свойства фигур (моделей построения), заложенные в них исследователем-обучаемым при их построении. Основными инструментами такой программы являются *виртуальные циркуль и линейка*, а также средства для измерения. Эти средства позволяют решать на экране компьютера любую задачу на построение на плоскости так же, как мы это делаем на листе бумаги, но со значительно более высоким качеством и возможностью скрывать на чертеже все то, что мешает видеть главное. Более того, эти средства позволяют «шевелить», видоизменять построенный чертеж с помощью мыши, оставляя «сцепленным» его основу.

Кроме этого, современные технологии построения программ позволяют осуществлять анимацию точки (т.е. перемещение точки в пределах того геометрического объекта, на котором она расположена), а также фиксировать траекторию движущейся точки. Без компьютера это было осуществимо разве лишь только с помощью физического эксперимента.

Какие же возможности открывает применение программ динамической геометрии?

Во-первых, что наиболее ценно, возможность изменения фигуры согласно с определенным планом действий «пробуждает» геометрические представления обучаемого, активизирует его мыслительные процессы. Та работа, которую ему раньше приходилось проделывать в воображении, теперь может выполняться непосредственно и без больших затрат. Другими словами, динамическая модель дает возможность проводить геометрический эксперимент: выдвигать гипотезу, а затем проверять ее с помощью динамического чертежа. А затем проводить логическое доказательство правильности обнаруженной закономерности. Обучаемый может самостоятельно придумывать новые задачи, а затем, создав к ним модели, экспериментально искать решения.

Во-вторых, «оживляются» и традиционные этапы работы над задачей. Например, такой этап решения задачи на построение, как *исследование*, который раньше часто воспринимался как малоинтересный и обременительный (ведь построение уже выполнено, а значит, задача решена!), теперь можно выполнить с помощью «динамической модификации» правильно построенной модели решения. Особенно красиво решаются сред-

ствами динамической геометрии задачи на геометрические места точек, так как, наделив точку, удовлетворяющую условиям задачи, свойством оставлять при движении след, мы можем увидеть искомое ГМТ на экране-чертеже.

В-третьих, можно применять программы динамической геометрии для развития пространственного воображения, например, при построении сечений многогранников. Это связано с открывающейся здесь возможностью «поворачивать» стереометрический чертеж. Ведь часто взгляд на пространственную фигуру с нужной стороны позволяет «увидеть» решение.

Конечно, использование компьютерной программы на занятии по геометрии не означает отмену традиционных форм работы. Дело в том, что построение динамического чертежа не может заменить собой логических умозаключений, но лишь активизирует их и направляет в нужное русло. Таким образом, динамическая модель должна выступать либо как средство к выдвижению гипотез, либо как подтверждение решения, которое уже найдено аналитически.

В настоящее время авторами ведется работа по адаптации материала курса аналитической геометрии к изложению с использованием средств динамической геометрии, что, несомненно, ведет к осовремениванию методов преподавания в вузе, а главное, по мнению авторов, к лучшему и осознанному восприятию обучаемыми теоретического материала.

УДК 372.853.046.14

## **СОДЕРЖАНИЕ МЕТОДИЧЕСКОЙ ПОДГОТОВКИ УЧИТЕЛЯ ФИЗИКИ К ИСПОЛЬЗОВАНИЮ НИТ В УСЛОВИЯХ УРОВНЕВОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЦИИ**

**Синица А.А.**

*УО «Гродненский государственный университет им. Я. Купалы», г. Гродно  
Научный руководитель – Макарова Н.П., к. пед. н., доцент*

Бурное развитие современной науки и технологий требует от системы образования подготовки высококвалифицированных специалистов, не только обладающих нужным объемом знаний, но и умеющих использовать их в практической деятельности, способных генерировать принципиально новые идеи, разрабатывать новые направления в науке и технике. Именно поэтому этой проблеме придается большое значение в нашей республике, не обладающей значительными запасами природных ресурсов, но богатой интеллектуальными возможностями.

Учителю гораздо легче работать с готовым материалом, полностью соответствующим действующей государственной программе и изложенным в учебнике. Для повышения интереса учащихся к физике учитель должен разнообразить виды деятельности учащихся на уроке с использованием новых информационных технологий.

Использование уровневой дифференциации требует предварительной подготовки учителя к уроку, связанной с разработкой дифференцированных заданий и их тиражированием.

Новые компьютерные технологии – один из необходимых факторов внедрения уровневой дифференциации в учебный процесс. Глобальная сеть Internet, программы се-

мейства Microsoft Office, браузеры, программы для конструирования сайтов, графические редакторы, видео- и звуковые проигрыватели и программы и др. – минимальный набор программных средств, необходимых современному и творческому педагогу, который возьмет на себя смелость искать новые пути в обучении.

Никто не мог предположить 10 лет назад, что средство создания презентаций Microsoft PowerPoint станет настольным. Но огромное количество презентаций, даже сгруппированных по папкам, все равно доставляет неудобства. А вот объединение их оболочкой web-страницы поможет устранить вышеупомянутый недостаток. Для создания и редактирования web-страниц есть очень простой конструктор – Microsoft FrontPage. Эта программа не удовлетворит потребности дизайнеров и конструкторов сайтов, но вполне сгодится для работы педагога. Работать в этой программе очень просто. Пользователь имеет возможность делать сайты, используя код html и без него.

Создав оболочку своим наработкам, педагог усовершенствует свои возможности быстрого и удобного применения и использования информационных технологий. Но на этом не следует останавливаться. Как правило, так и происходит. На следующем этапе появится необходимость создания тестовых заданий и анимации.

Уровневая дифференциация – технология, которая не утратила свою актуальность на протяжении десятилетий. Теперь в век информационных технологий применять ее стало еще проще.

Электронные пособия, разработанные в Республике Беларусь, чаще всего не могут быть использованы на обычных уроках в школе, а про уровневую дифференциацию при их создании никто и не задумывается. Нами разработано электронное средство «Физика 7», где подобраны задачи, задания, теоретический материал разных уровней. ЭСО «Физика 7» может существовать как в электронном варианте, так и в бумажном. Практика показывает, что случаи бывают разные. Учащиеся с удовольствием выбирают задания по своему уровню, это делает их уверенными и удовлетворенными. По сути своей электронные уроки представляют модули, где перед учеником выделен план его действий на уроке с возможностью самостоятельно определить уровень своих знаний.

Согласно десятибалльной системе оценивания учащихся в Республике Беларусь выделяются 5 уровней оценивания. При создании тестов и подборе задач мы придерживаемся 3-х уровней. Почему? Первый уровень (треугольник) при полном выполнении всех заданий позволяет учащемуся получить отметку «6», второй уровень (квадрат) – «8», а третий уровень (круг) – «10». Разрабатывать тесты и задания для уровней «1» и «2» (оценки «1» - «4») считаем не актуальным.

К обсуждению предлагается опыт осуществления уровневой дифференциации при изучении тем «Взаимодействие тел. Сила», «Давление», «Тепловые явления», «Электромагнитные явления» в 7-8 классах средней общеобразовательной школы, а так же использование НИТ при проведении лабораторных работ по физике.

#### **Список цитированных источников**

1. Сеница А.А. Уровневая дифференциация // Физика (1 сентября), 2010, №14
2. Исследовательская деятельность учащихся по физике / А.И. Слободянюк, Л.Е. Осипенко, Т.С. Пролиско. – Минск: Красико-Принт, 2008. – 144 с.
3. Занимательная физика на уроках и внеклассных мероприятиях. 7-9 классы / Сост. Ю.В. Щербакова. – 2-е изд., стереотип. – М.: Глобус, 2010. – 192 с. – (Ученье с увлечением).

УДК 535.317

## ОРГАНИЗАЦИЯ УЧЕБНОГО ПРОЦЕССА УНИВЕРСИТЕТА С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ СЕТЕВЫХ ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

**Тарендь М.В.**

*УО «Белорусский национальный технический университет», и/Минск  
Научный руководитель – Рогальский Е.С., старший преподаватель*

Последнее время мы все стали свидетелями бурного роста инноваций в области информационных технологий. В нашу жизнь прочно вошли (входят) I-фоны, JPS-навигаторы, электронные книги (ЭК). Последствия от внедрения ЭК сегодня прогнозировать сложно, однако некоторые предположения можно сформулировать. Для этого необходимо оценить, в чём новизна и какие преимущества предоставляют ЭК пользователям.

Создание ЭК подразумевает наличие технических возможностей по изготовлению технических средств и инсталляции специализированных программ, без которых изделие не может выполнять свои функции. Мы не можем конкурировать с ведущими мировыми фирмами – производителями «электронных чернил». Однако сама по себе идея хороша, и реализовать её можно не только для электронных изделий, но и в области обучающих технологий, точнее – при создании электронных конспектов, реализованных с использованием оцувствленного, или как ещё его называют, сенсорного Смарт – интерфейса для цифровых тьюторов обучающих программ или, как их ещё называют, электронных средств обучения ЭСО [1,2].

Особенность электронного конспекта в том, что работа с изучаемым материалом не заканчивается вместе с окончанием занятия. Она продолжается за границами университетского образовательного процесса, а именно – у обучающегося дома. Студент или ученик может форматировать и редактировать предложенный преподавателем информационный блок, структурировать его так, как это удобно для своего личного восприятия, а так как электронный конспект является в свою очередь электронным файлом, то количество вариантов редактирования достаточно велико. Такой вид работы помогает мотивировать обучающегося и развивать его с творческой стороны. Так же этот электронный конспект можно копировать, форматировать, архивировать и т.д., для более удобного хранения.

Суть предлагаемого метода представлена на рисунке 1.

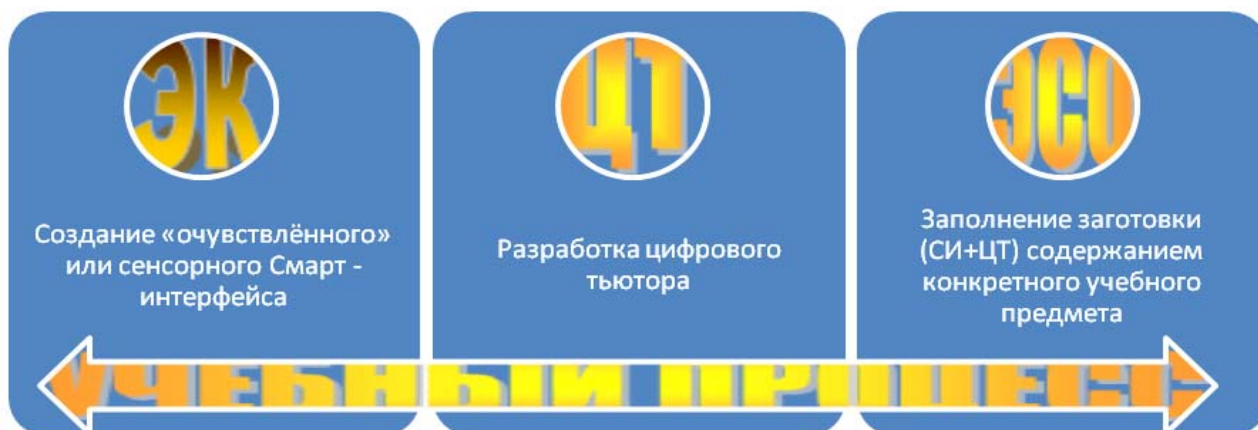


Рисунок 1 – Повышение качества учебного процесса за счёт информационных технологий

Исходная задача условно делится на три подзадачи:

1. Создание сенсорного Смарт-интерфейса (СИ).
2. Разработка цифрового тьютора (ЦТ), так называемого движка – имитатора, взаимодействующего с СИ.
3. Заполнение заготовки (СИ+ЦТ) содержанием конкретного учебного предмета (темы).

Наличие Смарт – интерфейса, многоуровневых цифровых тьюторов и электронных средств обучения является отправной точкой для разработки педагогических технологий завтрашнего дня для учебных заведений, ориентированных на создание образовательного пространства. Мониторинг учебного процесса и управление им осуществляются за счёт обратных связей, в частности благодаря режиму общего мониторинга всех «Рабочих столов» и мониторинга любого из входящих в рабочую группу «Рабочих столов». Это реализовано программным обеспечением, с одной стороны, а с другой – техническими возможностями аппаратного обеспечения. Преподаватель может оценить по соответствующим гистограммам, какие вопросы вызвали наибольшие затруднения при изучении (эти вопросы можно объяснить в конце занятия) и создании персонального электронного конспекта, следствием чего будет повышение качества учебного процесса.

Среди перечисленных задач, первые две задачи представляют собой достаточно оригинальное решение, хотя их реализация достаточно проста. Суть решения в организации слоя «очувствлённых кнопок», выбор которых соответствует принятию решения при воспроизведении процедуры работы с программным продуктом. Программная оболочка может быть различной, например, Flash, причём обучающийся не подозревает, что он работает со специально организованной обучающей информационной средой, которая полностью имитирует интерфейс, но обладает при этом возможностью подсказки, коррекции действий, генерации уровня сложности за счёт обратных связей, как итог – возможностью настройки на конкретного учащегося. Реализация – создание нескольких закрытых слоёв, которые не видны пользователю, но взаимодействуют с создаваемым им программным продуктом.

Использование электронных средства обучения (ЭСО) оправдано лишь в том случае, когда другими (традиционными) методами невозможно обеспечить требуемое качество учебного процесса. Под качеством учебного процесса понимается наличие реализуемых режимов использования ЭСО:

- аудиторного (распараллеленного), с использованием сетевых обучающих технологий на базе сетевого файлового менеджера «NetOp 6.0...6.\*\*»;
- домашнего использования, скоординированного с аудиторным вариантом;
- контроля знаний или тренинга;
- выполнения лабораторно-практических работ.

Данные системы прошли апробацию на уровне средних школ и гимназий г. Минска, что позволило разработать «бридж-технология «школа-университет» адаптации учащихся к обучению в высшей школе. Подобные системы имеют перспективу внедрения в университетах Республики Беларусь и приближаются по своему уровню к интеллектуальным системам управления. В частности, система, использующая аналогичные архитектурные решения, и программное обеспечение на базе сетевого файлового менеджера «NetOp 6.0...6.\*\*», успешно эксплуатируется в ряде учебных заведений (БГУ, физический факультет, СШ 33 и 111, гимн23, и др.). Курс лабораторно-практических работ успешно используется на протяжении ряда лет кафедрой «Инженерная математика» БНТУ на приборостроительном факультете.

**Список цитированных источников**

1. Рогальский, Е.С. Использование электронных учебников в системе управления учебным процессом // Столичное образование сегодня. – Мн.: Адукацыя і выхаванне, 2008. – №1. – С.113.
2. Рогальский, Е.С. Опыт использования ЭСО при изучении информатики. – Минск, 2008.

УДК 004.91+347.78.031

**О НЕКОТОРЫХ ПОДХОДАХ К РАЗРАБОТКЕ УНИВЕРСАЛЬНОГО КЛИЕНТА  
ДЛЯ ВЕБ-СИСТЕМ, СВЯЗАННЫХ СО СБОРОМ И АНАЛИЗОМ ИНФОРМАЦИИ**

**Усиков А.В.**

*УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно  
Научный руководитель – Рудикова Л.В., к. ф.- м. н., доцент*

Многие системы, наряду со сложной инфраструктурой для сбора и анализа данных, предоставляют конечному пользователю некоторую клиентскую оболочку для взаимодействия с ней. Есть множество путей реализации подобного рода оболочек: монолитные приложения или приложения, при разработке которых используется модульный подход.

Эффективным средством для решения многих проблем, связанных с интеграцией данных в приложении, является разделение приложения на отдельные, полунезависимые части, которые затем могут быть легко встроены в приложение-оболочку для формирования цельного решения. Приложения, которые спроектированы и построены таким образом, часто называют составными приложениями.

Разработанный с помощью данного подхода каркас архитектуры клиента является универсальным: доступна легкая модификация и адаптация для встраивания в какие-либо сложные системы.

Отметим, что основными требованиями к построению такого клиента являются универсальность, гибкость, легкая и быстрая расширяемость, универсальная интеграция с различными системами сбора и анализа данных.

Перечислим основные возможности клиента. Итак, клиент имеет в наличии специально разработанный модуль для абстрактного представления, которое может без каких-либо проблем отображать данные модели системы. При этом стоит отметить, что модуль легко расширяется путем добавления новых видов и форматов отображений и, при этом, выбор наиболее приемлемого формата берет на себя именно представление.

Клиент может выступать как веб-клиент системы, с которой он интегрируется, так и как desktop-клиент. Функциональная часть клиента во время работы может динамически изменяться благодаря имеющейся составной архитектуре, к которой могут добавляться новые функциональные модули.

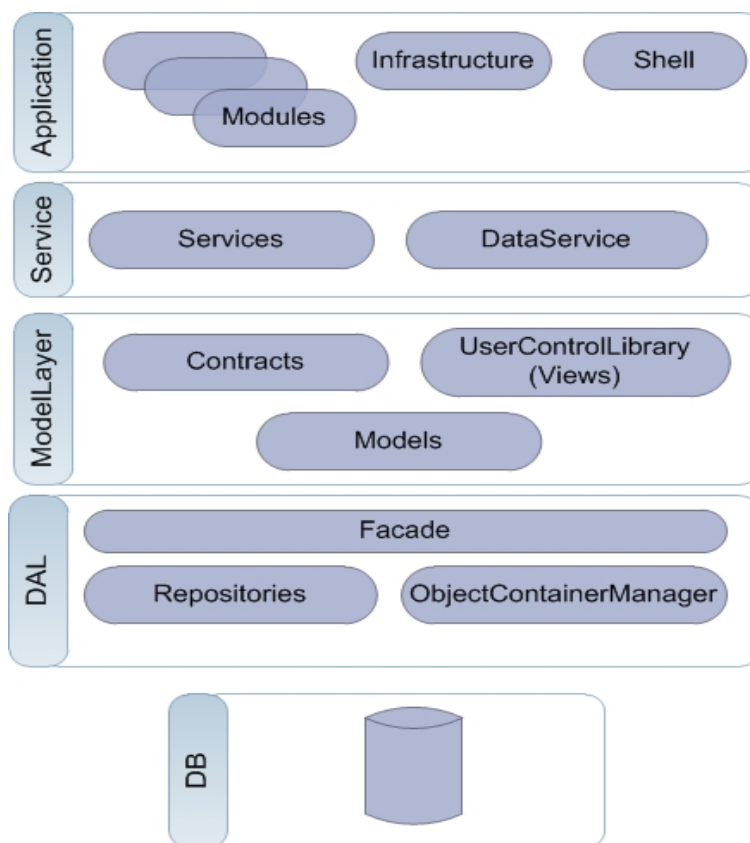
Существует возможность работы клиента либо в режиме самостоятельной системы, либо в автономном режиме со встроенной в клиента собственной базой данных. Интерфейс клиента легко настраивается и поэтому для каждой роли, для каждого пользователя существует возможность организации и индивидуальной настройки интерфейса.

Для реализации универсального клиента использована многоуровневая архитектура [1, 2]. В предлагаемом решении многоуровневая архитектура обеспечивает группировку связанной функциональности приложения в разных слоях, организованных иерархически. Функциональность каждого слоя объединена общей ролью или ответственностью.

Между слоями осуществляется обмен данными. Правильное разделение приложения на слои помогает поддерживать строгое разделение функциональности, что в свою очередь, обеспечивает гибкость, а также удобство и простоту обслуживания.

Отметим, что слои в клиентском приложении могут размещаться физически на одном компьютере (на одном уровне) или же быть распределены по разным компьютерам (n-уровней). Связь между компонентами разных уровней осуществляется через строго определенные интерфейсы.

На рис. 1 приведены основные логические слои архитектуры разработанного клиента.



**Рисунок 1 – Многоуровневая архитектура универсального клиента**

#### Список цитированных источников

1. Нейгел, К. С# 2008 и платформа .NET 3.5 для профессионалов / К. Нейгел, Б. Иввен, Дж. Глинн, К. Уотсон, М. Скиннер.: пер. с англ. – М.: ООО «И.Д. Вильямс» 2009. – 1392 с.
2. Рудикова, Л.В. Использование средств PowerDesigner для поддержки задач проектирования // Управление в социальных и экономических системах: материалы XV междунар. науч.-практ. конф. – Мн.: 2006. – С. 211–212.

УДК 004.056.5

## УСИЛЕНИЕ БЕЗОПАСНОСТИ САЙТОВ ПОСРЕДСТВОМ НАСТРОЙКИ СЕТЕВЫХ СЕРВИСОВ И МИНИМИЗАЦИИ ОШИБОК ПРОГРАММИРОВАНИЯ

**Чепонас А.С., Савельева Н.В.**

*УО «Витебский государственный университет им. П.М. Машерова», г. Витебск*

На сегодняшний день в сети Интернет сайтами обладают не только крупные предприятия и корпорации, но даже и мелкие фирмы. Но если при этом успешные и развитые



организации могут позволить себе покупку качественного веб-приложения, то малый и средний бизнес на разработку и размещение своих сайтов не готов тратить большие суммы. Поэтому зачастую заказами на разработку сайтов занимаются студенты или школьники, а не группа квалифицированных веб-разработчиков. Более того, очень часто от создателя сайта требуется и размещение разработанного им продукта в Интернет или в локальной сети, т.е. на программиста налагаются задачи администрирования сервера. Очевидно, что в данном случае неизбежны многочисленные ошибки разного рода.

Вместе с тем наиболее популярным веб-сервером в Интернет является Apache, который обычно используется в т.н. связке LAMP (Linux, Apache, MySQL, PHP). Но несмотря на качество компонентов LAMP, случаи успешного применения PHP-включений, SQL-инъекций, межсайтового скриптинга (XSS) и других атак, направленных на веб-сервисы, – далеко не редкость. Среди основных причин успешности таких атак называют широкую доступность инструментов, необходимых для проведения атаки, и недостаточное внимание со стороны разработчиков сайтов к вопросам безопасности. При этом условно можно выделить два основных фактора, снижающих безопасность: ошибки в администрировании сервера и ошибки в программировании веб-ресурса. Но говоря о защите информации, дополнительно можно остановиться еще и на защите самих данных, предоставляемых пользователю для отображения в браузере или для загрузки с сервера. Основная цель настоящей работы – систематизировать основные рекомендации по усилению безопасности веб-ресурсов, исходя из типичных ошибок программирования и администрирования.

Следующая таблица содержит основные рекомендации по безопасности сервера, приложения и данных.

<b>1) Защита сервера</b>	
– общие рекомендации по настройке серверного ПО	<ul style="list-style-type: none"> <li>– своевременное обновление ядра и служб;</li> <li>– отключение неиспользуемых служб;</li> <li>– продуманная настройка правил межсетевого экрана;</li> <li>– логгирование системных событий и событий межсетевого экрана;</li> <li>– ограничение удаленного доступа к серверу.</li> </ul>
– Apache [1]	<ul style="list-style-type: none"> <li>– запрет отображения названия операционной системы, версии и информации об установленных модулях веб-сервера;</li> <li>– запуск веб-сервера под отдельной учетной записью в окружении chroot;</li> <li>– запрет чтения конфигурационных и временных файлов Apache;</li> <li>– ограничение доступа к определённым директориям или файлам;</li> <li>– отключение неиспользуемых модулей Apache;</li> <li>– использование digest-аутентификации;</li> <li>– ограничение выполнения CGI-скриптов, SSI-включений, индексирования каталога и следование символическим ссылкам;</li> <li>– при возможности ограничение доступа к веб-сайту по IP-адресу (диапазону IP-адресов) и/или по имени пользователя;</li> <li>– установка Timeout ожидания сервером ответа клиента;</li> <li>– для противостояния атакам отказа в обслуживании рекомендуется ограничить размер клиентского запроса, количество подключенных клиентов и пр. параметры, а также использовать дополнительный модуль Apache – mod_evasive.</li> </ul>
– php.ini [2]	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <b>register_globals=Off</b> – отключить глобализацию переменных;</li> <li>– <b>safe_mode=On</b> – включить жесткий режим ограничений;</li> </ul>

	<ul style="list-style-type: none"> <li>– <b>open_basedir= /www</b> – ограничить место выполнения PHP-кода;</li> <li>– <b>magic_quotes=On</b> – включить «магические кавычки» для GET/POST/COOKIE (с целью препятствия SQL-инъекциям);</li> <li>– <b>mysql.trace_mode=Off</b> – отключить показ ошибок MySQL;</li> <li>– <b>allow_url_fopen=Off</b> – отключить удаленное открытие файлов файловыми функциями;</li> <li>– <b>allow_url_include=Off</b> – отключить удаленное подключение файлов;</li> <li>– <b>error_reporting=Off</b> – отключить показ всех ошибок;</li> <li>– <b>disable_functions=exec, system, passthru</b> – задать ограничение на использование потенциально опасных функций;</li> <li>– не рекомендуется использовать параметры <b>default_host, default_user</b> и <b>default_password</b> секции <b>[MySQL]</b>.</li> </ul>
– mysqld [3]	<ul style="list-style-type: none"> <li>– после установки службы – изменение паролей всех пользователей;</li> <li>– запрет анонимного доступа к БД;</li> <li>– удаление тестовых таблиц и баз данных;</li> <li>– запуск службы в окружении chroot под отдельной учетной записью (не root), представляющей единственного пользователя, имеющего привилегии чтения/записи в директории БД;</li> <li>– разграничение ролей пользователей БД MySQL – в частности, пользователей, имеющих права на модификацию данных (INSERT, UPDATE, DELETE) и только на выборку (SELECT);</li> <li>– создание для каждой БД отдельного пользователя, который не имеет прав доступа к другим БД;</li> <li>– не создавать пользователей, имеющих привилегии на работу со структурой БД или административных привилегий;</li> <li>– не предоставлять привилегии PROCESS, FILE всем пользователям;</li> <li>– ограничение числа подключенных к БД пользователей;</li> <li>– если Web и MySQL сервера работают на одном компьютере, то рекомендуется «заставить» MySQL слушать только интерфейс локальной петли 127.0.0.1;</li> <li>– с целью противостояния атакам ботов рекомендуется изменить стандартный порт соединения с MySQL сервером.</li> </ul>
<b>2) Защита приложения (сайта)</b>	
– общие рекомендации	<ul style="list-style-type: none"> <li>– хранение паролей только в зашифрованном виде;</li> <li>– минимизация использования стороннего ПО для администрирования сайта;</li> <li>– программное ограничение скорости загрузки файлов с сервера (при необходимости);</li> <li>– логгирование событий приложения;</li> <li>– тестирование приложения перед опубликованием в сети.</li> </ul>
– проверка пользовательского ввода (в т.ч. upload файлов)	<ul style="list-style-type: none"> <li>– проверка вводимых пользователем данных на ожидаемые длину и тип;</li> <li>– проверка файлов, загружаемых на сервер, на тип и размер;</li> <li>– экранирование спецсимволов.</li> </ul>
– сеансовые ключи и сеансы	<ul style="list-style-type: none"> <li>– не передавать идентификатор сеанса через адресную строку;</li> <li>– генерация идентификатора сеанса достаточной длины и его шифрование;</li> <li>– установка таймаута жизни сеанса и привязка сеанса к IP-адресу;</li> <li>– задание собственного каталога для хранения файлов сеансов.</li> </ul>
– Web IDS [4]	<ul style="list-style-type: none"> <li>– рекомендуется использовать библиотеку PHPIDS (PHP Intrusion Detection System) для отслеживания разных видов атак – межсайтового скриптинга (XSS), SQL-инъекций, расщеплений запросов (HTTP Response Splitting), проходов по каталогам (Directory traversing), RFE/LFI, DoS, LDAP-инъекций и пр.</li> </ul>

<b>3) Защита данных</b>	
– Общие рекомендации	– соблюдение мер противостояния SQL-инъекциям, указанных выше; – создание резервных копий и хранение их на отдельных накопителях; – обеспечение защиты авторского права доступных для загрузки файлов (например, защиту загружаемого с сервера файла паролем на открытие / редактирование/распечатывание, подписывание файла цифровой подписью, внедрение цифровых водяных знаков и пр.); – использование файла robots.txt для ограничения роботам доступа к содержимому веб-сайта.

Разумеется, приведенный в таблице список рекомендаций по мерам безопасности далеко не полон и не отражает частных деталей, однако является полезным ориентиром при внедрении и сопровождении информационных систем, использующих LAMP. В заключение отметим, что проектирование системы безопасности требует комплексного подхода, а обеспечение безопасности любого ресурса – не разовое мероприятие, а непрерывный многогранный процесс.

**Список цитированных источников**

1. Яремчук, С. Возьми индейца под защиту / С. Яремчук // Хакер, 2007. – №10(106). – С. 154.
2. Бойцев, О. Взлом и защита веб-сервера – на каждый яд есть свое противоядие / О. Бойцев // Компьютерная газета. – 2010. – №5.
3. Матвеев, А. На лезвии ножа / А. Матвеев // Хакер, 2005. – №3(75). – С. 52.
4. Зобнин, Е. Остаться на плаву. Обвески для Web-сервера, без которых не обойтись / Е. Зобнин // Хакер, 2010. – №10(133). – С. 128.

УДК 004.514.62

**ПРОГРАММНАЯ СИСТЕМА ТЕСТИРОВАНИЯ ЭФФЕКТИВНОСТИ  
ОКОННЫХ ИНТЕРФЕЙСОВ**

**Шитиков А.В.**

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научный руководитель – Костюк Д.А., к.т.н., доцент*

До самого недавнего времени оконные интерфейсы всех популярных операционных систем в той или иной мере были построены на основе метафоры «рабочего стола», получившей первое коммерческое воплощение во времена компьютеров Apple Macintosh. Согласно этой устоявшейся парадигме, существует основное (т. н. «корневое») окно графической среды, которое может полностью или частично перекрываться остальными окнами. Корневое окно отображает фоновое изображение, ряд основных элементов управления графической оболочки (обычно – средства переключения фокуса окон и запуска приложений), и, как правило, один из каталогов файловой системы, содержимое которого размещается в произвольном порядке поверх фонового изображения, по аналогии с предметами, лежащими на письменном столе.

Метафора рабочего стола на сегодняшний день воплощает многолетний опыт разработки графических интерфейсов, ориентированных на управление с помощью мыши. Однако интерфейсы на основе емкостных сенсорных экранов, управляемых пальцами,

получившие существенное распространение в последние годы в портативных устройствах (сначала в смартфонах, а затем в планшетных компьютерах ощутимо большего размера), сформировали новый набор требований к графическим оболочкам. Обострилось противоречие между размерами элементов интерфейса, которые должны быть увеличены для точной активации прикосновением пальца, и размером экрана, более ограниченным в сравнении с настольным компьютером. Понадобилось разработать и альтернативные подходы к управлению окнами. Вместе с тем многие планшетные компьютеры построены на той же аппаратной архитектуре, что и настольные ЭВМ, и могут успешно исполнять стандартное программное обеспечение при условии адаптации его графического интерфейса под сенсорный экран. В связи с этим в настоящее время разработчики графических оболочек предпринимают шаги, направленные на отказ от классических элементов интерфейса и от метафоры рабочего стола.

Много ресурсов уделяется поискам универсальных решений, пригодных для управления как с помощью мыши, так и средствами сенсорного экрана. Теоретически такой подход может повысить эффективность работы пользователя: интерфейсы приложений, упростившиеся в ходе адаптации к запуску на планшетном компьютере, легче в освоении и способствуют меньшей утомляемости, т. к. не перегружают пользователя большим числом мелких деталей. Однако отказ от классического подхода в управлении окнами, практикуемый разработчиками последних экспериментальных версий графических оболочек, является не таким однозначным: достигаемая универсальность может иметь в качестве побочного эффекта большую трудоемкость и меньшую наглядность взаимодействия.

Настоящая работа посвящена одному из способов прояснения этого вопроса: разработке средств оценки эффективности взаимодействия пользователей с оконным интерфейсом. В ходе работы решалась задача создания программной системы, функционирующей в связке со стандартным периферийным и измерительным оборудованием, и позволяющей протестировать эффективность выполнения пользователем некоторого числа однотипных операций в многооконной среде.

Структура разработанной системы представлена на рис. 1. Программа тестирования взаимодействует с графической оболочкой, создавая несколько окон, с которыми должен работать пользователь. Пользователю выделяется фиксированный промежуток времени, в течение которого необходимо выполнить в графическом интерфейсе с помощью заданных средств управления (мыши, трекбола либо тачпада) максимальное количество однотипных манипуляций. В качестве такого типового действия выбрано копирование чисел через буфер обмена. Система фиксирует в файл журнала все сделанные пользователем ошибки, а также регистрирует его состояние в ходе тестирования с помощью отдельного датчика сердечного ритма, что позволяет оценить не только скорость и точность выполнения действий, но и сопутствующую нагрузку на оператора. Информация с датчика поступает на первичный накопительный узел, сохраняющий минимальный, максимальный и средний ритм за период эксперимента для последующего анализа результатов тестирования.

Тестирование проводится в два этапа. На первом этапе пользователь имеет дело с двумя окнами: «Source» и «Destination». Окна отображаются с размером, обеспечивающим их перекрытие, что принуждает многократно использовать механизм переключения окон, предоставляемый графической оболочкой.



Рисунок 1 – Структура системы

Окно «Source» содержит текстовое поле и кнопку «Next», по нажатию которой в текстовом поле генерируется псевдослучайное число. Пользователь должен скопировать это число в буфер обмена путем выбора пункта «Копировать» через контекстное меню. Далее средствами графической оболочки необходимо переключить фокус на окно «Destination», куда сгенерированное число должно быть вставлено из буфера обмена с помощью пункта «Вставить» контекстного меню. При этом клавиатура не используется по условиям эксперимента. С точки зрения графической оболочки окна запускаются как независимые приложения. Этап позволяет оценить эффективность механизма переключения окон разнотипных приложений.

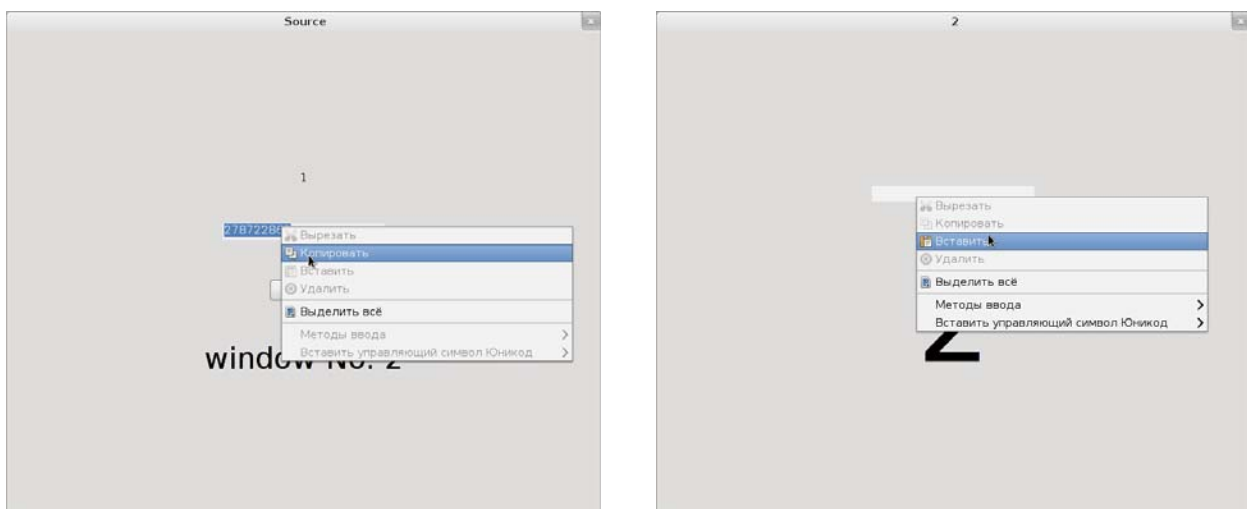


Рисунок 2 – Окна системы тестирования

На втором этапе используются  $n$  последовательно пронумерованных окон «Destination» и одно окно «Source», которое в дополнение к генерации псевдослучайного числа для копирования также генерирует число от 1 до  $n$  – номер окна «Destination», в которое следует произвести вставку. Данный этап выявляет эффективность управления окнами многооконных приложений и необходим, т.к. в последних версиях графических оболочек применяются средства группирования однотипных окон, что влияет на скорость доступа.

Для повышения концентрации внимания пользователя окна имеют схожий интерфейс, включая «фальшивую» кнопку «Next» в окне «Destination», все нажатия на которую также находят свое отражение в файле журнала. Среди типов ошибок пользователя, фиксируемых в журнале, можно выделить пропуск и дублирование чисел, ложное нажатие на кнопку и ошибочный выбор окна.

Система написана средствами языка C и библиотеки Gtk+ и предназначена в первую очередь для использования в графических оболочках Unix-подобных операционных систем. Однако исходный код может быть без существенной корректировки откомпилирован для операционных систем Windows и MacOS.

УДК 621.3.049.77

## **РАЗРАБОТКА ПРОГРАММНОГО ОБЕСПЕЧЕНИЯ АВТООПЕРАТОРА С РУЧНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

***Шумель В.В.***

*УО «Белорусский национальный технический университет», г. Минск  
Научный руководитель – Рудикова Л. В., к. ф.- м. н., доцент*

Современный мир трудно представить без различных машин и механизмов. Они используются как в быту, повседневной жизни каждого человека, так и в составе различных производственных операций. Механизмы находят свое применение в процессах, требующих точного соблюдения временных и пространственных промежутков, небезопасных для человека или же слишком быстрых для человеческой реакции.

Ядром большинства механизмов являются микропроцессоры. Они работают по написанной специалистом программе. Сигналы с кнопок, различных датчиков (емкостных, температурных, индуктивных и пр.) являются входными данными программы процессора. Согласно входным данным и программе процессор устанавливает выходные сигналы, которые управляют работой двигателей, пневматических поршней, электромагнитных реле, клапанов и пр. Также различные интерфейсы могут связывать машину с ПЭВМ, дисплеем, принтером.

В статье изложены общие подходы к разработке программного обеспечения для автооператора с ручным управлением. Указанный автооператор собран на основе ПЛК – программируемого логического контроллера, т.е. законченного блока, включающего в себя процессор, память, коммуникационные интерфейсы и порты ввода-вывода сигналов [1].

Итак, автооператор с ручным управлением – это механизм, который служит для перемещения носителей с металлическими деталями между ваннами гальванической линии. Автооператор движется вдоль линии по направляющим металлическим путям с помощью электродвигателя. Другой двигатель поднимает и опускает каретку с носителем. Для аккуратного подъема/спуска носителя, а также точного позиционирования на позиции используются индукционные датчики. Отметим, что центром управления для автооператора является ПЛК, координирующий работу с помощью частотных преобразователей (рис. 1).

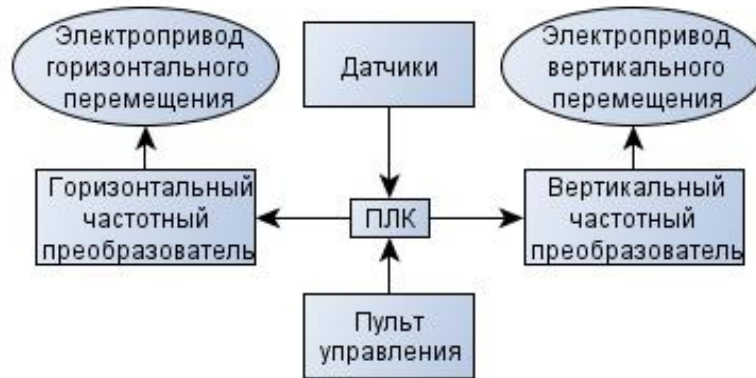


Рисунок 1 – Упрощенный вид электрической схемы автооператора

Программное обеспечение для ПЛК, управляющего работой автооператора, написано в среде CoDeSys на языке ST (рис. 2).

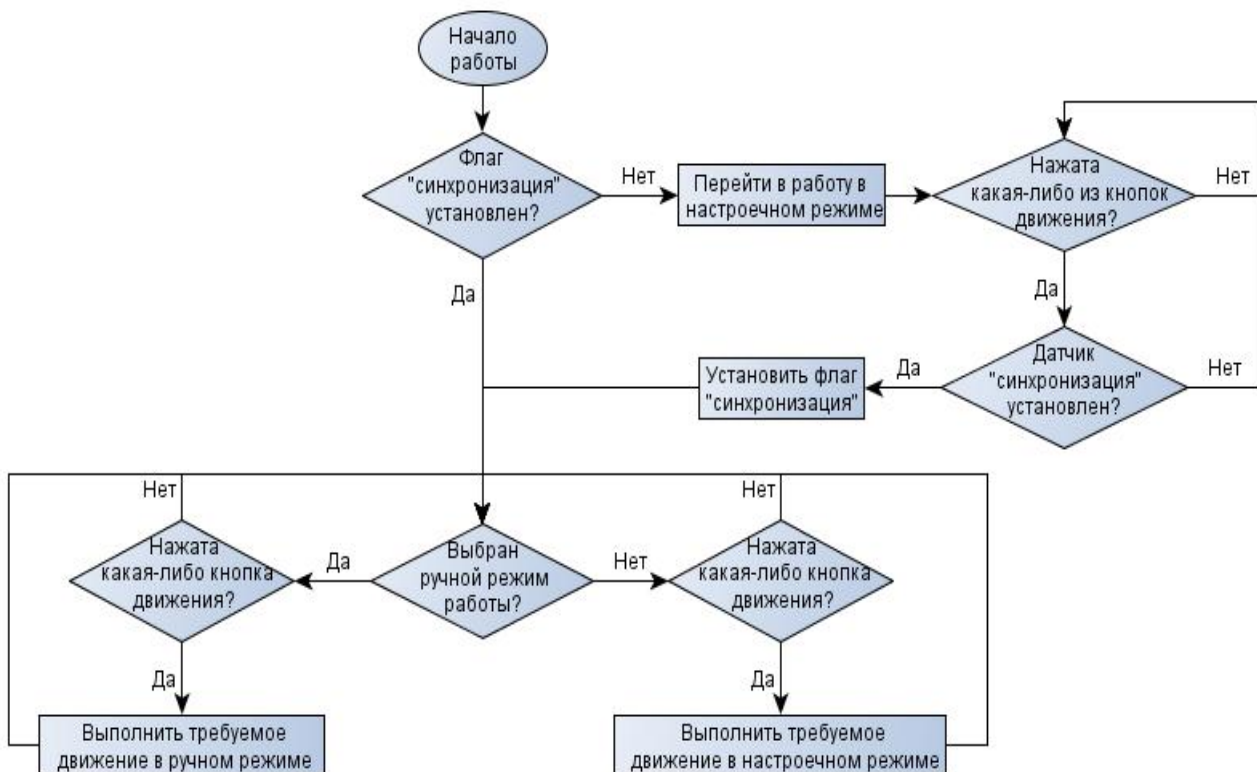


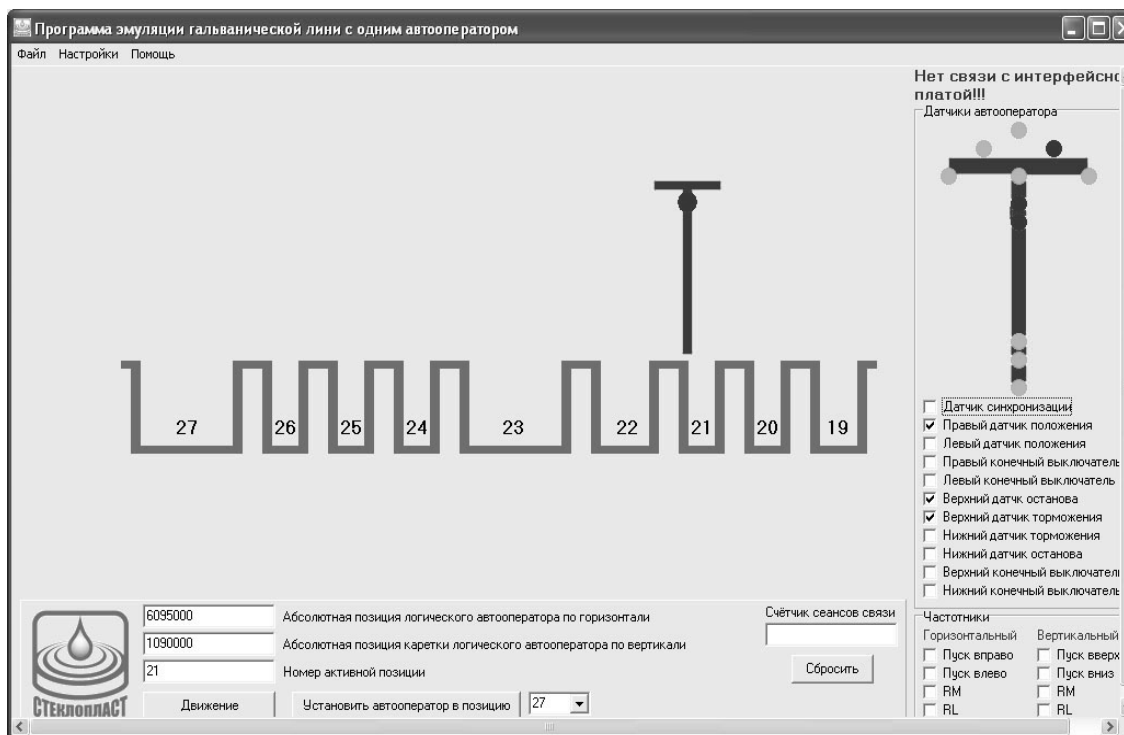
Рисунок 2 – Общий алгоритм управляющей программы для ПЛК

В программе используются несколько управляющих переменных, которые определяют работу программы [2]. Прежде всего, это флаг синхронизации «synchro», булева переменная, которая установлена, если автооператор синхронизирован с линией и разрешает ему работу в ручном режиме, вплоть до задания движения на максимальной скорости. Если этот флаг не установлен, работа автооператора разрешена только в настройечном режиме, в котором автооператор может двигаться только на ползучей скорости – 2,5 см/с.

После синхронизации с линией в переменную «position\_number» записывается номер позиции автооператора, над которой тот в настоящий момент находится. Эта переменная либо инкрементируется, либо декрементируется при движении автооператора соответственно к последней или первой позиции линии.

Для тестирования работы ПЛК написана программа для персонального компьютера в среде Delphi (рис. 3). С ПЛК программа связывалась посредством интерфейса Ethernet с помощью протокола Modbus RTU [3]. Выходные сигналы в ПЛК записывались в определенные сетевые переменные, которые считывала программа на ПК, записывающая, в свою очередь, данные в другие сетевые переменные, из которых ПЛК считывал входные сигналы, имитирующие сигналы с датчиков.

С помощью программы эмуляции были обнаружены и исправлены несколько мелких ошибок в управляющей программе.



**Рисунок 3 – Внешний вид окна программы эмуляции гальванической линии**

Кроме того, предлагаемая программа была протестирована в производственных условиях на гальванической линии. В результате чего были подкорректированы некоторые константы времени, которые задавали различные паузы в работе. После доводки программа показала отличные результаты: автооператор функционирует как в ручном, так и в настроенном режимах, есть требуемая реакция на сигналы всех датчиков. Автооператор протестирован также на неожиданное пропадание питания, несрабатывание любого из индуктивных датчиков положения и т.п.

Таким образом, предлагаемое программное обеспечение является примером программы для управления механизмом. Вышеописанные программы включают в себя возможность дальнейшего развития и наращивания, что, несомненно, имеет большое значение для промышленных предприятий, использующих различные автоматизированные линии.

#### **Список цитированных источников**

1. Руководство пользователя программируемых логических контроллеров / ОВЕН ПЛК110: утв. Компанией Овен 06.07.09: текст по состоянию на 24 янв. 2010 г. – Москва: Овен, 2010. – 70 с.
2. Руководство пользователя по программированию ПЛК в CoDeSys 2.3 / утв. Компанией Овен 25.07.09: текст по состоянию на 11 июня 2010 г. – Москва: Овен, 2010. – 197 с.
3. Фленов, М.Е. Библия Delphi / М.Е. Фленов. – Санкт-Петербург: БХВ, 2005 – 327 с.



## АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 517.977

### К АНАЛИЗУ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

**Актанорович С.В., Лещев А.Е.**

*УО «Белорусский государственный университет информатики  
и радиоэлектроники», г. Минск*

*Научный руководитель – Минченко Л.И., д-р ф.-м. н., профессор*

Вычислению и оценкам производных функции оптимального значения в параметрических задачах математического программирования посвящена обширная литература [1,2]. Данная статья рассматривает вычисление производных второго порядка функции оптимального значения в задаче математического программирования.

Пусть  $f(x, y)$ ,  $h_i(x, y)$   $i = 1, \dots, p$  – дважды непрерывно дифференцируемые функции из  $R^n \times R^m$  в  $R$ . Рассмотрим задачу  $P(x)$  минимизации по переменной  $y$  функции  $f(x, y)$  на множестве

$$F(x) = \{y \in R^m : h_i(x, y) \leq 0 \quad i \in I\},$$

где  $x \in R^n$  – вектор параметров,  $I = \{1, \dots, p\}$ .

Будем предполагать, что многозначное отображение  $F(x)$  при всех  $x$  принимает непустые значения и равномерно ограничено в окрестности точки  $x_0$ .

Обозначим через  $\varphi(x)$  функцию оптимального значения (т.е. минимальное по  $y$  на множестве  $F(x)$  значение целевой функции  $f(x, y)$ ) и через  $\omega(x)$  множество оптимальных решений задачи  $P(x)$ .

Пусть  $\rho(x, C) = \inf_{y \in C} \{\rho(x, y)\}$ ,  $B$  – открытый единичный шар с центром в 0 в соответствующем пространстве.

**Определение 1.** Будем говорить, что задача  $P(x_0)$   $R$ -регулярна, если найдутся числа  $\alpha > 0$ ,  $\delta_1 > 0$ ,  $\delta_2 > 0$  такие, что

$$\rho(y, F(x)) \leq \alpha \max \{0, h_i(x, y) \quad i \in I\}$$

для всех  $x \in x_0 + \delta_1 B$ ,  $y \in y_0 + \delta_2 B$ ,  $y_0 \in \omega(x_0)$ .

Пусть  $z = (x, y)$ ,  $z_0 = (x_0, y_0)$ .

Для задачи  $P(x)$  введем функцию Лагранжа

$$L(z, \lambda) = f(z) + \langle \lambda, h(z) \rangle, \text{ где } \lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_p), \quad h = (h_1, \dots, h_p).$$

Обозначим через

$$\Lambda(z) = \{ \lambda \in R^p \mid \nabla_x L(z, \lambda) = 0, \lambda_i \geq 0 \text{ и } \lambda_i h_i(z) = 0, \quad i \in I \}$$

множество множителей Лагранжа в точке  $z = (x, y)$ .

В [1,2] получен ряд достаточных условий, при которых в  $R$ -регулярных задачах математического программирования  $P(x_0)$  существуют производные  $\varphi'(x_0; \bar{x})$  функции  $\varphi$  в точке  $x_0$  по направлениям  $\bar{x}$ . В частности, доказано существование  $\varphi'(x_0; \bar{x})$  в задаче с линейными по переменной  $y$  функциями  $h_i(x, y)$   $i = 1, \dots, p$  и получена формула

$$\varphi'(x_0; \bar{x}) = \inf_{y_0 \in \omega(x_0)} \max_{\lambda \in \Lambda(z_0)} \langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \bar{x} \rangle$$

для вычисления причем этой производной.

В то же время для изучения функции оптимального значения представляют интерес и вторые ее производные по направлениям.

Положим  $\bar{z} = (\bar{x}, \bar{y})$  и в точке  $z_0 = (x_0, y_0) \in \text{gr}\omega$  введем множества

$$I(z) = \{i \in I \mid h_i(z) = 0\},$$

$$\Gamma(z_0; \bar{x}) = \{\bar{y} \in R^n \mid \langle \nabla h_i(z_0), \bar{y} \rangle \leq 0 \quad i \in I(z_0)\},$$

$$\Lambda^2(z_0; \bar{x}) = \{\lambda \in \Lambda(z_0) \mid \langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \bar{x} \rangle = \max_{\lambda \in \Lambda(z_0)} \langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \bar{x} \rangle\}.$$

Определим производную второго порядка функции  $\varphi$  в точке  $x_0$  по направлениям  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$  как

$$\varphi''(x_0; \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \lim_{t \downarrow 0} \frac{2}{t^2} (\varphi(x_0 + t\bar{x}_1 + t^2\bar{x}_2) - \varphi(x_0) - t\varphi'(x_0; \bar{x}_1)).$$

В [1,2] показано, что существование  $\varphi''(x_0; \bar{x}_1, \bar{x}_2)$  обеспечивают условия  $R$ -регулярностью задачи (или более жесткими условиями) и дополнительным требованием выполнения сильного достаточного условия второго порядка

$$\sup_{\lambda \in \Lambda^2(z_0; \bar{x}_1)} \langle \bar{y}, \nabla_{yy}^2 L(z_0, \lambda) \bar{y} \rangle > 0$$

для всех ненулевых  $\bar{y} \in D(z_0) = \{\bar{y} \in \Gamma(z_0; 0) \mid \langle \nabla_y f(z_0), \bar{y} \rangle \leq 0\}$ .

Очевидно, такое условие никогда не выполняется в параметрических задачах математического программирования, где функции  $f(x, y), h_i(x, y) \quad i = 1, \dots, p$  линейны по переменной  $y$ . Покажем, что тем не менее производные второго порядка функции оптимального значения существуют в этом случае даже без каких-либо значительных дополнительных предположений.

**Теорема.** Пусть в  $R$ -регулярной задаче  $P(x_0)$  функции  $f(x, y), h_i(x, y) \quad i = 1, \dots, p$  линейны по переменной  $y$  и их вторые производные локально липшицевы. Тогда в точке  $x_0$  существует производная второго порядка функции  $\varphi$  по всем направлениям  $\bar{x}_1, \bar{x}_2$ , причем

$$\varphi''(x_0; \bar{x}_1, \bar{x}_2) = \inf_{y_0 \in \omega(x_0)} \inf_{\bar{y}_1 \in \Gamma(z_0; \bar{x}_1)} \max_{\lambda \in \Lambda^2(z_0; \bar{x}_1)} \{\langle 2\nabla_x L(z_0, \lambda), \bar{x}_2 \rangle + \langle \bar{z}_1, \nabla^2 L(z_0, \lambda) \bar{z}_1 \rangle\},$$

где  $\bar{z}_1 = (\bar{x}_1, \bar{y}_1)$ .

#### Список цитированных источников

1. Bonnans, J.F. Perturbations Analysis of Optimization Problems / J.F. Bonnans, A. Shapiro. – New York: Springer-Verlag, 2000.
2. Luderer, B. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad Publishers / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. – Dordrecht/Boston/London, 2002.

УДК 517.9, 519.61

## ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ И ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА РИККАТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И СИСТЕМЫ ЛОТКЕ-ВОЛЬТЕРА

**Бобкович О.И., Ковш В.А.**

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Чичурин А.В., д. ф.-м. н., доцент (Украина)

В работе рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка типа Риккати

$$a_0(x)(y'' + 3yy' + y^3) + a_1(x)(y' + y^2) + a_2(x)y + a_3(x) = 0 \quad (1)$$

и система Лотке – Вольтера вида [1]

$$\frac{dx}{dt} = x(a - py), \quad \frac{dy}{dt} = y(qx - b), \quad (2)$$

где  $a, b, p, q$  – постоянные.

1. Исследование уравнения (1) интересно с точки зрения его связи с линейными дифференциальными уравнениями третьего порядка. Оно редуцируется к таким уравнениям с искомой функцией  $u$  посредством замены  $u' = y(x)u$ . Уравнение (1) изучалось с помощью аналитических и численных методов. Для уравнения (1), когда коэффициенты  $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$  равны нулю, можно найти общее решение в виде

$$y = \frac{2}{x + C_2 + \frac{C_1}{x + C_2}}, \quad (3)$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные постоянные. Его график для различных значений произвольных постоянных представлен на рис. 1. Для неинтегрируемых в квадратурах случаев уравнения (1) использовались численные методы, реализованные в системе *Mathematica* [2]. Так, например, для уравнения (1) с коэффициентами  $a_0(x) = 1, a_1(x) = x^2, a_2(x) = 0, a_3(x) = 0$  посредством интерполяционных функций построены интегральные кривые, соответствующие решениям задач Коши (рис. 2). Представляет интерес изучение уравнения (1) также с точки зрения аналитической теории дифференциальных уравнений, поскольку его решения не имеют подвижных критических особых точек. Так, например, визуализация мнимой части решения (3) имеет вид, представленный на рис. 3 (где имеются четыре простых полюса).

2. Интересными и важными приложениями теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений являются экологические задачи взаимодействия двух или более видов, живущих в одной локальной области. Рассмотрим модель «хищник-жертва» [1], соответствующую двухвидовой задаче сосуществования лис и кроликов, живущих в одном лесном массиве. Пусть  $x$  – число кроликов,  $y$  – число лис и  $t$  означает время. Тогда возникает система двух дифференциальных уравнений вида (2). Эта система имеет нетривиальную точку равновесия (рис. 4) – устойчивый центр. Рассмотрены также модели трех-видового существования и симуляция двухвидовой модели в режиме реального времени.

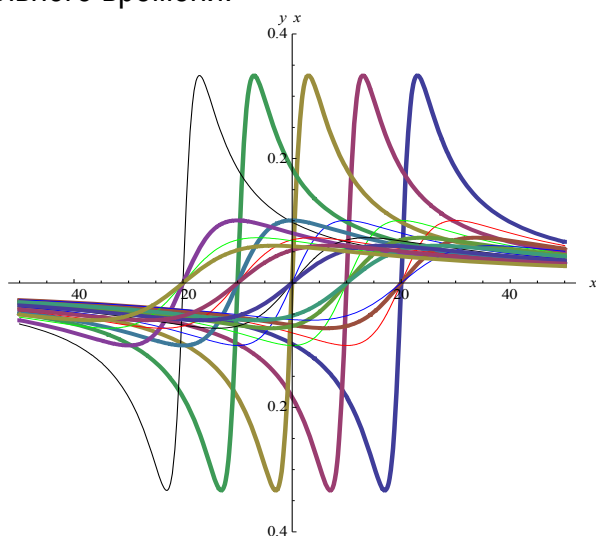


Рисунок 1 – Интегральные кривые уравнения  $y'' + 3yy' + y^3 = 0$

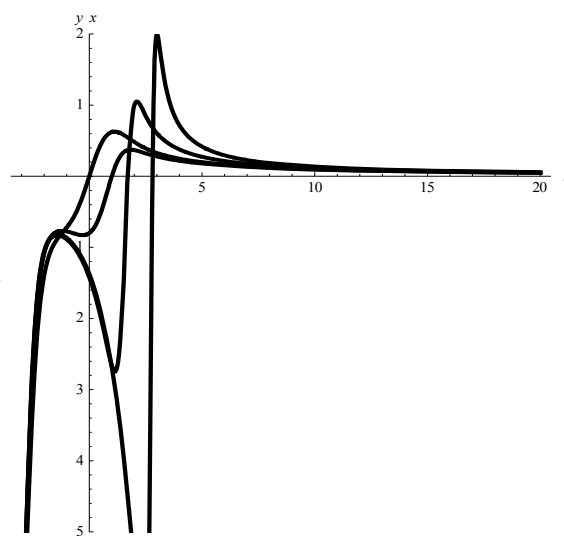


Рисунок 2 – Интегральные кривые уравнения  $y'' + 3yy' + y^3 + x^2(y' + y^2) = 0$

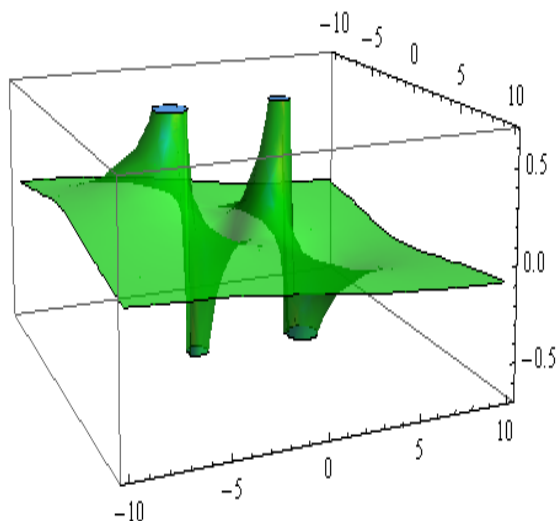


Рисунок 3 – График мнимой части функции (3)

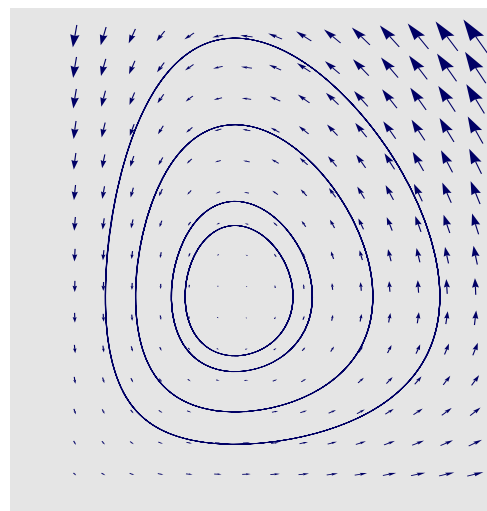


Рисунок 4 – Фазовый портрет системы «хищник-жертва»  $x_t' = x(2 - y)$ ,  $y_t' = y(2x - 3)$ , с критическими точками  $(0;0)$  и  $(1.5;2)$

#### Список цитированных источников

1. Edwards, C. Henry. Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling / C. Henry Edwards, David E. Penny. – Pearson Education, Inc., 2008. – 816 p.
2. Abel, M.L. Differential Equations with Mathematica Burlington / M.L. Abel, P. Braselton. – Academic press in imprint of Elsevier, 2004. – 257 p.

УДК 517.9, 519.61

### МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СИСТЕМЫ *Mathematica*

**Велесевич А.А., Марзан Е.И.**

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Чичурин А.В., д. ф.-м. н., доцент (Украина)

Рассматриваются задачи поиска и визуализации решений с помощью системы *Mathematica* для уравнений гиперболического и параболического типов.

Общее решение одномерного волнового уравнения  $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

( $a$  – параметр) находится в символьном виде

$$u(x, t) = C_1[x - \sqrt{a^2}t] + C_2[x + \sqrt{a^2}t],$$

где  $C_1, C_2$  – произвольные функции от своих аргументов, причем  $x = \sqrt{a^2}t + c$ ,  $x = -\sqrt{a^2}t + c$  – характеристики ( $c$  есть произвольная постоянная). Используя функцию *Manipulate* [1], построим модуль, позволяющий изобразить форму поверхности  $u$  как функции переменных  $t$  и  $x$  (рис. 1, рис. 2). Аналитическое решение

$$u(x, t) = C_1[y + a^{-1}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})x/2] + C_2[y - a^{-1}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})x/2]$$

мы можем получить для дифференциального уравнения

$$a \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + b \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + c \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0,$$

для которого выполняется соотношение  $b^2 - 4ac < 0$  (гиперболический тип) и  $b^2 - 4ac = 0$  (параболический тип). При этом легко определяются два семейства действительных характеристик в первом случае и одно семейство – во втором.

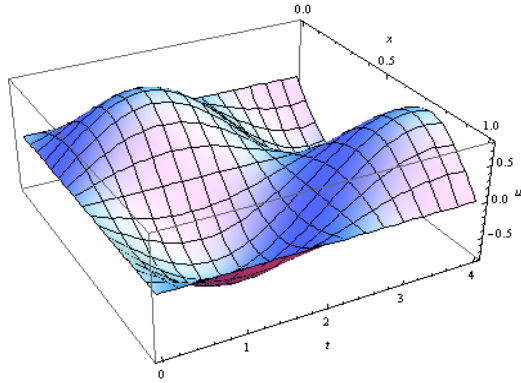


Рисунок 1 – График функции  $u = u(x,t)$  для  $a = 0.2$

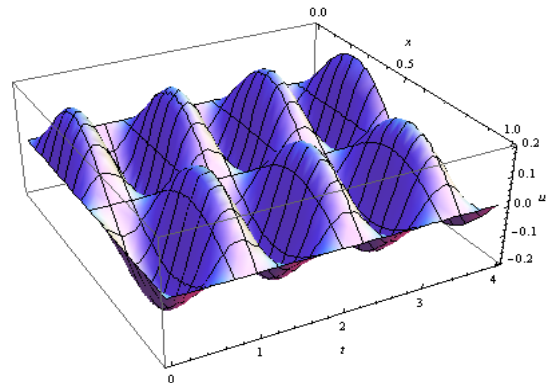


Рисунок 2 – График функции  $u = u(x,t)$  для  $a = 0.8$

Визуализация и анимация решений уравнений гиперболического типа с тремя независимыми переменными (описывающие колебания мембран) могут быть построены с помощью встроенных численных методов и основных команд NDSolve и Plot [2]. Например, для уравнения

$$2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) = 0 \tag{1}$$

с начальными и граничными условиями вида

$$\frac{\partial u(x, y, 0)}{\partial t} = 0, \quad u(x, y, 0) = 8xy(1-x)(1-y), \tag{2}$$

$$u(0, y, t) = u(1, y, t) = u(x, 0, t) = u(x, 1, t) = 0 \tag{3}$$

для 4-х промежутков времени графики поверхности  $u(x,y)$  имеют следующий вид (рис. 3)

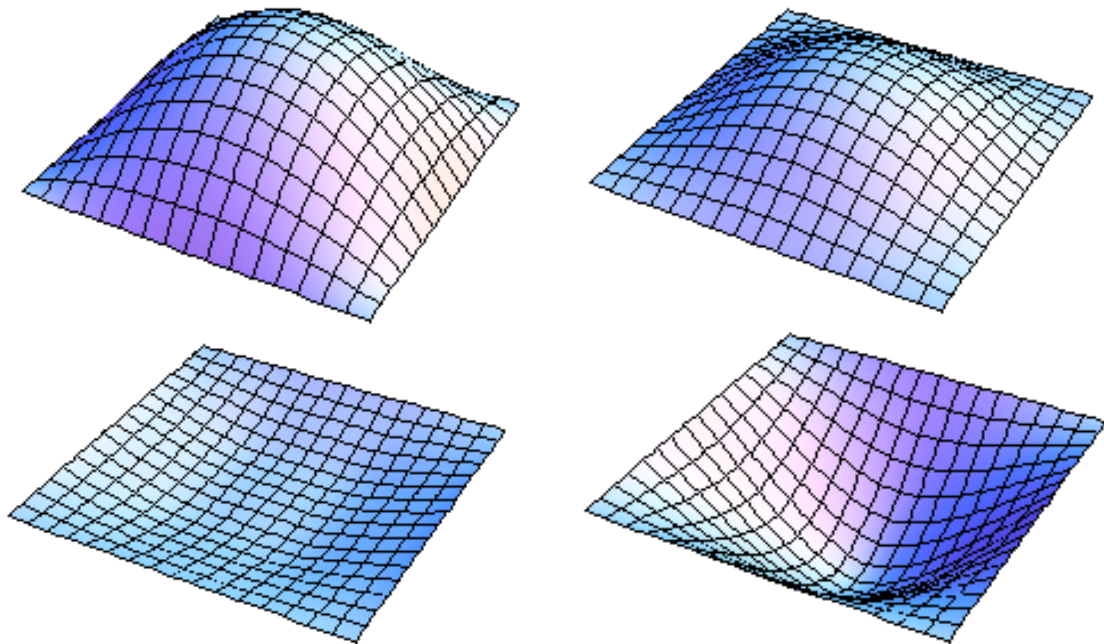


Рисунок 3 – Графики функции  $u(x, y)$  решения задачи (1)-(3) для моментов времени  $t = 0, t = 0.3, t = 0.6, t = 0.9$  соответственно

**Список цитированных источников**

1. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2011. – Mode of access: [www.wolfram.com](http://www.wolfram.com).
2. Heikii Ruskieaa Mathematica Navigator Mathematics, Statistics and Graphics. – Elsevier Inc., 2009. – 1112 p.

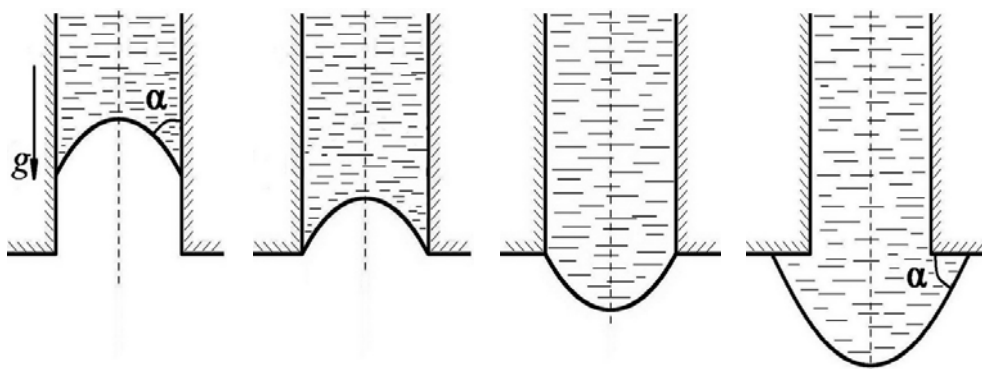
УДК 519.6:517.9:532.63

## ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОЙ ГИДРОСТАТИКИ О РАВНОВЕСНЫХ ФОРМАХ ЖИДКОСТИ, ВЫДАВЛИВАЕМОЙ ИЗ КАПИЛЛЯРА

**Волотовская Ю.Н.**

*УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», г. Гомель  
Научный руководитель – Полевиков В.К., к. ф.- м. н., доцент*

Задачи с нерегулярными условиями на границе занимают важное место в гидромеханике невесомости. Например, численное моделирование процесса выращивания монокристаллов, как и решение многих других прикладных задач гидромеханики невесомости, требует определения равновесных форм свободной поверхности с нерегулярными условиями на границе, при которых свободная поверхность опирается на линию излома твердой стенки [1]. Такие задачи ранее численно не решались, лишь некоторые подходы предложены в [2].

**Рисунок 1 – Иллюстрация эволюции свободной поверхности**

Данная работа посвящена численному моделированию равновесных капиллярных поверхностей с нерегулярными условиями контакта в случае классической задачи капиллярной гидростатики – о квазистатическом процессе медленного выдавливания жидкости из вертикального цилиндрического капилляра, примыкающего к плоской торцевой стенке [1]. Характерные стадии эволюции свободной поверхности показаны на рисунке 1.

Пусть  $R_0$  – радиус капилляра;  $V$  – объем жидкости;  $\alpha$  – угол смачивания. Радиус  $R_0$  примем за единицу длины и сформулируем осесимметричную задачу о равновесной форме свободной поверхности жидкости в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерные цилиндрические координаты  $z$  и  $r$  так, чтобы ось  $z$  совпала с осью симметрии капилляра, и направим её против вектора ускорения свободного падения  $g$ . Выберем начало координат на плоской горизонтальной пластине, а именно – в центре основания капилляра. Обозначим через  $s$  безразмерную длину дуги искомой равновесной линии, изменяющуюся от  $s = 0$  в точке контакта меридиана с плоскостью  $r = 0$  до  $s = L$  в точке контакта меридиана с плоскостью  $z = 0$  или твердой стенкой капилляра.

В предположении осевой симметрии конфигурация свободной поверхности описывается некоторой парой параметрических функций  $r(s)$ ,  $z(s)$ , которые в условиях равновесия и присутствия силы тяжести удовлетворяют параметрическим уравнениям [1]:

$$\begin{aligned} z'' &= r'F, & r'' &= -z'F, & 0 \leq s \leq L, \\ F &= -Boz - z'/r + C, \end{aligned} \quad (1)$$

где производные берутся по переменной  $s$ ;  $Bo = \rho g R_0^2 / \sigma$  – число Бонда;  $C$  – неопределенная пока константа;  $\rho$  – плотность жидкости;  $\sigma$  – коэффициент поверхностного натяжения.

Система дифференциальных уравнений (1) дополняется краевыми условиями симметрии на оси капилляра

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \quad (2)$$

и краевыми условиями контакта с твердой стенкой в зависимости от положения свободной поверхности жидкости:

а) 
$$r(L) = 1, \quad r'(L) = \sin \alpha, \quad z'(L) = -\cos \alpha, \quad (3)$$

если точка контакта находится внутри капилляра;

б) 
$$r(L) = 1, \quad z(L) = 0, \quad (4)$$

если точка контакта закреплена на основании капилляра;

в) 
$$z(L) = 0, \quad r'(L) = \cos \alpha, \quad z'(L) = \sin \alpha, \quad (5)$$

если точка контакта находится на горизонтальной поверхности пластины.

Безразмерный объем жидкости определим как объем тела вращения

$$U = -2\pi \int_0^L z r r' ds, \quad \text{где } U = V / R_0^3. \quad (6)$$

Таким образом, задача разбивается на три подзадачи в зависимости от точки контакта свободной поверхности с твердой стенкой.

Следуя стратегии в [2], для получения явной формулы вычисления безразмерной длины  $L$  в процессе итерационного решения нелинейной задачи, сформулируем подзадачу (1), (2), (4), (6) в новых переменных

$$\bar{s} = s/L \in [0, 1], \quad \bar{z} = z/L, \quad \bar{r} = r/L.$$

Введем в рассмотрение новое неизвестное  $\beta(\bar{s})$  – угол между касательной к равновесной линии  $\bar{r}(\bar{s})$ ,  $\bar{z}(\bar{s})$  и осью  $O\bar{r}$ . В силу того, что  $\bar{r}' = \cos \beta$ ,  $\bar{z}' = \sin \beta$  подзадача (1), (2), (4), (6) примет вид

$$\begin{aligned} \beta' &= \Phi, & \beta(0) &= 0, & \beta(1) &= \gamma, \\ \bar{r}' &= \cos \beta, & \bar{r}(0) &= 0, & \bar{r}(1) &= 1/L, & \bar{z}' &= \sin \beta, & \bar{z}(1) &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

где  $\Phi = \Phi(\beta, \bar{r}, \bar{z}, L, C) = -BoL^2 \bar{z} - \sin \beta / \bar{r} + C$ ,  $\alpha - \pi/2 \leq \gamma \leq \alpha$  – свободный параметр,  $C = L(2 \sin \gamma - BoU/\pi)$ ,  $U = -2\pi L^3 \int_0^1 \bar{z} \bar{r} \cos \beta d\bar{s}$ .

На равномерной сетке  $\{\bar{s}_i = ih \mid i = \overline{0, N}, h = 1/N\}$  для подзадачи (7) построим разностную схему второго порядка аппроксимации

$$\begin{aligned}
 (\beta_i - \beta_{i-1})/h &= \Phi_{i-1/2}, \quad \Phi_{i-1/2} = \Phi(\beta_{i-1/2}, \bar{r}_{i-1/2}, \bar{z}_{i-1/2}, L, C), \\
 (\bar{r}_i - \bar{r}_{i-1})/h &= \cos \beta_{i-1/2}, \quad (\bar{z}_i - \bar{z}_{i-1})/h = \sin \beta_{i-1/2}, \quad i = \overline{1, N}, \\
 \beta_{i-1/2} &= (\beta_{i-1} + \beta_i)/2, \quad \bar{r}_{i-1/2} = (\bar{r}_{i-1} + \bar{r}_i)/2, \quad \bar{z}_{i-1/2} = (\bar{z}_{i-1} + \bar{z}_i)/2, \\
 \beta_0 &= 0, \quad \beta_N = \gamma, \quad \bar{r}_0 = 0, \quad \bar{z}_N = 0, \\
 L &= 1/\bar{r}_N, \quad U = -2\pi L^3 h \sum_{i=1}^{N-1} \bar{z}_i \bar{r}_i \cos \beta_i, \quad C = L(2 \sin \gamma - BoU / \pi).
 \end{aligned}$$

Тогда итерационный алгоритм для вычисления координат свободной поверхности построим в виде [2]

$$\beta_i^{n+1} = \beta_{i+1}^n - h\Phi_{i+1/2}^n + (1 - \tau)(\beta_i^n - \beta_{i+1}^n + h\Phi_{i+1/2}^n), \tag{8}$$

$$i = N - 1, N - 2, \dots, 1, \quad \beta_N^{n+1} = \gamma, \quad \beta_0^{n+1} = 0, \tag{9}$$

$$\bar{r}_i^{n+1} = \bar{r}_{i-1}^{n+1} + h \cos \beta_{i-1/2}^{n+1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \bar{r}_0^{n+1} = 0, \tag{10}$$

$$\bar{z}_i^{n+1} = \bar{z}_{i+1}^{n+1} - h \sin \beta_{i+1/2}^{n+1}, \quad i = N - 1, \dots, 0, \quad \bar{z}_N^{n+1} = 0,$$

где  $n = 0, 1, 2, \dots$  – номер итерации,  $\tau > 0$  – параметр релаксации.

Вычисления на каждой итерации осуществляются прямыми алгоритмами бегущего счета. Сначала по рекуррентному правилу (8) вычисляются сеточные значения  $\beta_i^{n+1}$ . Затем при помощи процедур (9) и (10) определяются новые итерационные приближения для координат свободной поверхности. И, наконец, по найденным значениям  $\bar{r}_i^{n+1}$ ,  $\bar{z}_i^{n+1}$ ,  $\beta_i^{n+1}$  вычисляются  $L^{n+1}$ ,  $U^{n+1}$ ,  $C^{n+1}$ ,  $\Phi_{i+1/2}^{n+1}$ . Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока невязка разностного уравнения (8) на  $n$ -ой итерации не будет удовлетворять условию

$$\max_{0 < i < N} |(\beta_{i+1}^n - \beta_i^n)/h - \Phi_{i+1/2}^n| \leq \varepsilon.$$

Расчеты осуществлялись для  $h = 1/100$ ,  $\varepsilon = 10^{-4}$ ,  $Bo = 1$ . Получен широкий спектр равновесных форм свободной поверхности для различных углов смачивания, проведено численное исследование устойчивости равновесных форм свободной поверхности жидкости. На рис. 2 построена зависимость, отражающая влияние угла смачивания на критический объем жидкости, при котором наступает кризис равновесия в виде отрыва порции жидкости от пластины. Полученные значения согласуются с теоретическими результатами линейной теории устойчивости [1].

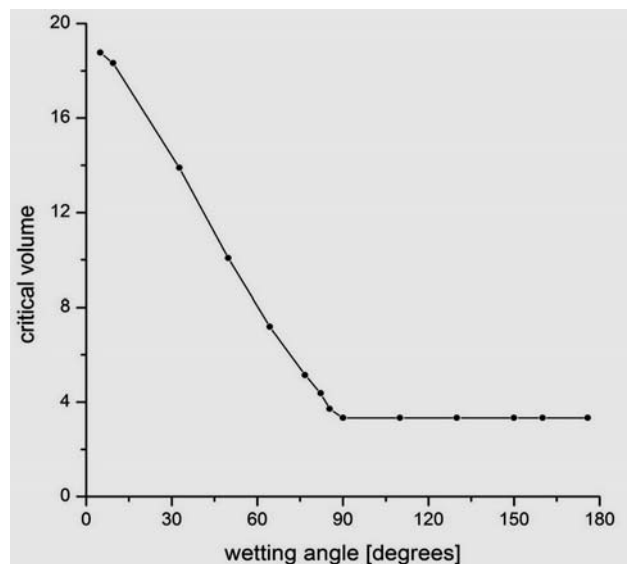


Рисунок 2 – Влияние угла смачивания на критический объем жидкости

**Список цитированных источников**

1. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / А. Д. Мышкис [и др.]; под ред. А. Д. Мышкиса. – Киев: Наукова думка, 1992. – 592 с.
2. Polevikov, V. K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces / V. K. Polevikov // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 4, № 1. – P. 66-93.



УДК 519.948

## НЕЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Гречко О.Г., Ершова Е.П.**

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Мадорский В.М., к. ф.- м. н., доцент

Для решения нелинейных уравнений вида:

$$F(x) = f(x) + g(x) = 0; \tag{1}$$

$$f: D \subset R^m \rightarrow R^m, \quad g: D \subset R^m \rightarrow R^m, \quad f \in C_D^1, g \in C_D;$$

Применим нелокальный вариант метода минимальных невязок. В результате получим нелинейную систему  $F(x)$ , состоящую из  $m$  нелинейных уравнений. Полученную систему решим с помощью нелокального варианта метода Канторовича-Красносельского.

Рассмотрим алгоритм решения:

**Шаг 1.** Находится очередное приближение по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n \frac{f'(x_n)f(x_n)}{\|f'(x_n)f(x_n)\|^2 (\|f(x_n)\|^2 + \beta_{n-1}\|g(x_n)\|^2)}; \tag{2}$$

**Шаг 2.** Проверяется выполнение условия  $\|F(x_{n+1})\| < \varepsilon$ , где  $\varepsilon$ -малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

**Шаг 3.** Производится пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_n (\|f'(x_n)\|^2 + \beta_{n-1}\|g(x_n)\|^2)}{(\|f'(x_{n+1})\|^2 + \beta_n\|g(x_{n+1})\|^2)}\right), \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}], \quad \beta_{-1} = \beta_0; \tag{3}$$

и переход на шаг 1.

Пусть выполняются соотношения:

$$\|f'(x)\| \leq K, \quad \|\beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n)\| \leq \beta_n L \|x_{n+1} - x_n\|, \quad \|f(x_n)\|^{-1} \leq B.$$

**Теорема:**

$$D = S\left(\frac{B(\|f'(x_0)\| + \beta_{-1}\|g(x_0)\|)}{1 - q_0}\right)$$

Пусть в области существует  $x^*$  – решение уравнения (1), операторы  $f$  и  $g$  удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение  $x_0$  и шаговые длины  $\beta_{-1}, \beta_0$  таковы, что

$$q_0 = \beta_0(KB + LB^2)\|f'(x_0) + \beta_{-1}g(x_0)\| < 1.$$

Тогда алгоритм (2) – (3) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к  $x^*$ .

Доказательство:

Доказательство этой теоремы связано с громоздкими преобразованиями, и его можно посмотреть в используемой нами литературе. Поэтому рассмотрим лишь этапы этого доказательства:

1) Доказывается релаксационность процесса (2) – (3):

$$\|f(x_{n+1})\| \leq q_n \|f(x_n)\|, \quad 0 < q_n < 1, \quad n = 0, 1, \dots;$$

2) Показывается, что последовательность  $\{q_n\} \nearrow 1, \{q_n\} \searrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ;

3) Проводится доказательство того, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f(x_n)\| = 0$ , следовательно, последовательность приближений  $\{x_n\}$  сходится к точному решению  $x^*$ ;

- 4) Показывается, что шаговая длина на некотором шаге становится равной 1, то есть  $\exists k, l \geq k, \beta_l = 1$ ;
- 5) Определяется область  $D = S(x_0, r)$ , где сходится рассматриваемый метод;
- 6) Доказывается сверхлинейность процесса (2) – (3).

### Численный эксперимент и его обсуждение

Рассматривается система нелинейных уравнений

$$F = \begin{cases} x_1 + 3|x_2| + x_3^3 - x_4 + p_1, \\ 2|x_1| - 2x_2 + x_3 + x_4 + p_2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4^2 + p_3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3^2 - 3x_4 + p_4 \end{cases}$$

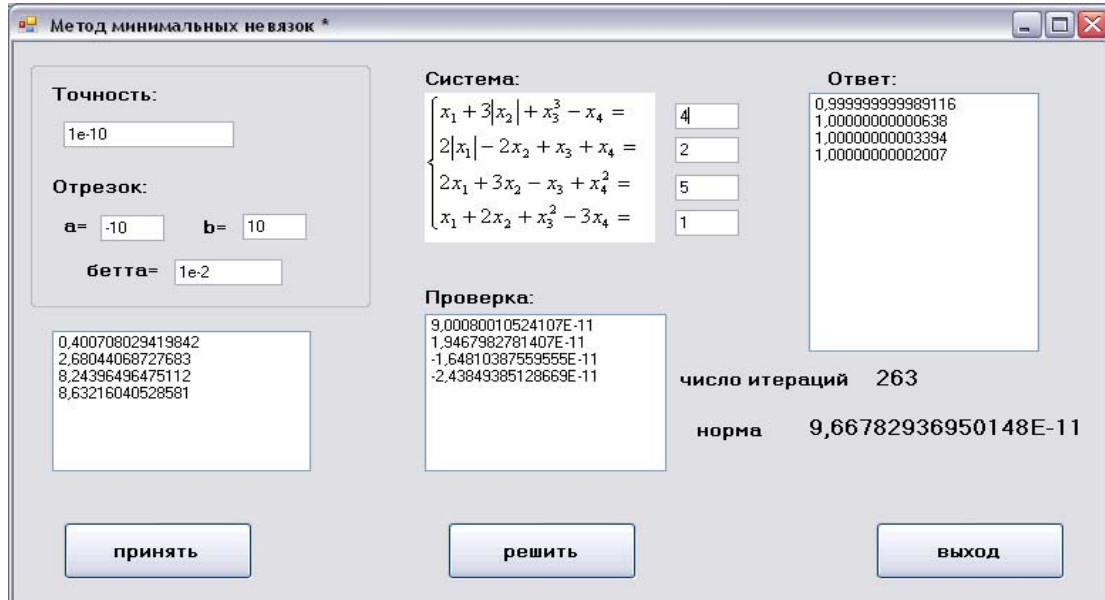
где  $F(x) = 0, f(D \in R^m \rightarrow R^m)$ . Представим эту систему в виде, применим для решения методом Канторовича-Красносельского:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 3|x_2|^2 + x_3^3 - x_4 + p_1 \\ 2|x_1|^2 - 2x_2 + x_3^3 + x_4 + p_2 \\ 2|x_1|^3 + 3x_2 - x_3 + x_4^2 + p_3 \\ x_1^3 + 2x_2 + x_3^2 - 3x_4 + p_4 \end{pmatrix};$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 3|x_2| - 3x_2^2 \\ 2|x_1| - 2x_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Система решается методом (2)-(3) с произвольных начальных приближений, где вектор  $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$  выбирается в зависимости от предполагаемого точного решения.

Ниже приводится окно программы:



В результате эксперимента с различными правыми частями  $p$  (соответственно с различными точными решениями) исследуем эффективность предлагаемого метода.

Результат эксперимента приведен в таблице, точность приближенного решения по норме невязки  $1E-10$ , меняется отрезок  $[a, b]$ , из которого случайным образом выбирают начальные приближения. Одно из точных решений системы имеет вид:

а) предполагаемое точное решение системы (1)  $x^* = (1, 1, 1, 1)$ , т.е. вектор  $p$  примет вид:  $p = (4, 2, 5, 1)$

б) предполагаемое точное решение системы (1)  $x^* = (-1, -1, 1, 1)$ , т.е. вектор  $p$  примет вид:  $p = (2, 6, -5, -5)$

**Таблица** – Связь между начальным приближением и эффективностью итерационного процесса

Отрезок [a, b]	Количество успешных запусков из 10 в случае	а	б
	[-1,1]	10	9
	[-2,2]	9	8
	[-3,3]	9	8
	[-4,4]	8	7
	[-5,5]	7	6
	[-6,6]	7	6
	[-10,10]	7	6

**Вывод:**

Анализ таблицы показывает, что предложенный метод позволяет довольно успешно решать системы нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором и с увеличением промежутка, из которого выбирается начальное приближение, уменьшается эффективность метода при различных вариантах предполагаемого решения.

**Список цитированных источников**

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

УДК 519.6+517.983

**ОСТАНОВ ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ**

**Дерачиц Н.А.**

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научный руководитель – Матысик О.В., к. ф.- м. н., доцент*

Проблема решения некорректных задач и разработки новых методов их решения весьма актуальна, поскольку такие задачи часто встречаются в многочисленных приложениях математики. Целью данной статьи является исследование неявной итерационной схемы решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода. Для достижения поставленной цели необходимо было разработать итерационный метод, доказать его сходимости в исходной норме гильбертова пространства с использованием правила останова по соседним приближениям.

В гильбертовом пространстве  $H$  решается линейное операторное уравнение первого рода:

$$Ax = y, \tag{1}$$

где  $A$  – оператор положительный, ограниченный, несамосопряжённый.

Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора  $A$ . Однако нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что  $y \in R(A)$ , т.е. при точной правой части  $y$  уравнение (1) имеет единственное решение  $x$ . Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = \left( E + \alpha (A^* A)^3 \right)^{-1} \left[ x_n + \alpha (A^* A)^2 A^* y \right], \quad x_0 = 0. \quad (2)$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближённо  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ , метод (2) примет вид

$$z_{n+1} = \left( E + \alpha (A^* A)^3 \right)^{-1} \left[ z_n + \alpha (A^* A)^2 A^* y_\delta \right] + \left( E + \alpha (A^* A)^3 \right)^{-1} u_n, \quad z_0 = 0, \quad (3)$$

где  $u_n$  – ошибки в вычислении итераций, причём  $\|u_n\| \leq \beta$ .

Обозначим  $C = \left( E + \alpha (A^* A)^3 \right)^{-1}$ ,  $B = \left( E + \alpha (A^* A)^3 \right)^{-1} \alpha (A^* A)^2 A^*$ . Тогда метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n. \quad (4)$$

В том случае, когда истокообразная представимость точного решения ( $x = A^s z$ ,  $s > 0$ ) неизвестна, итерационный метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [1-2]. Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и момент останова  $m$  определим условиями:

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \leq \varepsilon. \quad (5)$$

Справедливы

**Лемма 1.** Пусть приближение  $w_n$  определяется условиями

$$w_0 = z_0, \quad w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n, \quad n \geq 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^n \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$$

**Лемма 2.** При  $\forall w_0 \in H$  и произвольной последовательности ошибок  $\{u_n\}$ , удовлетворяющих условию  $\|u_n\| \leq \beta$ , выполнено неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta.$$

Обе леммы используются при доказательстве следующей теоремы.

**Теорема.** Пусть уровень останова  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$  выбирается как функция от уровней  $\delta$  и  $\beta$  норм погрешностей  $y - y_\delta$  и  $u_n$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ , то момент останова  $m$  определён при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta$  и  $u_n$ , удовлетворяющих условиям  $\|y - y_\delta\|, \|u_n\| \leq \beta$ ;

б) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$ , то справедлива оценка

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta)(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)};$$

в) если, кроме того,  $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0, \delta, \beta \rightarrow 0$  и  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$ , где  $d > 1, p \in (0, 1)$ , то  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$ , т.е. итерационный метод (3) с правилом останова (5) сходится к точному решению операторного уравнения.

**Список цитированных источников**

1. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.  
 2. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.

УДК 519.6+517.983

**ПРАВИЛО ОСТАНОВА ПО НЕВЯЗКЕ В НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ**

**Дерачиц Н.А.**

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
 Научный руководитель – Матысик О.В., к. ф.- м. н., доцент*

В действительном гильбертовом пространстве  $H$  решается линейное операторное уравнение

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором  $A$ , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается неявная итерационная процедура

$$(E + \alpha A^3)x_{n+1} = x_n + \alpha A^2 y, \quad x_0 = 0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения  $x$  уравнения (1) при точной правой части  $y$ , ищем его приближение  $x_{n,\delta}$  при приближённой правой части  $y_\delta, \|y - y_\delta\| \leq \delta$ . В этом случае метод (2) примет вид

$$(E + \alpha A^3)x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha A^2 y_\delta, \quad x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению  $x$  уравнения (1) при подходящем выборе  $n$  и достаточно малых  $\delta$ , т.е.  $\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \inf_n \|x - x_{n,\delta}\| \right) = 0$ .

Этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [1–2]. Зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и определим момент  $m$  останова условиями:

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b\delta, \quad b > 1. \tag{4}$$

Предполагается, что при начальном приближении  $x_{0,\delta}$  невязка достаточно велика, больше уровня останова  $\varepsilon$ , т.е.  $\|Ax_{0,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon$ .

Ниже метод итерации (3) с правилом останова (4) является сходящимся, если

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \inf_m \|x - x_{m,\delta}\| \right) = 0.$$

Справедливы

**Лемма 1.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq M$ . Тогда для любого  $\omega \in H$   $(E - Ag_n(A))\omega \rightarrow 0, n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 2.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq M$ . Тогда для  $\forall v \in \overline{R(A)}$  имеет место соотношение  $n^{s/3} \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, 0 \leq s < \infty$ .

**Лемма 3.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq M$ . Если для некоторой последовательности  $n_p < \bar{n} = \text{const}$  и  $v_0 \in \overline{R(A)}$  при  $p \rightarrow \infty$  имеем  $\omega_p = A(E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$ , то  $v_p = (E - Ag_{n_p}(A))v_0 \rightarrow 0$ .

Имеют место следующие теоремы.

**Теорема 1.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq M$  и пусть момент останова  $m = m(\delta)$  в методе (3) выбирается по правилу (4). Тогда метод (3) сходится.

**Теорема 2.** Пусть выполнены условия теоремы 1 и пусть  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ . Тогда

справедливы оценки  $m(\delta) \leq 1 + \frac{s+1}{6\alpha} \left[ \frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{3}{s+1}}$ .

$$\|x_{m(\delta),\delta} - x\| \leq [(b+1)\delta]^{s+1} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + 3\alpha^{1/3} \left\{ 1 + \frac{s+1}{6\alpha} \left[ \frac{\|z\|}{(b-1)\delta} \right]^{\frac{3}{s+1}} \right\}^{1/3} \delta. \quad (5)$$

**Замечание 1.** Порядок оценки (5) есть  $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$  и, как следует из [2], он оптима-

лен в классе задач с истокорпредставимыми решениями.

**Замечание 2.** Используемое в формулировке теоремы 2 предположение порядка  $s > 0$  истокорпредставимости точного решения не потребуется на практике, так как оно не содержится в правиле останова (4). И тем не менее в теореме 2 утверждается, что будет автоматически выбрано количество итераций  $m$ , обеспечивающих оптимальный порядок погрешности. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4), как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость итерационного метода, т. е. его регуляризующие свойства.

#### Список цитированных источников

1. Савчук, В.Ф. Регуляризация операторных уравнений в гильбертовом пространстве / В.Ф. Савчук, О.В. Матысик. – Брест: изд-во БрГУ им. А.С. Пушкина, 2008. – 196 с.
2. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А.Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.

УДК 518.948

## НЕЛОКАЛЬНЫЙ ГРАДИЕНТНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА КАНТОРОВИЧА-КРАСНОСЕЛЬСКОГО ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Жук Е.А., Мадорский В.М.**

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
 Научный руководитель – Мадорский В.М., к. ф.- м. н., доцент

Для решения нелинейных уравнений

$$F(x) = \|f(x) + g(x)\|^2 = 0; \quad (1)$$

$$f(D \subset R^n \rightarrow R^n), g(D \subset R^n \rightarrow R^n), f \in C_D^{(1)}, g \in C_D$$

применим следующий нелокальный вариант метода минимальных невязок:

**Шаг 1.** Находим  $x_{n+1}$  по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n \frac{\|f(x_n) + g(x_n)\|^2 \bar{f}'(x_n)[f(x_n) + g(x_n)]}{\|\bar{f}'(x_n)[f(x_n) + g(x_n)]\|^2}, PF'(x_n) = \bar{f}'(x_n)[f(x_n) + g(x_n)]. \quad (2)$$

Здесь  $P$  – оператор проектирования на дифференцируемую часть оператора  $F$ .

**Шаг 2.** Проверяем выполнение условия

$$\|F(x_{n+1})\| \leq \varepsilon, \quad (3)$$

где  $\varepsilon$  – малая величина (параметр останова).

Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

**Шаг 3.** Производим пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1} = \min(1, \frac{\beta_n \|f(x_n) + g(x_n)\|^2}{\|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\|^2}), \beta_0 \in [10^{-3}; 10^{-1}]. \quad (4)$$

и переходим на шаг 1.

Потребуем, чтобы в интересующей нас области  $D$  операторы  $f$  и  $g$  удовлетворяли условиям:

$$\|\beta_{n+1}g(x_{n+1}) - \beta_n g(x_n)\| \leq \beta_n L \|\Delta x_n\|, \quad \frac{1}{\|PF(x_n)\|} \leq B, \quad \|PF(x) - PF(y)\| \leq K \|x - y\| \quad \forall x, y \in D.$$

**Теорема 1.** Пусть в области  $D = \bar{S}(x_0, \frac{B \|f(x_0) + g(x_0)\|}{1 - q_0})$  существует  $x^*$  – решение уравнения (1), операторы  $f$  и  $g$  удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение  $x_0$  и шаговая длина  $\beta_0$  такова, что

$$\varepsilon_0 = \beta_0 (KB^2 + LB) \cdot \|f(x_0) + g(x_0)\| < 1,$$

тогда алгоритм (2) – (4) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к  $x^* \in D = \bar{S}(x_0, r)$ ,  $r = \frac{BF(x_0)}{1 - q_0}$  и справедлива оценка погрешности

и справедлива оценка погрешности

$$\|x^* - x_n\| \leq BF(x_0) \frac{q_0^n}{1 - q_0}, \quad q_0 = 1 - \beta_0(1 - \varepsilon_0) \quad (5)$$

### Доказательство

Используя идеи работы [2] и свойства проекционного оператора, вполне аналогично тому, как это было доказано в теореме 3.1 [2], покажем монотонное убывание последовательности  $\{q_n\}$ , то есть релаксационность процесса (2) – (4), монотонное возрастание

последовательности итерационных параметров  $\{\beta_i\}$  к 1, сильную сходимость итерационного процесса к решению  $x^*$ . Далее переходом к пределу в (4) при  $n \rightarrow \infty$  доказывается, что, начиная с некоторого номера  $k$ , для всех  $i \geq k$  все  $\beta_i \equiv 1$ , откуда простыми преобразованиями легко выводится локальная квадратичная сходимость итерационного процесса (2) – (4). Стандартными рассуждениями легко показать, что все последовательные приближения не выходят за пределы замкнутой сферы  $\bar{S}(x_0, r)$  и имеет место оценка (5).

Ниже предлагается ещё один весьма эффективный итерационный процесс, в котором шаг (3) имеет вид:

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\gamma_n \|f(x_n) + g(x_n)\|^2}{\beta_n \|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\|^2}\right), \beta_0 \in [10^{-3}; 10^{-1}]. \quad (6)$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1} \gamma_n \|f(x_n) + g(x_n)\|^2}{\beta_n \|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\|^2}, \gamma_0 = \beta_0^2. \quad (7)$$

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия теоремы 1. Тогда итерационный процесс (2) – (3), (6) – (7) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к  $x^*$  – решению уравнения (1) и справедлива оценка погрешности (5).

### Доказательство

Используя идеи работы [2], доказываем релаксационность процесса (2) – (3), (6) – (7). Далее проверяем выполнимость характеристического условия

$$\beta_n \|f(x_n) + g(x_n)\|^2 = \beta_{n+1} \|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\|^2.$$

Доказываем слабую, а затем и сильную сходимость последовательности  $\{x_n\}$  к решению уравнения (1), монотонное возрастание шаговых длин на каждом шаге итерационного процесса, а также доказываем, что существует такой номер итерации  $m$ , что для всех  $i \geq m$  значения итерационных параметров  $\beta_i$  становятся равными единице. Стандартным образом доказывается локальная квадратичная сходимость итерационного процесса (2) – (3), (6) – (7).

Вычислительный эксперимент на рассмотренной ниже нелинейной системе с недифференцируемым оператором показал высокую эффективность итерационного процесса (2) – (3), (6) – (7).

### Численный эксперимент и его обсуждение

Рассматривается система нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором:

$$F(x) = \begin{cases} |x_1| + x_2^2 + x_3 + x_4 - c_1 = 0, \\ x_1 + |x_2| + x_3^5 - x_4 - c_2 = 0, \\ x_1^3 + 2x_2 + |x_3| + x_4 - c_3 = 0, \\ x_1^2 + |x_2| + 5x_3 + x_4 - c_4 = 0. \end{cases}$$

где  $c_1, c_2, c_3, c_4$  – некоторые постоянные.

Система решается методом (2)-(4) с произвольных начальных приближений. Ниже приводится окно программы (рисунок 1).

В результате эксперимента с различными правыми частями (соответственно с различными точными решениями) показана эффективность предлагаемого метода. Результаты эксперимента сведены в таблицу. Точность решения по норме невязки  $1E-10$ . Менялся отрезок  $[a; b]$ , из которого случайным образом выбиралось начальное приближение.



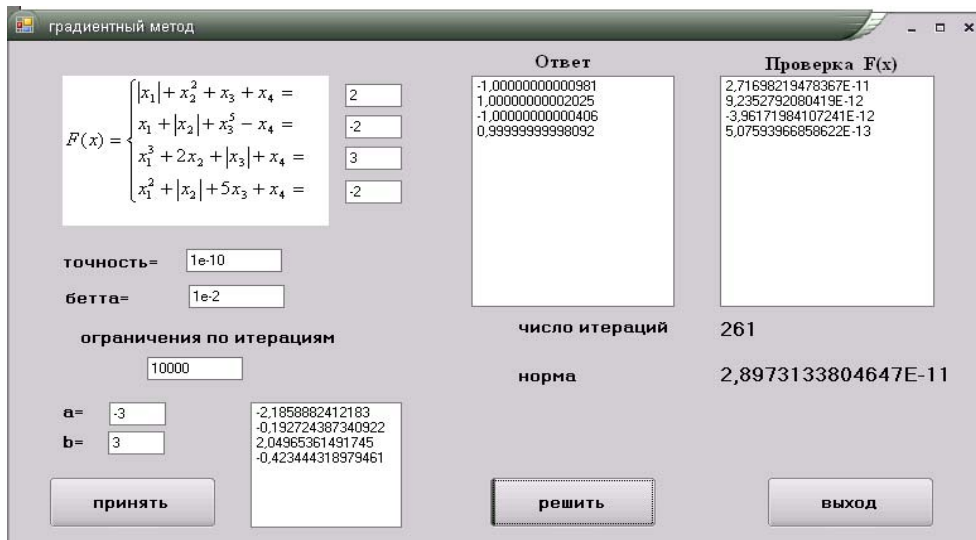


Рисунок 1

Таблица – Связь между начальным приближением и эффективностью итерационного процесса

[a;b] \ Одно из точн. реш-й	Количество успешных запусков из 10			
	(-1; 1; 1; 1)	(-1; 1; -1; 1)	(-1; 1; -1; -1)	(-1; -1; -1; -1)
[0;1]	10	10	10	10
[-3;3]	10	10	10	10
[-10;10]	10	10	9	10
[-30;30]	8	8	7	8

**Вывод:** анализ таблицы показывает, что предложенный метод позволяет довольно успешно решать системы нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором и чем меньше отрезок, из которого берётся начальное приближение, тем эффективнее работает метод.

Заявленная точность 1E-10 являлась тестовой, однако, как показывает вычислительный эксперимент, точность решения может быть значительно повышена.

**Список цитированных источников**

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
2. Мадорский В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

УДК 519.6+517.983

**РЕШЕНИЕ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА ПРИ ПОМОЩИ ИТЕРАЦИОННЫХ ПРОЦЕДУР С АПОСТЕРИОРНЫМ ВЫБОРОМ ЧИСЛА ИТЕРАЦИЙ**

**Зданевич М.В., Улезло Р.Ю.**

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
 Научный руководитель – Матысик О.В., к. ф.- м. н., доцент

**1. Правило останова по невязке.** В гильбертовом пространстве  $H$  решается уравнение I рода  $Ax = y$  с положительным ограниченным самосопряжённым оператором  $A$ ,

для которого нуль не является собственным значением, но  $0 \in Sp A$  (поэтому рассматриваемая задача некорректна). Используется итерационный метод

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= x_n - \alpha_{n+1}(Ax_n - y), \quad x_0 = 0, \\ \alpha_{2n+1} &= \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Предполагая существование единственного точного решения  $x$  уравнения  $Ax = y$  при точной правой части  $y$ , ищем его приближение  $x_{n,\delta}$  при приближенной правой части  $y_\delta$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ . В этом случае метод примет вид

$$\begin{aligned} x_{n+1,\delta} &= x_{n,\delta} - \alpha_{n+1}(Ax_{n,\delta} - y_\delta), \quad x_{0,\delta} = 0, \\ \alpha_{2n+1} &= \alpha, \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad \alpha_{2n+2} = \beta, \quad n = 0, 1, 2, \dots \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь  $0 < \alpha < 2$ ,  $\beta > 0$  и  $|(1 - \alpha\lambda)(1 - \beta\lambda)| < 1$ . В случае, когда неизвестна истокорпредставимость точного решения, т.е. что  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ , метод (1) можно сделать эффективным, если воспользоваться правилом останова по невязке [1-2]: зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и момент  $m$  останова итерационного метода определим условиями

$$\|Ax_{n,\delta} - y_\delta\| > \varepsilon, \quad (n < m), \quad \|Ax_{m,\delta} - y_\delta\| \leq \varepsilon, \quad \varepsilon = b_1\delta, \quad b_1 > 1. \quad (3)$$

Покажем возможность применения правила (3) к методу (2). Для простоты считаем, что  $\|A\| = 1$ . Справедливы

**Лемма 1.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq 1$ . Тогда для  $\forall w \in H \quad (E - Ag_n(A))w \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ .

**Лемма 2.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq 1$ . Тогда для  $\forall v \in \overline{R(A)}$  имеет место соотношение  $n^s \|A^s (E - Ag_n(A))v\| \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $0 \leq s \leq \infty$ .

**Лемма 3.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq 1$ . Если для некоторого  $n_k \leq \bar{n} = const$  и  $v_0 \in \overline{R(A)}$  при  $k \rightarrow \infty$  имеем  $w_k = A(E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$ , то  $v_k = (E - Ag_{n_k}(A))v_0 \rightarrow 0$ .

Имеют место

**Теорема 1.** Пусть  $A = A^* \geq 0$ ,  $\|A\| \leq 1$  и пусть момент останова  $m = m(\delta)$  ( $m$  – чётное) в методе (2) выбирается по правилу (3). Тогда  $x_{m(\delta),\delta} \rightarrow x$  при  $\delta \rightarrow 0$ .

**Теорема 2.** Пусть выполняются условия теоремы 1 и пусть  $x = A^s z$ ,  $s > 0$ , тогда

справедливы оценки  $m \leq 2 + \frac{s+1}{\alpha + \beta} \left[ \frac{\|z\|}{(b_1 - 1)\delta} \right]^{s+1}$ ,

$$\|x_{m,\delta} - x\| \leq [(b_1 + 1)\delta]^{\frac{s}{s+1}} \|z\|^{\frac{1}{s+1}} + \frac{\alpha + \beta}{2} \left\{ 2 + \frac{s+1}{\alpha + \beta} \left[ \frac{\|z\|}{(b_1 - 1)\delta} \right]^{\frac{1}{s+1}} \right\} \delta. \quad (4)$$

**Замечание 1.** Порядок оценки (4) есть  $O\left(\delta^{\frac{s}{s+1}}\right)$ , и он оптимален в классе задач с

истокорпредставимыми решениями [1].

**Замечание 2.** Используемое в формулировке теоремы 2 предположение, что порядок истокорпредставимости точного решения равен  $s > 0$ , не требуется на практике, так как при останове по невязке автоматически делается число итераций, нужное для получения оптимального по порядку приближённого решения. Но даже если истокорпредставимость точного решения отсутствует, останов по невязке (4) как показывает теорема 1, обеспечивает сходимость метода, т.е. его регуляризующие свойства.

**2. Правило останова по соседним приближениям.** В действительном гильбертовом пространстве  $H$  для решения уравнения  $Ax = y$  (здесь  $A$  – ограниченный, положительный, несамосопряженный оператор, для которого нуль не является собственным значением, но нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , и, следовательно, задача некорректна) используем явную схему метода итераций

$$x_{n+1} = (E - \alpha A^* A)^2 x_n + A^{-1} [E - (E - \alpha A^* A)^2] y, \quad x_0 \in H. \quad (5)$$

В случае, когда правая часть  $y$  уравнения  $Ax = y$  известна приближенно,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ , метод (5) примет вид:

$$z_{n+1} = (E - \alpha A^* A)^2 z_n + A^{-1} [E - (E - \alpha A^* A)^2] y_\delta + (E - \alpha A^* A)^2 u_n, \quad z_0 \in H. \quad (6)$$

Здесь  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4\|A^* A\|}$ ,  $u_n$  – ошибки вычисления итераций,  $\|u_n\| \leq \beta$ . Для простоты считаем, что  $\|A\| = 1$ . Обозначим через  $C = (E - \alpha A^* A)^2$ ,  $B = A^{-1} [E - (E - \alpha A^* A)^2]$ . Тогда метод итераций (3) запишется в виде  $z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n$ . В дальнейшем будет использовано равенство  $A^* Ax = A^* y$ .

Воспользуемся правилом останова соседним приближениям [2-3]: зададим уровень останова  $\varepsilon > 0$  и момент  $m$  останова итерационного метода определим условиями

$$\left. \begin{aligned} \|z_n - z_{n+1}\| &> \varepsilon, \quad (n < m) \\ \|z_m - z_{m+1}\| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Покажем, что метод (6) с правилом останова (7) сходится. Получим оценку для момента останова. Справедливы

**Лемма 3.** Пусть приближение  $w_n$  определяется равенствами  $w_0 = z_0$ ,  $w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n$ ,  $n \geq 0$ , тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^n \|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \leq \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1} \|Cu_k\|^2.$$

**Лемма 4.** При любом  $w_0 \in H$  и произвольной последовательности ошибок  $\{u_n\}$ , удовлетворяющих условию  $\|u_n\| \leq \beta$ , выполнено неравенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|w_n - w_{n+1}\| \leq 2\|C\|\beta.$$

Имеет место

**Теорема 3.** Пусть уровень останова  $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \beta)$  выбирается как функция от уровней  $\delta$  и  $\beta$  норм погрешностей  $y - y_\delta$  и  $u_n$ . Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > 2\|C\|\beta$ , то момент останова  $m$  определен при любом начальном приближении  $z_0 \in H$  и любых  $y_\delta$  и  $u_n$ , удовлетворяющих условиям  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ ,  $\|u_n\| \leq \beta$ ;

б) если  $\varepsilon(\delta, \beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$ , то справедлива оценка

$$m \leq \frac{\|z_0 - x\|^2}{(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta)(\varepsilon - \|B\|\delta)};$$

в) если, кроме того,  $\varepsilon(\delta, \beta) \rightarrow 0$ ,  $\delta, \beta \rightarrow 0$  и  $\varepsilon(\delta, \beta) \geq d(\|B\|\delta + \|C\|\beta^p)$ , где  $d > 1$ ,  $p \in (0, 1)$ , то  $\lim_{\delta, \beta \rightarrow 0} \|z_m - x\| = 0$ , т.е. метод (6) с правилом останова (7) сходится к

точному решению операторного уравнения.

#### **Список цитированных источников**

1. Вайникко, Г.М. Итерационные процедуры в некорректных задачах / Г.М. Вайникко, А. Ю. Веретенников. – М.: Наука, 1986. – 178 с.
2. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38-43.
3. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.

УДК 517.9

## **О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ НЕАВТОНОМНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В АЛГЕБРЕ ОБОБЩЕННЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ**

*Каримова Т.И.*

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Одной из причин активного развития стохастического анализа и теории стохастических дифференциальных уравнений в последнее время является то, что большинство случайных процессов, встречающихся в приложениях, не являются дифференцируемыми. Задачи с недифференцируемыми функциями можно рассматривать при помощи теории распределений Л.Шварца, однако она применима лишь к линейным задачам, что не всегда удовлетворяет требованиям практики. Поэтому построение Ж.Коломбо (см., напр., [1]) алгебры новых обобщенных функций позволило изучать стохастические дифференциальные уравнения методами классического анализа. В работах многих авторов были предложены различные конструкции алгебр обобщенных случайных процессов. В дальнейшем будем использовать алгебру, введенную Н.В. Лазаковичем в статье [2]. В ней на основе аппарата алгебры обобщенных случайных процессов предложен единый подход к исследованию стохастических дифференциальных уравнений. Суть его состоит в замене исходного стохастического уравнения на уравнение в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов. При этом возникает естественный вопрос о существовании и единственности решений уравнений в дифференциалах. В данной статье эта задача рассматривается для систем неоднородных уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов.

Напомним некоторые понятия работы [2].

Пусть везде далее  $T = [0, a]$  – отрезок вещественной прямой  $\mathbb{R}$ ,  $a > 0$ , а  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  – полное вероятностное пространство.

Расширенной прямой  $\widetilde{\mathbb{R}}$  называется следующее фактор-множество  $\widetilde{\mathbb{R}} = \overline{\mathbb{R}} / M$ , где  $\overline{\mathbb{R}} = \{(x_n)_{n=1}^\infty : \forall n \in \mathbb{N} x_n \in \mathbb{R}\}$  и  $M = \{(x_n)_{n=1}^\infty \in \overline{\mathbb{R}} : \exists n_0 \forall n > n_0 x_n = 0\}$ .

Аналогичным образом определяется  $\widetilde{T}$ , где  $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$ ,  $a > 0$ ,  $\overline{T} = \{(x_n)_{n=1}^\infty : \forall n \in \mathbb{N} x_n \in T\}$ .

Рассмотрим множество  $G(T, \Omega)$  последовательностей случайных функций  $f_n : T \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  со следующими свойствами: 1)  $f_n(t, \cdot)$  является случайной величиной на  $(\Omega, \mathcal{F}, P)$  для всех  $t \in T$  и  $n \in \mathbb{N}$ ; 2)  $f_n(\cdot, \omega) \in C^\infty(T)$  для всех  $n \in \mathbb{N}$  и почти всех  $\omega \in \Omega$ .

Будем говорить, что последовательности  $F = (f_n(t, \omega))$  и  $G = (g_n(t, \omega))$  эквивалентны, если существует такой номер  $n_0$ , что для любых  $t \in T$  и почти всех  $\omega \in \Omega$   $f_n(t, \omega) = g_n(t, \omega)$  при  $n > n_0$ .

Обозначим  $G(\widetilde{T}, \Omega)$  множество классов эквивалентности множества  $G(T, \Omega)$ . Очевидно, что  $G(\widetilde{T}, \Omega)$  – алгебра с покоординатным сложением и умножением.

**Определение 1.** Множество  $G(\widetilde{T}, \Omega)$  – алгебра обобщенных случайных процессов, а ее элементы – обобщенные случайные процессы.

Будем говорить, что обобщенный случайный процесс  $\widetilde{F} = [(f_n)] \in G(\widetilde{T}, \Omega)$  ассоциирует классический случайный процесс  $f$  из некоторого пространства, если  $f_n \rightarrow f$  при  $n \rightarrow \infty$  в этом пространстве.

Пусть  $B(t) = (B^1(t), \dots, B^m(t))$ ,  $t \in T$  –  $m$ -мерный стандартный процесс броуновского движения. Обозначим через  $\mathcal{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in T}$  поток  $\sigma$ -алгебр, порожденный броуновским движением  $B$ . Причем считаем, что  $\mathcal{F}_0$  содержит все события нулевой вероятности из  $\mathcal{F}$ .

Рассмотрим систему стохастических дифференциальных уравнений

$$dX^i(t) = f^i(t, X(t))dB(t) + g^i(t, X(t))dt, \quad i = \overline{1, r}, \quad t \in T, \quad (1)$$

с начальным условием  $X^i(0) = x^i$ .

В алгебре  $G(\widetilde{T}, \Omega)$  ([2]) ей будет соответствовать следующая задача Коши:

$$\begin{cases} d_{\tilde{h}} \tilde{X}^i(\tilde{t}) = \sum_{j=1}^m \tilde{f}^{ij}(\tilde{t}, \tilde{X}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{B}^j(\tilde{t}) + \tilde{g}^i(\tilde{t}, \tilde{X}(\tilde{t})) d_{\tilde{h}} \tilde{t}, \\ \tilde{X}^i(\tilde{t})|_{[\tilde{0}, \tilde{h}]} = \tilde{X}^{0i}(\tilde{t}), \quad i = \overline{1, r}, \end{cases} \quad (2)$$

где  $\tilde{0} = [(0)]$ ,  $\tilde{h} = [(h_n)] \in \widetilde{T}$ ,  $\tilde{f}^{ij} = [(f_n^{ij})] \in G(\widetilde{\mathbb{R}}^{r+1})$  и  $\tilde{g}^i = [(g_n^i)] \in G(\widetilde{\mathbb{R}}^{r+1})$  ассоциируют функции  $f^{ij}$  и  $g^i$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $j = \overline{1, m}$  соответственно, а  $\tilde{B}^j = [(B_n^j)] \in G(\widetilde{T}, \Omega)$  – обобщенный процесс, ассоциирующий процесс броуновского движения и «начальное условие»  $\tilde{X}^{0i} = [(X_n^{0i})] \in G(\widetilde{T}, \Omega)$  – ассоциирует  $x^i \in \mathbb{R}$ .

На уровне представителей задача (2) запишется следующим образом:

$$\begin{cases} X_n^i(t+h_n) - X_n^i(t) = \sum_{j=1}^m f_n^{ij}(t, X_n(t)) [B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t, X_n(t)) h_n, \\ X_n^i(t)|_{[0, h_n]} = X_n^{0i}(t), \quad i = \overline{1, r}, \quad t \in [0; a], \end{cases} \quad (3)$$

где  $B_n^j = (B^j * \rho_n^j)(t) = \int_0^{1/n} B^j(t+s) \rho_n^j(s) ds$ ,  $\rho_n^j(t) \in \mathbb{C}^\infty(\mathbb{R})$ ,  $\rho_n^j \geq 0$ ,  $\text{supp } \rho_n^j(t) \subset [0, 1/n]$   $\int_0^{1/n} \rho_n^j(s) ds = 1$ ,  $j = \overline{1, m}$ ,  $f_n^{ij} = (f^{ij} * \bar{\rho}_n)$ ,  $g_n^i = (g^i * \bar{\rho}_n)$ ,  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ , а  $\bar{\rho}_n$  – неотрицательная бесконечно дифференцируемая функция, носитель которой содержится в  $[0, 1/n]^{r+1}$  и  $\int_0^{1/n} \dots \int_0^{1/n} \bar{\rho}(s, s_1, \dots, s_r) ds ds_1 \dots ds_r = 1$ .

Наряду с задачей (1) рассмотрим следующую систему

$$X^i(t) = x^i + \sum_{j=1}^m (\theta_j) \int_0^t f^{ij}(s, X(s)) dB^j(s) + \int_0^t g^i(s, X(s)) ds, \quad i = \overline{1, r}, \quad (4)$$

с начальным условием  $X(0) = x$ , где  $X(t) = (X^1(t), X^2(t), \dots, X^r(t))$ ,  $x = (x^1, x^2, \dots, x^r)$ ,  $g^i \in \mathbb{C}_B^1(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $f^{ij} \in \mathbb{C}_B^2(\mathbb{R}^{r+1})$ ,  $i = \overline{1, r}$ ,  $j = \overline{1, m}$ , стохастические интегралы в правой части (4) – это стохастические  $\theta$ -интегралы,  $\theta \in [0, 1]$ .

**Теорема.** В алгебре  $G(\tilde{T}, \Omega)$  решение задачи Коши (2) существует и единственно тогда и только тогда, когда для любых представителей  $(f_n^{ij}) \in \tilde{f}^{ij}$ ,  $(g_n^i) \in \tilde{g}^i$ ,  $(B_n^j) \in \tilde{B}^j$ ,  $(X_n^i) \in \tilde{X}^i$ ,  $(X_n^{0i}) \in \tilde{X}^{0i}$  для достаточно больших номеров  $n$  выполняется условие:

$$\begin{aligned} \frac{d^l}{ds^l} X_n^{0i}(h_n - s) - \frac{d^l}{ds^l} X_n^{0i}(s) - \sum_{j=1}^m \frac{d^l}{ds^l} [f_n^{ij}(s, X_n^0(s)) [B_n^j(h_n + s) - B_n^j(s)]] - \\ - \frac{d^l}{ds^l} g_n^i(s, X_n^0(s)) h_n \rightarrow 0, \end{aligned}$$

при  $s \rightarrow +0$  почти наверное для любых  $l = 0, 1, 2, \dots$ ,  $i = \overline{1, 2, \dots, r}$ .

**Доказательство.** Записав задачу (2) на уровне представителей в виде (3), очевидным образом получаем, что для каждого  $n$  функции  $X_n$  существуют и единственны. Покажем, что при выполнении условий теоремы функции  $X_n$  бесконечно дифференцируемы для достаточно больших  $n$ . Из этого факта будет вытекать, что последовательность  $X_n$  определяет элемент алгебры  $G(\tilde{T}, \Omega)$ , который и будет искомым решением задачи (2).

Из формулы (3) вытекает, что если  $X_n(t)$  бесконечно дифференцируема в точке  $t \neq 0$ , то она бесконечно дифференцируема в точке  $t + h_n$ . Поэтому достаточно пока-

зать бесконечную дифференцируемость  $X_n$  в точках  $t \in [0, h_n)$ . Если  $t \in (0, h_n)$ , то  $X_n(t) = X_n^0(t)$  и является бесконечно дифференцируемой.

Рассмотрим  $t = h_n$ . Найдем в этой точке левостороннюю и правостороннюю производную  $X_n^i(t)$ .

$$\left. \frac{d}{dt} X_n^i(t) \right|_{t=h_n+0} = \frac{d}{dt} \left\{ X_n^{0i}(t) + \sum_{j=1}^m f_n^{ij}(t, X_n^0(t)) [B_n^j(t+h_n) - B_n^j(t)] + g_n^i(t, X_n^0(t))h_n \right\} \Big|_{t=+0}$$

$$\left. \frac{d}{dt} X_n^i(t, \omega) \right|_{t=h_n-0} = \frac{d}{dt} X_n^{0i}(t, \omega) \Big|_{t=h_n-0}.$$

Из условия теоремы вытекает, что левосторонняя и правосторонняя производные равны, поэтому  $X_n(t)$  дифференцируема в точке  $t = h_n$  и ее производная непрерывна в этой точке.

Существование производных высших порядков в этой точке доказывается аналогично. Теорема доказана.

**Список цитированных источников**

1. Colombeau, J.F. A multiplication of distributions // J. Math. Anal. And Appl. – 1983. – V. 94, №1. – P. 96–115.
2. Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады АН Беларуси. – 1994. – Т.38, №5. – С. 23–27.

УДК 534.26

**ПРОНИКНОВЕНИЕ ЗВУКОВОГО ПОЛЯ ЧЕРЕЗ ПЛОСКИЙ ПРОНИЦАЕМЫЙ СЛОЙ**

**Киселева Н.Н.**

*УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно  
Научный руководитель – Шушкевич Г.Ч., д. ф.-м. н., доцент*

Пусть все пространство  $R^3$  разделено «плоскостями  $\Gamma_1 (z_1 = 0)$  и  $\Gamma_2 (z_2 = 0)$  на три области  $D_1 (z_1 > 0)$ ,  $D_2 (z_1 < 0 \cup z_2 > 0)$ ,  $D_3 (z_2 < 0)$ . Расстояние между плоскостями равно  $h_2$ . В области  $D_1$  находится идеально тонкая незамкнутая сферическая оболочка  $S_1$ , расположенная на сфере  $S$ , радиуса  $a$  с центром в точке  $O$ . Расстояние от точки  $O$  до плоскости  $\Gamma_1$  равно  $h_1$ . Область, ограниченную сферой  $S$ , обозначим  $D_0$ . Три области заполнены материалом, в котором не распространяются сдвиговые волны. Плотность и волновое число в области  $D_j$  равны соответственно  $\rho_j, k_j, j = 1, 2, 3, \rho_1 = \rho_3, k_1 = k_3$ . В точке  $O$  расположен точечный сферический источник звукового поля [1].

Постановка задачи: требуется найти вторичное звуковое давление  $p_j, j = 1, 2, 3$ , удовлетворяющее уравнению Гельмгольца  $\Delta p_j + k_j p = 0$ , граничному условию на поверхности сферической оболочки  $S_1$  (акустически мягкая оболочка):

$$(p_c + p_0) \Big|_{S_1} = p_1 \Big|_{S_1} = 0, \tag{1}$$

граничным условиям на проницаемой плоскости  $\Gamma_1$ :

$$p_1|_{\Gamma_1} = p_2|_{\Gamma_1}, \quad \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_1} = \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_1}, \quad (2)$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности  $\Gamma_1$ ,

граничным условиям на проницаемой плоскости  $\Gamma_2$ :

$$p_2|_{\Gamma_2} = p_3|_{\Gamma_2}, \quad \frac{1}{\rho_2} \frac{\partial p_2}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_2} = \frac{1}{\rho_1} \frac{\partial p_3}{\partial \vec{n}} \Big|_{\Gamma_2}, \quad (3)$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности  $\Gamma_2$ ,

условию на бесконечности [1]:

$$\lim_{r_j \rightarrow \infty} r_j \left( \frac{\partial p_j}{\partial r_j} - ik_j p_j \right) = 0, \quad j = 1, 2, 3. \quad (4)$$

Потребуем выполнения также условий непрерывности давления на поверхности сферы  $S$  и скорости на  $S \setminus S_1$ :

$$(p_c + p_0)|_S = p_1|_S, \quad \frac{\partial (p_c + p_0)}{\partial \vec{n}} \Big|_{S \setminus S_1} = \frac{\partial p_1}{\partial \vec{n}} \Big|_{S \setminus S_1}, \quad (5)$$

где  $\vec{n}$  – нормаль к поверхности  $S \setminus S_1$ .

Давление исходного звукового поля представим в виде ряда по сферическим волновым функциям [2].

$$p_c = P \frac{e^{ik_1 r}}{r} = ik_1 P h_0^{(1)}(k_1 r) = ik_1 P \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{0k} h_n^{(1)}(k_1 r) P_n(\cos \theta), \quad (6)$$

где  $h_n^{(1)}(k_1 r)$  – функции Ханкеля,  $P_n(\cos \theta)$  – полиномы Лежандра,  $\delta_{0k}$  – символ Кронекера,  $P$  – const,  $i$  – мнимая единица.

Давление  $p_j$  рассеянного звукового поля в области  $D_j$ ,  $j = 0, 1, 2, 3$  представим в виде суперпозиции базисных решений уравнения Гельмгольца [2], принимая во внимание условие на бесконечности (4),

$$p_0(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} x_n \frac{j_n(k_1 r)}{j_n(k_1 a)} P_n(\cos \theta) \text{ в } D_0, \quad (7)$$

$$p_1 = p_1^{(1)}(r, \theta) + p_1^{(2)}(\rho_1, z_1) \text{ в } D_1,$$

$$p_1^{(1)}(r, \theta) = P \sum_{n=0}^{\infty} y_n \frac{h_n^{(1)}(k_1 r)}{h_n^{(1)}(k_1 a)} P_n(\cos \theta), \quad (8)$$

$$p_1^{(2)}(\rho_1, z_1) = P \int_0^{\infty} a(\lambda) J_0(\lambda \rho_1) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z_1} \lambda d\lambda, \quad (9)$$

$$p_2 = P \int_0^{\infty} b(\lambda) J_0(\lambda \rho_1) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z_1} \lambda d\lambda + P \int_0^{\infty} \gamma(\lambda) J_0(\lambda \rho_2) e^{-\sqrt{\lambda^2 - k_2^2} z_2} \lambda d\lambda \text{ в } D_2, \quad (10)$$

$$p_3(\rho_2, z_2) = P \int_0^{\infty} c(\lambda) J_0(\lambda \rho_1) e^{\sqrt{\lambda^2 - k_1^2} z_2} \lambda d\lambda \text{ в } D_3. \quad (11)$$



Метод решения задачи (1)-(6) основан на использовании теории сложения для волновых функций и парных уравнений. Выполняя граничные условия (1)-(3), и учитывая представления для потенциалов (7)-(11) получим бесконечную СЛАУ второго рода с вполне непрерывным оператором [3]. Для некоторых геометрических параметров задачи найдено значение давления в области  $D_3$ . Проведен вычислительный эксперимент.

**Список цитированных источников**

1. Иванов, Н.И. Инженерная акустика. Теория и практика борьбы с шумом / Н.И. Иванов. – М.: Университетская книга, Логос. – 2008. – 424 с.
2. Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и таблицами / М. Абрамовица [и др.]; под ред. М. Абрамовица. – М.: Наука, 1979.
3. Иванов, Е.А. Дифракция электромагнитных волн на двух телах. – Мн.: Наука и техника, 1968. – 584 с.

УДК 517.983+519.6

**НЕЯВНЫЙ МЕТОД ИТЕРАЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ 1 РОДА**

**Комарчук А.В.**

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Савчук В.Ф., к. ф.-м. н., доцент*

В гильбертовом пространстве  $H$  решается операторное уравнение 1 рода

$$Ax = y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряженным оператором  $A$ , для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна. Для решения задачи предлагается неявный итерационный метод

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1} = (E - \alpha A^2)x_n + 2\alpha Ay, x_0 = 0. \tag{2}$$

Обычно правая часть уравнения известна с некоторой точностью  $\delta$ , т.е. известно  $y_\delta$ , такое, что  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$  тогда метод (2) примет вид

$$(E + \alpha A^2)x_{n+1,\delta} = (E - \alpha A^2)x_{n,\delta} + 2\alpha Ay_\delta, x_{0,\delta} = 0. \tag{3}$$

Изучена сходимость метода (2) при точной правой части  $y$  уравнения (1). Справедлива Теорема 1 Итерационный метод (2) при условии  $\alpha > 0$  сходится в исходной норме гильбертова пространства.

Теорема 2 При условии  $\alpha > 0$  итерационный метод (3) сходится, если число итераций  $n$  выбирать из условия  $n^{1/2} \delta \rightarrow 0, n \rightarrow \infty, \delta \rightarrow 0$ .

Теорема 3 Если решение  $x$  уравнения (1) истокообразно представимо, то при условии  $\alpha > 0$  для метода (3) справедлива оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\| \leq s^{s/2} (2n\alpha e)^{-s/2} \|z\| + 4n^{1/2} \alpha^{1/2} \delta, n \geq 1. \tag{4}$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим правую часть оценки (4) в точке, в которой производная от нее равна нулю: в результате получим априорный момент останова

$$n_{opt} = 2^{-2/(s+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)} \alpha^{-1} e^{-s/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)} \|z\|^{2/(s+1)}. \tag{5}$$

Подставив  $n_{opt}$  в оценку (4), имеем

$$\|x - x_{n,\delta}\|_{opt} \leq (1+s) \cdot 2^{s/(s+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{-s/(2(s+1))} e^{-s/(2(s+1))} \delta^{s/(s+1)} \|z\|^{1/(s+1)}. \quad (6)$$

**Замечание 1** Оценка погрешности (6) имеет порядок  $O(\delta^{s/(s+1)})$ , и он является оптимальным в классе задач с истокорпредставимыми решениями  $x = A^s z, s > 0$ .

**Замечание 2** Оптимальная оценка (6) не зависит от  $\alpha$ , но от параметра  $\alpha$  зависит  $n_{opt}$ , поэтому для уменьшения объема вычислительной работы следует брать  $\alpha$ , удовлетворяющим условию  $\alpha > 0$ , и так, чтобы  $n_{opt} = 1$ . Для этого достаточно выбрать

$$\alpha_{opt} = 2^{-2/(s+1)} \left(\frac{s}{2}\right)^{(s+2)/(s+1)} \cdot e^{-s/(s+1)} \delta^{-2/(s+1)} \|z\|^{2/(s+1)}.$$

Сравнение метода (3) с широко известным явным методом итераций

$$x_{n+1,\delta} = x_{n,\delta} + \alpha(y_\delta - Ax_{n,\delta}), x_{0,\delta} = 0 \quad (7)$$

показывает, что порядки их оптимальных оценок одинаковы. Достоинство явных методов в том, что явные методы не требуют обращения оператора, а требуют только вычисления значений оператора на последовательных приближениях. В этом смысле явный метод (7) предпочтительнее неявного метода (3). Однако неявный метод (3) обладает следующим важным достоинством. В явном методе (7) на шаг  $\alpha$  накладывается

ограничение сверху – неравенство  $0 < \alpha \leq \frac{5}{4 \|A\|}$ , что может привести на практике к

необходимости большого числа вычислений. В неявном методе (3) ограничений сверху на  $\alpha > 0$  нет. Это позволяет считать  $\alpha > 0$  произвольно большим (независимо от  $\|A\|$ ). В связи с чем оптимальную оценку для метода (3) можно получить уже на первом шаге итераций.

Рассмотрим погрешность метода при счете с округлением. Пусть  $x_{n,\delta}$  – точное значение, получаемое по формуле (3), а  $z_n$  – значение с учетом вычислительной погрешности, т.е.

$$z_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} [(E - \alpha A^2)z_n + 2\alpha A y_\delta] + \alpha \gamma_n, z_0 = 0. \quad (8)$$

Здесь  $\gamma_n$  – погрешность вычислений. Обозначим  $\varepsilon_n = z_n - x_{n,\delta}$  и вычтем из (8) равенство (3). Имеем  $\varepsilon_{n+1} = (E + \alpha A^2)^{-1} (E - \alpha A^2) \varepsilon_n + \alpha \gamma_n, \varepsilon_0 = 0$ . Так как нулевые приближения равны нулю, то  $\gamma_0 = 0$ . По индукции нетрудно получить, что

$$\varepsilon_n = \sum_{i=0}^{n-1} (E + \alpha A^2)^{-(n-1-i)} (E - \alpha A^2)^{n-1-i} \alpha \gamma_i.$$

В силу  $\alpha > 0$  и тому, что  $0 \in SpA$  справедливо  $\|(E + \alpha A^2)^{-1} (E - \alpha A^2)\| \leq 1$ , поэтому  $\|\varepsilon_n\| \leq n\alpha\gamma, \gamma = \sup |\gamma_i|$ .

Таким образом, с учетом вычислительной погрешности оценка погрешности метода (3) запишется в виде

$$\|x - z_n\| \leq \|x - x_{n,\delta}\| + \|x_{n,\delta} - z_n\| \leq s^{s/2} (2n\alpha e)^{-s/2} \|z\| + 4n^{1/2} \alpha^{1/2} \delta + n\alpha\gamma, n \geq 1.$$

УДК 517.44

## ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ АЛГОРИТМА ПОСТРОЕНИЯ КВАДРАТУРНОЙ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ВЕЙВЛЕТ-КОЭФФИЦИЕНТОВ

**Крищик Н.А.**

УО «Гродненский государственный университет им. Янки Купалы», г. Гродно  
 Научный руководитель – Вувуникян Ю.М., профессор

При исследовании кратно-масштабных представлений функций  $f(x)$  необходимо производить вычисление аппроксимирующих и детализирующих коэффициентов. В случае, когда масштабирующая функция и вейвлет не имеют аналитического задания, вычисление этих коэффициентов производится с помощью численных методов.

Настоящая работа посвящена построению квадратурных формул для вычисления скалярного произведения произвольной функции и масштабирующей функции Добеши, используя исследования [1].

Идея формулы квадратуры состоит в том, чтобы найти веса  $\omega_k$  и абсциссы  $x_k$  таким образом, чтобы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\varphi(x)dx \approx Q[f(x)] = \sum_{k=1}^r \omega_k f(x_k), \quad (1)$$

где  $f(x)$  – заданная функция, а  $\varphi$  – масштабирующая функция Добеши порядка  $L \in \mathbb{Z}$ .

Как известно, функция  $\varphi$  обладает свойствами [2]:

$$\varphi = \sqrt{2} \sum_{k=0}^{2L-1} h_k \varphi(2x - k), \quad x \in \mathbb{R}, \quad (2)$$

$$\text{supp } \varphi = [0, 2L - 1]. \quad (3)$$

В работе [3] для построения данной квадратурной формулы был разработан алгоритм. На основании данной работы, для поиска весов  $\omega_k$  и абсцисс  $x_k$  была написана программа на языке С# “Алгоритм” (рис.1).

Перед началом использования программы необходимо ввести начальные данные. Здесь  $r$  – порядок точности квадратурной формулы,  $L$  – порядок масштабирующей функции Добеши  $\varphi(x) \in [0, 2L - 1]$ .

В таблицу вручную вводим значение коэффициентов низкочастотного фильтра  $h_k$ ,  $k = \overline{0, 2L - 1}$ . Автоматически заполняется таблица при  $L = 2, 3, 4$ .

По умолчанию программа рассматривает масштабирующую функцию Добеши второго порядка точности  $L = 2$ . Количество весов и абсцисс - 3. Коэффициенты, используемые по умолчанию, определяют простейший вейвлет Db2 из известного семейства ортонормальных вейвлетов Добеши с конечным носителем.

Для масштабирующей функции Добеши второго порядка имеем

$$\begin{aligned} h_0 &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 + \sqrt{3}), h_1 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(3 + \sqrt{3}), \\ h_2 &= \frac{1}{4\sqrt{2}}(3 - \sqrt{3}), h_3 = \frac{1}{4\sqrt{2}}(1 - \sqrt{3}). \end{aligned} \quad (4)$$

Для изменения введённых данных необходимо нажать кнопку “Принять”.

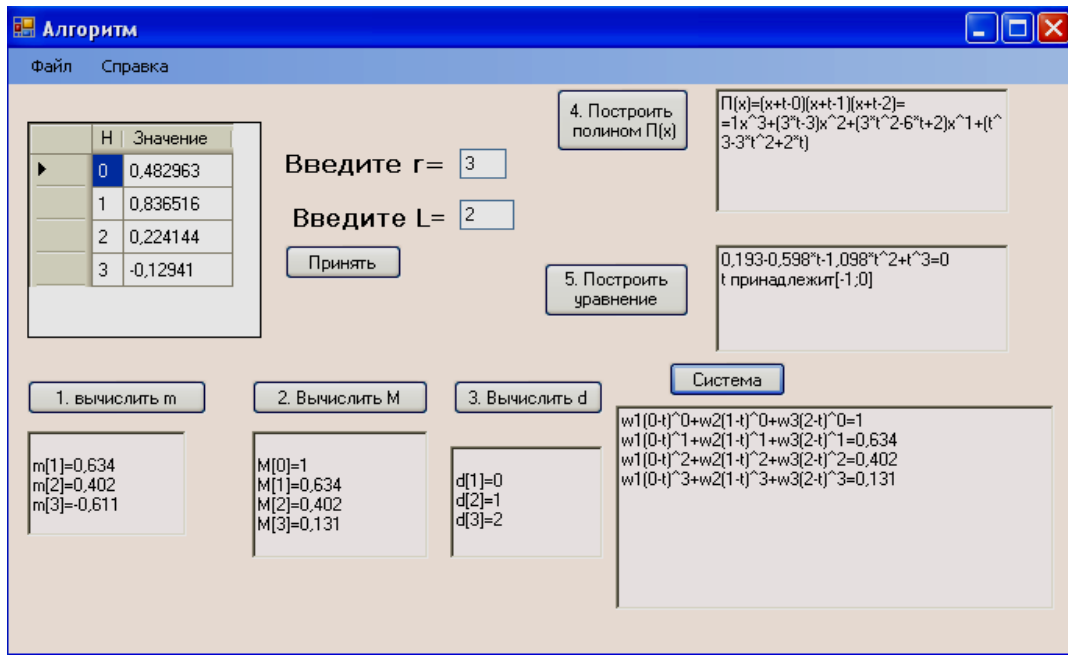


Рисунок 1 – Форма программы

Данная программа помогает вычислить дискретные моменты последовательности  $(h_k)$ , моменты функции масштабирования  $M_k$ , значения  $d_k$ , построить полином  $\Pi(x)$ , составить уравнение  $\sum_{i=0}^r p_i(\tau)M_i = 0$  и систему  $\sum_{k=1}^r \omega_k [d_k - \tau]^i = M_i, 0 \leq i \leq r$ .

При нажатии кнопки “1. Вычислить m” программа вызывает процедуру `function.zapolnenie_m(m, r, kol_H)`, которая производит вычисление

$$m_i = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_k h_k k^i. \quad (5)$$

Обработчик событий кнопки “2. Вычислить M” вызывает процедуру `function.zapolnenie_MM(MM, r, kol_H)`, которая производит вычисление

$$M_k = \frac{1}{(2^k - 1)} \sum_{i=1}^k C_k^i m_i M_{k-i}. \quad (6)$$

Кнопка “3. Вычислить d” вызывает процедуру, которая отвечает за вычисление

$$d_k = (k - 1)2^s. \quad (7)$$

Обработчик событий кнопки “4. Построить полином  $\Pi(x)$ ” строит данный полином и преобразует его следующим образом

$$\Pi(x) = \prod_{k=1}^r (x - x_k) = \prod_{k=1}^r (x + \tau - d_k) = \sum_{i=0}^r p_i(\tau)x^i. \quad (8)$$

При нажатии кнопки “5. Построить уравнение” программа вызывает процедуру `polin_x.sostav_yravn_t(MM, x_t, r, mnogochlen_t)`; которая преобразовывает уравнение

$$\sum_{i=0}^r p_i(\tau)M_i = 0. \quad (9)$$

Кнопка “Система” вызывает процедуру, которая строит систему вида

$$\sum_{k=1}^r \omega_k [d_k - \tau]^i = M_i, 0 \leq i \leq r. \quad (10)$$

В итоге программа выводит уравнение (9) и систему уравнений (10), решая которые, можно найти веса  $\omega_k$  и абсциссы  $x_k$ ,

$$\text{где } x_k = d_k - \tau. \tag{11}$$

**Список цитированных источников**

1. Deytseva, A. On quadrature formulas for calculation of approximation wavelet coefficients / A. Deytseva, N. Semenchuk // Computer Algebra Systems in Teaching and Research. Mathematical modeling in physics, civil engineering, economics and finance / Wydawnictwo Collegium Mazovia, ed.: L. Gadowski [et al.]. – Siedlce, 2011. – P. 36 – 41.
2. Добеши, И. Десять лекций по вейвлетам / И. Добеши. – Ижевск: НИЦ “Регулярная и хаотическая динамика”, 2001. – 464 с.
3. Sweldens, W. Quadrature formulae and asymptotic error expansions for wavelet approximations of smooth functions / W. Sweldens, R. Piessens // SIAM J. Numer. Anal. – 1994. – Vol. 31(4). – P. 1240.

УДК 519.24

**РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДУФФИНГА С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ОПЕРАТОРОМ**

**Курак А.Н.**

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Мадорский В.М., к. ф.- м. н., доцент*

Рассмотрим аналог задачи Дуффинга следующего вида, с недифференцируемым оператором:

$$X'' + \alpha X' + \beta|X| + \gamma X^3 = F(\sin(t), \cos(t))$$

$$x(0) = A, \quad x(2\pi) = B$$

Введем на отрезке [a, b] сетку  $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$ . Для каждого узла сетки составим разностное уравнение, причем в крайних узлах  $x_0 = a, x_N = b$  используем краевые условия. В узлах, достаточно удаленных от начала и конца отрезка [a, b], аппроксимации производных строятся по 3-м точкам. Заменяем задачу её сеточным аналогом:

$$\frac{Y_{k+1} - 2Y_k + Y_{k-1}}{h^2} + \alpha \frac{Y_{k+1} - Y_{k-1}}{2h} + \beta|Y_k| + \gamma Y_k^3 = F(\sin t_k, \cos t_k),$$

где  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

В результате получим нелинейную систему  $F(x)$ , состоящую из  $N+1$  нелинейных уравнений с не дифференцируемым оператором:

$$F(Y_0, Y_1, \dots, Y_{n+1}) = \begin{cases} Y_0 = 0, \\ \frac{Y_2 - 2Y_1 + Y_0}{h^2} + \alpha \frac{Y_2 - Y_0}{2h} + \beta|Y_1| + \gamma Y_1^3 - F(\sin t_1, \cos t_1) = 0, \\ \dots, \\ \frac{Y_{k+1} - 2Y_k + Y_{k-1}}{h^2} + \alpha \frac{Y_{k+1} - Y_{k-1}}{2h} + \beta|Y_k| + \gamma Y_k^3 - F(\sin t_k, \cos t_k) = 0, \\ \dots, \\ Y_{n+1} = 0, \end{cases}$$

где  $k = 0, 1, \dots, n - 1$ .

Полученную систему решим с помощью нелокального варианта метода Канторовича-Красносельского. Представим  $F(x)$  в следующем виде:  $F(x) = f(x) + g(x)$ , где  $f(x)$  дифференцируемая часть, а  $g(x)$  недифференцируемая.

Рассмотрим алгоритм решения:

**Шаг 1.** Решается линейная система для определения поправки  $\Delta x_n$

$$f'(x_n)(x_{n+1} - x_n) = -\beta_n (f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)), \quad n = 0, 1, \dots$$

**Шаг 2.** Находится очередное приближение:

$$x_{n+1} = x_n + \Delta x_n.$$

**Шаг 3.** Проверяется выполнение условия  $\|f(x_{n+1}) + g(x_{n+1})\| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon$ -малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

**Шаг 4.** Производится пересчет шаговой длины по формуле: если  $\|f(x_{n+1})\| < \|f(x_n)\|$ , то  $\beta_{n+1} := 1$ , иначе

$$\beta_{n+1} = \min \left( 1, \frac{\gamma_n \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|}{\|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\| \beta_n} \right),$$

$$\beta_0, \beta_{-1} \in [10^{-6}, 10^{-1}], \quad \beta_{-1} < \beta_0;$$

$$\gamma_{n+1} = \frac{\beta_{n+1} \gamma_n \|f(x_n) + \beta_{n-1}g(x_n)\|}{\beta_n \|f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1})\|}, \quad \gamma_0 = \beta_0^2;$$

и переход на шаг 1.

**Теорема:** Пусть в интересующей нас области  $D$  существует решение уравнения (1). Операторы  $f$  и  $g$  удовлетворяют условиям:

$$f \in C_D^1, \quad \|[f^1(x)]^{-1}\| \leq B, \quad \|\beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1}g(x_n)\| \leq L \|\Delta x_n\|.$$

Начальные приближения  $x_0$  и шаговые длины  $\beta_{-1}$  и  $\beta_0$  таковы, что

$\varepsilon_0 = \beta_0 B L (1 + B) \|f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0)\| < 1$ . Тогда алгоритм шаг1-шаг4 со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к решению уравнения.

Численный эксперимент и его обсуждение.

Система численных уравнений решалась с точностью до  $1E-10$ , начальное приближение имеет вид  $\text{Sin}(x) + \text{Cos}(x)$ . Результаты эксперимента сведены в таблицу 1.

Таблица 1

$\beta, \gamma$	Вид правой части		
1,1	50Sin(x)	50Cos(x)	30Sin(x)+50Cos(x)
2,5	10Sin(x)	50Cos(x)	10Sin(x)+60Cos(x)
3,15	5Sin(x)	60Cos(x)	10Sin(x)+50Cos(x)

Число итераций при этих начальных условиях было в пределах 400.

Задача решалась при начальных приближениях вида  $2\text{Sin}(x) + 2\text{Cos}(x)$ . Результаты эксперимента сведены в таблицу 2.

Таблица 2

$\beta, \gamma$	Вид правой части		
1,1	50Sin(x)	50Cos(x)	30Sin(x)+50Cos(x)
2,5	5Sin(x)	50Cos(x)	5Sin(x)+50Cos(x)
3,15	5Sin(x)	60Cos(x)	5Sin(x)+60Cos(x)

Число итераций при новых начальных условиях было в пределах 500.  
Общий вид окна программы имеет вид:

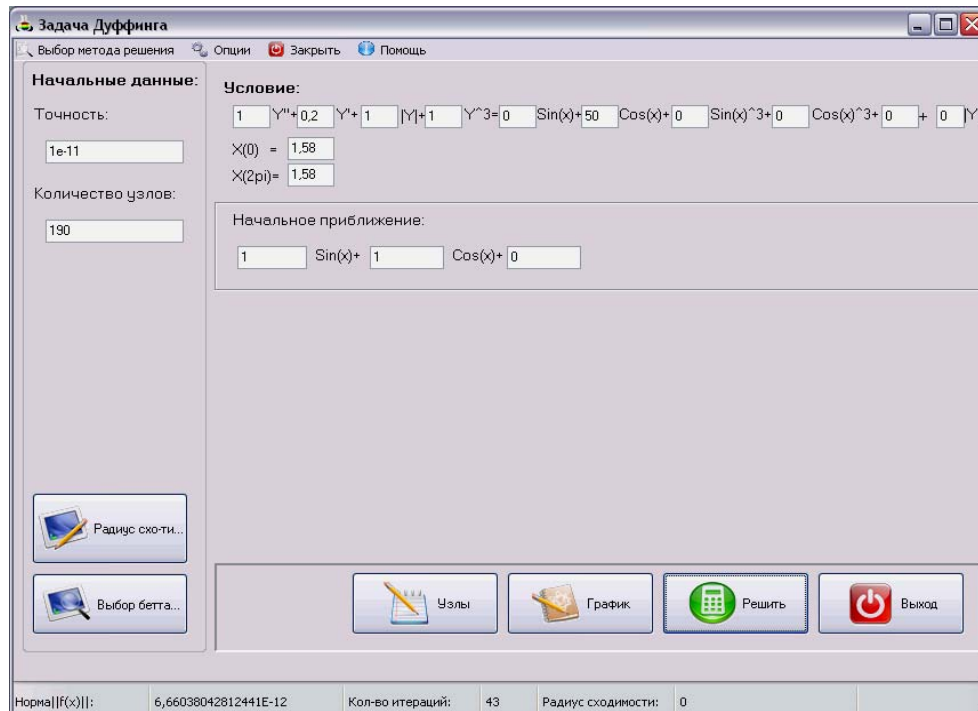


График решения имеет вид:



**Выводы:** Предлагаемый метод эффективно “работает” в достаточно широком диапазоне начальных данных и с высокой точностью решает нелинейную систему сеточных уравнений с недифференцируемым оператором.

**Список цитированных источников**

1. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.
2. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.

УДК 551.492

## О СХОДИМОСТИ РЕШЕНИЯ ОДНОЙ СИСТЕМЫ СТОХАСТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

**Латий О.О., Гладкий И.И.**

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
Научный руководитель – Махнист Л.П., к.т.н., доцент

В работе рассматривается модель процесса многолетних колебаний речного стока, представленная в виде системы дифференциальных уравнений [1]:

$$\frac{d^2\theta_1}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_1}{d\xi} = -1, \quad \frac{d^2\theta_2}{d\xi^2} - \xi \frac{d\theta_2}{d\xi} = -2\theta_1 \quad (1)$$

с начальными условиями  $\frac{d\theta_i}{d\xi}(\infty) = 0$ ,  $\theta_i(\xi_*) = 0$ ,  $i = 1, 2$ .

Эта модель, широко используемая в стохастической гидрологии, получена на основе уравнения Фоккера-Планка, при некоторых условиях на переходную функцию плотности вероятности [1]. Для решения системы (1) использовались численные методы, например, в [1], [2]. В данной работе рассматривается решение системы (1), записанное в виде степенных рядов [3], [4]:

$\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$ ,  $\theta_2(\xi) = 2(S_2(\xi) - S_2(\xi_*) - S_1(\xi_*)\theta_1(\xi))$ , где

$$S_1(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k-1)!!k}, \quad (2)$$

$$S_2(\xi) = \sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{\pi}{2}\right)^{\left\{\frac{k}{2}\right\}} \left[ \ln\left(2 - 2\left\{\frac{k-1}{2}\right\}\right) - \frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\left[\frac{k-1}{2}\right]} \frac{1}{m - \left\{\frac{k}{2}\right\}} \right] \frac{(-1)^{k-1} \xi^k}{(k-1)!!k}, \quad (3)$$

а  $[t]$  и  $\{t\}$  – целая и дробная часть числа  $t$  соответственно.

Степенной ряд (2) получен в [3]. Предлагаемая в [3] методика решения уравнений вида (1) обобщена на более широкий класс уравнений такого типа, для чего исследовались функции специального вида, связанные соотношениями с интегралами Эйлера первого и второго рода и неполной гамма-функцией [4].

Рассмотрим ряды  $S_1(\xi)$ ,  $S_2(\xi)$ .

Ряд  $S_1(\xi)$  можно записать в виде  $S_1(\xi) = A_1(\xi) - B_1(\xi) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{\frac{\pi}{2}} \xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$ , где общие члены этих рядов  $a_n^{(1)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$  и

$b_n^{(1)} = \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$  удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$a_{n+1}^{(1)} = \frac{(2n+1)\xi^2}{(2n+2)(2n+3)} a_n^{(1)}, \quad a_0^{(1)} = \xi \sqrt{\frac{\pi}{2}} \quad \text{и} \quad b_{n+1}^{(1)} = \frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)} b_n^{(1)}, \quad b_0^{(1)} = \frac{\xi^2}{2}.$$



Для ряда  $S_2(\xi) = A_2(\xi) - B_2(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left( \ln 2 - \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m-1} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)} +$   
 $+\sum_{n=1}^{+\infty} \left( \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m} \right) \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$  общие члены рядов  $a_n^{(2)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left( \ln 2 - \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m-1} \right) \frac{\xi^{2n+1}}{(2n)!!(2n+1)}$

и  $b_n^{(2)} = \left( \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m} \right) \frac{\xi^{2n+2}}{(2n+1)!!(2n+2)}$  удовлетворяют соотношениям  $a_n^{(2)} = c_n a_n^{(1)}$ ,

$$a_{n+1}^{(2)} = \frac{c_{n+1}(2n+1)\xi^2}{c_n(2n+2)(2n+3)} a_n^{(2)}, \quad c_{n+1} = c_n - \frac{1}{2n+1}, \quad a_0^{(2)} = c_0 \xi \sqrt{\frac{\pi}{2}}, \quad c_0 = \ln 2 \quad \text{и}$$

$$b_n^{(2)} = d_n b_n^{(1)}, \quad b_{n+1}^{(2)} = \frac{d_{n+1}(2n+2)\xi^2}{d_n(2n+3)(2n+4)} b_n^{(2)}, \quad d_{n+1} = d_n + \frac{1}{2n+2}, \quad b_1^{(2)} = d_1 \frac{\xi^4}{12}, \quad d_1 = \frac{1}{2}.$$

Эти соотношения можно использовать для вычисления значений частичных сумм рядов  $A_i(\xi), B_i(\xi) \quad i = \overline{1,2}$ .

Исследуем на сходимость ряды  $A_1(\xi), B_1(\xi)$ . Используя признак Д'Аламбера, имеем

$$\left| \frac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} \right| = \frac{\xi^2(2n+1)}{(2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1, \quad \text{если} \quad n > \frac{\xi^2}{2q} - 1,5 \quad \text{и}$$

$$\frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} = \frac{(2n+2)\xi^2}{(2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1, \quad \text{если} \quad n > \frac{\xi^2}{2q} - 2,$$

Следовательно, для любого числа  $q, 0 < q < 1$ , существует натуральное число, например,

$$n_0 = \left\lceil \frac{\xi^2}{2q} \right\rceil, \quad \text{такое, что для любого } n \geq n_0 \text{ выполняются неравенства } \left| \frac{a_{n+1}^{(1)}}{a_n^{(1)}} \right| < q, \quad \frac{b_{n+1}^{(1)}}{b_n^{(1)}} < q.$$

Тогда остатки рядов  $A_1(\xi), B_1(\xi)$  удовлетворяют неравенствам:  $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k^{(1)} \right| < \frac{|a_n^{(1)}|}{1-q}$ ,

$\sum_{k=n}^{+\infty} b_k^{(1)} < \frac{b_n^{(1)}}{1-q}$  и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $q$ .

Таким образом, значения рядов  $A_1(\xi), B_1(\xi)$ , с заданной точностью  $\varepsilon > 0$ , можно получить, вычисляя  $n$ -ые частичные суммы этих рядов  $A_n^{(1)}(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)}$ ,

$$B_n^{(1)}(\xi) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)}, \quad \text{если выполняются неравенства:}$$

$$\left| a_n^{(1)} \right| < \varepsilon(1-q), \quad b_n^{(1)} < \varepsilon(1-q), \quad \text{и} \quad n \geq n_0 = \left\lceil \frac{\xi^2}{2q} \right\rceil. \quad (4)$$

Так, например, для  $q = 0,5$  неравенства принимают вид:  $\left| a_n^{(1)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}, \quad b_n^{(1)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , и  $n \geq n_0 = \left\lceil \xi^2 \right\rceil$ .

Таким образом, точность  $2\varepsilon$  вычисления значений  $S_1(\xi)$  обеспечивается вычислением  $n$ -ых частичных сумм рядов  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(1)}(\xi), \sum_{k=0}^{n-1} b_k^{(1)}(\xi)$  при выполнении условий (4), что гарантирует точность  $4\varepsilon$  вычисления значения  $\theta_1(\xi) = S_1(\xi) - S_1(\xi_*)$ .

Исследуем на сходимость ряды  $A_2(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$ .

Заметим, что  $\left| \frac{c_{n+1}(2n+1)}{c_n(2n+2)} \right| = \frac{\left( |c_n| + \frac{1}{2n+1} \right) (2n+1)}{|c_n|(2n+2)} = 1 + \frac{1 - |c_n|}{|c_n|(2n+2)} < 1$  при

$|c_n| = \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m-1} - \ln 2 > 1$ , что выполняется, если  $n \geq 5$  и

$\frac{d_{n+1}(2n+2)}{d_n(2n+3)} = \frac{\left( d_n + \frac{1}{2n+2} \right) (2n+2)}{d_n(2n+3)} = 1 + \frac{1 - d_n}{d_n(2n+3)} < 1$  при  $d_n = \sum_{m=1}^n \frac{1}{2m} > 1$ , что

выполняется, если  $n \geq 4$ .

Используя признак Д'Аламбера, имеем

$\left| \frac{a_{n+1}^{(2)}}{a_n^{(2)}} \right| = \left| \frac{c_{n+1} a_{n+1}^{(1)}}{c_n a_n^{(1)}} \right| = \frac{|c_{n+1}| \xi^2 (2n+1)}{|c_n| (2n+2)(2n+3)} < \frac{\xi^2}{2n+3} < q < 1$ , если  $n \geq \max \left( \frac{\xi^2}{2q} - 1, 5; 5 \right)$  и

$\frac{b_{n+1}^{(2)}}{b_n^{(2)}} = \frac{d_{n+1} b_{n+1}^{(1)}}{d_n b_n^{(1)}} = \frac{d_{n+1} (2n+2) \xi^2}{d_n (2n+3)(2n+4)} < \frac{\xi^2}{2n+4} < q < 1$ , если  $n > \max \left( \frac{\xi^2}{2q} - 2; 4 \right)$ .

Следовательно, существует такое число  $q$ ,  $0 < q < 1$ , что, начиная с некоторого номера, например,  $n_0 = \max \left( \left[ \frac{\xi^2}{2q} \right]; 5 \right)$ , выполняются неравенства  $\left| \frac{a_{n+1}^{(2)}}{a_n^{(2)}} \right| < q$ ,  $\frac{b_{n+1}^{(2)}}{b_n^{(2)}} < q$ .

Тогда остатки рядов  $A_2(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$  удовлетворяют неравенствам:  $\left| \sum_{k=n}^{+\infty} a_k^{(2)} \right| \leq \frac{|a_n^{(2)}|}{1-q}$ ,

$\sum_{k=n}^{+\infty} b_k^{(2)} \leq \frac{b_n^{(2)}}{1-q}$  и сходятся со скоростью, не меньшей, чем скорость бесконечно убывающей геометрической прогрессии со знаменателем  $q$ .

Таким образом, значения рядов  $A_2(\xi)$ ,  $B_2(\xi)$  с заданной точностью  $\varepsilon > 0$ , можно получить, вычисляя  $n$ -ые частичные суммы этих рядов  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}$ ,  $\sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}$ , если выполняются неравенства:

$$\left| a_n^{(2)} \right| \leq \varepsilon(1-q), \quad b_n^{(2)} \leq \varepsilon(1-q), \quad \text{и} \quad n \geq n_0 = \max \left( \left[ \frac{\xi^2}{2q} \right]; 5 \right). \quad (5)$$

Так, например, для  $q = 0,5$  неравенства принимают вид:  $\left| a_n^{(2)} \right| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ ,  $b_n^{(2)} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ , и  $n \geq n_0 = \max \left( \left[ \xi^2 \right]; 5 \right)$ .

Таким образом, точность  $2\varepsilon$  вычисления значений  $S_2(\xi)$ ,  $S_2(\xi^*)$  обеспечивается вычислением  $n$ -ых частичных сумм рядов  $\sum_{k=0}^{n-1} a_k^{(2)}(\xi)$ ,  $\sum_{k=1}^{n-1} b_k^{(2)}(\xi)$  при выполнении условий (5), что гарантирует точность  $4\varepsilon$  вычисления значения  $S_2(\xi) - S_2(\xi^*)$ .

#### Список цитированных источников

1. Найденов, В.И. Нелинейные модели колебаний речного стока / В.И. Найденов, В.И. Швейкина // Водные ресурсы. – М., 2002. – Том 29, № 1. – С. 62–67.
2. Волчек, А.А. Сравнительная оценка марковских и нелинейных моделей годового стока рек Беларуси / А.А. Волчек, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2006. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 56–60.

3. Волчек, А.А. О решении одной стохастической модели многолетних колебаний речного стока / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, С.И. Парфомук // Вестник БрГТУ. – Брест, 2008. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 83–87.

4. Волчек, А.А. О параметрах распределения вероятностей диффузионной модели стохастической гидрологии / А.А. Волчек, И.И. Гладкий, Л.П. Махнист, В.С. Рубанов // Вестник БрГТУ. – Брест, 2010. – № 5: Физика, математика, информатика. – С. 49–54.

УДК 620.22:51-07(075.8)

## КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ МНОГОСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ

*Лебедь С.Ф.*

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест*

Пусть рассматриваемые области не содержат изолированных граничных точек. Если функция  $\omega = f(z)$  конформно отображает область  $D$  на область  $G$ , и точка  $z_0$  – изолированная граничная точка области  $D$ , тогда можно доказать, что точка  $z_0$  должна быть устранимой особой точкой или полюсом первого порядка функции  $f(z)$ . Более того, если через  $D_*$  обозначить область, полученную присоединением к области  $D$  всех ее изолированных граничных точек, то функция  $\omega = f(z)$  будет однолистной в  $D_*$ .

Имеет место следующая теорема.

**Теорема 1.** Пусть область  $D$  –  $n$ -связная область плоскости  $z$  и функция  $\omega = f(z)$  является однолистной мероморфной функцией в  $D$ , которая отображает  $D$  в область  $G$  плоскости  $\omega$ . Тогда  $G$  так же является  $n$ -связной областью.

Сформулированная теорема показывает, что  $N$ -связная область при конформном отображении должна сохранять порядок связности. Но если две многосвязные области имеют одно и то же число связности, означает ли это, что между ними можно построить конформное отображение? В общем случае это неверно. В дальнейшем ограничимся рассмотрением двухсвязных областей. Можно доказать, что существует конформное отображение между любой двухсвязной областью и кольцом.

**Теорема 2.** Любую двухсвязную область можно конформно отобразить на кольцо.

Теперь рассмотрим вопрос о существовании конформного отображения между двухсвязными областями. С учетом Теоремы 2 достаточно рассмотреть возможность конформного отображения одного концентрического кольца на другое. Напомним, что конформное отображение между двумя односвязными областями существует не всегда. Аналогично, не всегда можно установить конформное отображение между произвольными двухсвязными областями.

**Теорема 3** Аналитическая однолистная функция, отображающая кольцо  $r_1 < |z| < r_2$  на кольцо  $\rho_1 < |\omega| < \rho_2$  существует тогда и только тогда, когда выполняется условие

$$\frac{r_2}{r_1} = \frac{\rho_2}{\rho_1}. \quad (1)$$

*Доказательство.* Не ограничивая общности, можно считать, что  $0 < r_1 < r_2 < \infty$ ,  $0 < \rho_1 < \rho_2 < \infty$ . В противном случае, как установлено выше, можно свести задачу к за-

даче существования конформного отображения между двумя односвязными областями присоединением изолированной граничной точки области к самой области.

Достаточность части теоремы очевидна, так как, если (1) выполняется, то функция

$$\omega = f(z) = \frac{\rho_1}{r_1} z \text{ или } \omega = f(z) = \frac{r_1 \rho_2}{z}$$

конформно отображает кольцо  $r_1 < |z| < r_2$  на кольцо  $\rho_1 < |\omega| < \rho_2$ .

Используем принцип симметрии для доказательства необходимости. Можно продолжить аналитически функцию  $\omega = f(z)$  на кольца:

$$\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < r_1 \text{ и } r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1},$$

которые симметричны кольцу  $r_1 < |z| < r_2$  относительно окружностей  $|z| = r_1$  и  $|z| = r_2$ , и более того теорема о соответствии границ так же выполняется для двухсвязных областей. Последнее может быть показано с использованием кривой Жордана для разделения двусвязной области на две односвязные области. Следовательно,  $\omega = f(z)$  отображает кольцо  $r_1 \leq |z| \leq r_2$  биективно и взаимно непрерывно на кольцо  $\rho_1 \leq |\omega| \leq \rho_2$  и отображает окружности  $|z| = r_1$  и  $|z| = r_2$  на окружности  $|\omega| = \rho_1$  и  $|\omega| = \rho_2$  соответственно или на окружности  $|\omega| = \rho_2$  и  $|\omega| = \rho_1$  соответственно. Полученная в результате такого аналитического продолжения функция

$$F(z) = \begin{cases} \frac{\rho_1^2}{f(r_1^2/\bar{z})}, & r_1^2 < |z| < r_1, \\ f(z), & r_1 \leq |z| \leq r_2, \\ \frac{\rho_2^2}{f(r_2^2/\bar{z})}, & r_2 < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}. \end{cases}$$

однолистка и аналитична внутри кольца  $\frac{r_1^2}{r_2} < |z| < \frac{r_2^2}{r_1}$  и отображает его на кольцо

$\frac{\rho_1^2}{\rho_2} < |\omega| < \frac{\rho_2^2}{\rho_1}$ . Аналогично строится функция  $F(z)$  во втором случае.

Еще раз применим принцип симметрии для аналитического продолжения  $\omega = f(z)$

на кольцо  $r_1 \left(\frac{r_1}{r_2}\right)^4 < |z| < r_2 \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^4$ , и продолженная функция  $\omega = F(z)$  конформно ото-

бражает это кольцо на кольцо  $\rho_1 \left(\frac{\rho_1}{\rho_2}\right)^4 < |\omega| < \rho_2 \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)^4$ .

В результате получим, что построенная с помощью симметрий функция конформно отображает область  $0 < |z| < \infty$  на область  $0 < |\omega| < \infty$ . Более того, в первом случае имеем

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = 0, \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = \infty, \tag{2}$$

а во втором:

$$\lim_{z \rightarrow 0} F(z) = \infty, \lim_{z \rightarrow \infty} F(z) = 0. \quad (3)$$

Таким образом, функция  $\omega = F(z)$  конформно отображает расширенную комплексную плоскость на себя и поэтому функция  $F(z)$  является дробно – линейной. С учетом формул (2) и (3) получим  $F(z) = az$  или  $F(z) = \frac{a}{z}$ , где  $a$  – комплексное число. В частности, на кольце  $r_1 < |z| < r_2$  имеем  $f(z) = az$  или  $f(z) = \frac{a}{z}$ , и, очевидно, что (1) выполняется в обоих случаях. Что и требовалось доказать.

**Список цитированных источников**

1. Гахов, Ф.Д. Краевые задачи. – 3-е изд. – М., 1977.
2. Голузин, Г.М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. – 2-е изд. – М., 1966.

УДК 517.9, 519.61

**ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ И ВИЗУАЛИЗАЦИЯ РЕШЕНИЙ ЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ШЕСТЬЮ ОСОБЫМИ ТОЧКАМИ**

**Логвинович В.И.**

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
 Научный руководитель – Чичурин А.В., д. ф.-м. н., доцент (Украина)

В работе исследуются линейное дифференциальное уравнение второго порядка с шестью особыми точками [1]

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \sum_{k=1}^6 \frac{1}{x - a_k} \frac{dy}{dx} - 2 \sum_{k=1}^6 \frac{y}{a_k (x - a_k)} + 2 E \left( 1 + \frac{1}{4} \sum_{k=1}^6 \frac{a_k}{x - a_k} \right), \quad (1)$$

где  $a_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ) – действительные числа.

Используя численные методы, для построения частных решений уравнения (1) строится интерполяционная функция. Затем для каждого из интервалов, заключенных между двумя последовательными неподвижными полюсами уравнения (1), расположенными в точках  $x = a_k$  ( $k = \overline{1,6}$ ), строятся соответствующие кривые. Например, для уравнения (1) с полюсами

$$a_1 = -2, a_2 = -1, a_3 = -1/2, a_4 = 1/2, a_5 = 1, a_6 = 2 \quad (2)$$

графики частных решений с начальными данными  $y(0) = 0, y'(0) = 1$  и  $y(3/2) = 0, y'(3/2) = 1$  имеют вид, изображенный на рисунках 1 и 2.

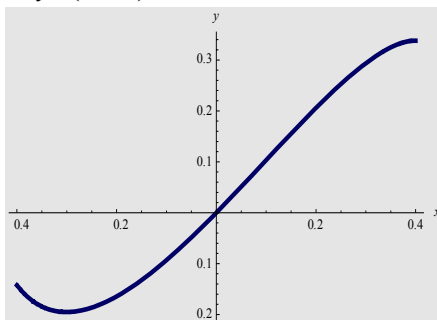


Рисунок 1 – Интегральная кривая уравнения (1), (2) и нач. усл.  $y(0) = 0, y'(0) = 1$

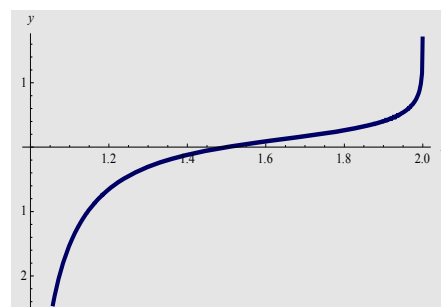


Рисунок 2 – Интегральная кривая уравнения (1), (2) и нач. усл.  $y(3/2) = 0, y'(3/2) = 1$

В качестве второго метода исследования уравнения (1) рассматривается процедура создания соответствующего объекта DifferentialRoot. Строится модуль с использованием функции Manipulate, позволяющий рассматривать полюсы как параметры визуализации.

#### Список цитированных источников

1. Чичурин, А.В. Решение системы Шази и интегрирование дифференциального уравнения Шази с шестью постоянными полюсами с помощью системы Mathematica // Веснік Брэсцкага ўніверсітэта Серыя 4, Фізіка, Матэматыка. – 2010, № 2. – С. 134-141.

УДК 517.983+519.6

## СХОДИМОСТЬ В ЭНЕРГЕТИЧЕСКОЙ НОРМЕ НЕЯВНОГО МЕТОДА ИТЕРАЦИЙ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

**Мороз Ю.А.**

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Савчук В.Ф., к. ф.- м. н., доцент*

### 1. Постановка задачи

В гильбертовом пространстве  $H$  решается уравнение I рода

$$Ax = y, \quad (1)$$

где  $A$  – неограниченный линейный и самосопряжённый оператор, для которого нуль не является собственным значением, но нуль принадлежит спектру оператора  $A$ , поэтому задача неустойчива, и, значит, некорректна. Пусть при точной правой части  $y$  уравнение (1) имеет единственное решение  $x$ . Для отыскания этого решения применяется итерационный метод

$$x_{n+1} = (A^2 + B)^{-1}(Bx_n + Ay), x_0 = 0. \quad (2)$$

Здесь  $B$  – ограниченный вспомогательный самосопряжённый оператор, который выбирается для улучшения обусловленности. В качестве  $B$  возьмём оператор  $B = bE$ ,  $b > 0$ ,  $E$  – тождественный оператор. В случае приближённой правой части  $y_\delta$ ,  $\|y - y_\delta\| \leq \delta$ , итерационный процесс (2) запишется в виде

$$x_{n+1,\delta} = (A^2 + B)^{-1}(Bx_{n,\delta} + Ay_\delta), x_{0,\delta} = 0. \quad (3)$$

### 2. Сходимость метода в энергетической норме

Изучим сходимость метода (3) в энергетической норме гильбертова пространства  $\|x\|_A = \sqrt{(Ax, x)}$ , где  $x \in H$ . При этом, как обычно, число итераций  $n$  нужно выбирать в зависимости от уровня погрешности  $\delta$ . Полагаем  $x_{0,\delta} = 0$  и рассмотрим разность  $x - x_{n,\delta} = (x - x_n) + (x_n - x_{n,\delta})$ . Используя интегральное представление неограниченного самосопряжённого оператора  $A$ , получим  $\|x - x_n\|_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda \left( \frac{b}{\lambda^2 + b} \right)^{2n} d(E_\lambda x, x)$ ,

$$\|x_n - x_{n,\delta}\|_A^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^{-1} \left[ 1 - \frac{b^n}{(\lambda^2 + b)^n} \right]^2 d(E_\lambda (y - y_\delta), y - y_\delta).$$

Оценив подынтегральные функции, нетрудно показать, что при условии  $b > 0$

$$\|x - x_n\|_A \leq \left(\frac{b}{4n}\right)^{\frac{1}{4}} \|x\|, \quad \|x_n - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{n}{2b}\right)^{\frac{1}{4}} \delta, \quad n \geq 1.$$

Таким образом, оценка погрешности для метода (3) в энергетической норме запишется в виде

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{b}{4n}\right)^{\frac{1}{4}} \|x\| + \left(\frac{n}{2b}\right)^{\frac{1}{4}} \delta, \quad n \geq 1.$$

Следовательно, если в процессе (3) выбирать число итераций  $n = n(\delta)$ , зависящим от  $\delta$  так, чтобы  $n^{\frac{1}{4}} \delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ , то получим метод, обеспечивающий сходимость к точному решению в энергетической норме.

**Теорема** При условии  $b > 0$  метод (3) сходится в энергетической норме гильбертова пространства, если число итераций  $n$  выбирать из условия  $n^{\frac{1}{4}} \delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Для метода (3) справедлива оценка погрешности

$$\|x - x_{n,\delta}\|_A \leq \left(\frac{b}{4n}\right)^{\frac{1}{4}} \|x\| + \left(\frac{n}{2b}\right)^{\frac{1}{4}} \delta, \quad n \geq 1.$$

Для минимизации оценки погрешности вычислим её правую часть в точке, в которой производная от неё равна нулю; в результате получим  $\|x - x_{n,\delta}\|_A^{onm} \leq 2^{\frac{5}{8}} \delta^{\frac{1}{2}} \|x\|^{\frac{1}{2}}$  и  $n_{onm} = 2^{-\frac{1}{2}} b \delta^{-2} \|x\|^2$ .

Отметим, что для сходимости метода (3) в энергетической норме достаточно выбирать число итераций  $n = n(\delta)$  так, чтобы  $n^{\frac{1}{4}} \delta \rightarrow 0$ ,  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$ . Однако  $n_{onm} = O(\delta^{-2})$ , т. е.  $n_{onm}$  относительно  $\delta$  имеет порядок  $\delta^{-2}$ , и такой порядок обеспечивает сходимость метода итераций (3).

Таким образом, использование энергетической нормы позволило получить априорную оценку погрешности для метода (3) и априорный момент останова  $n_{onm}$  без дополнительного требования истокообразной представимости точного решения, что делает метод (3) эффективным и тогда, когда нет сведений об истокопредставимости точного решения  $x$  уравнения (1).

Предложенный метод может быть успешно применён для решения следующих задач: обратной задачи теории гравиметрии, обратной задачи теории потенциала, задачи спектроскопии, задачи определения формы радиоимпульса, излучённого источником и т.д.

УДК 621.316

## **ВОЗМОЖНОСТИ СВОБОДНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ПРОГРАММЫ МАХИМА**

**Новикова Т.А., Мовчан В.О.**

*УО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк  
Научный руководитель – Алексеев Е.Р., к. т. н., доцент каф. ВМиП*

В современном образовании растёт спрос на математические методы исследования и на развитие творческого мышления, опирающегося на соответствующий математический

аппарат. Поэтому при освоении студентами информационных технологий играют универсальные математические пакеты, обладающие широким развивающим потенциалом.

Высокая стоимость современных проприетарных математических приложений (MathCAD, MATLAB, Maple, Mathematica) сдерживает их широкое внедрение в университетах. Однако в последние годы бурно развиваются современные свободные системы компьютерной математики, такие как Scilab, Maxima, Octave, которые распространяются по лицензии GNU GPL. Эти программы по своим возможностям уже сегодня составляют реальную конкуренцию проприетарным аналогам.

Данная работа посвящена использованию свободной системы компьютерной математики Maxima. Maxima предназначена в первую очередь для аналитических расчётов, но её можно использовать и для численных вычислений [1-3].

Интерфейс программы достаточно прост. Пользователь вводит команды в специальные ячейки, которые могут содержать одну или несколько команд. Команда завершается символом «\$» или «;». Если команда заканчивается «\$», то команда выполняется, но результат на экран не выводится. Все входные ячейки нумеруются %i1, %i2, %i3,...,%in. Для вычисления содержимого входной ячейки следует нажать Shift+Enter. Выходные ячейки нумеруются %o1, %o2, %o3,...,%on [1].

Правила ввода чисел в Maxima точно такие, как и для многих других подобных программ. Целая и дробная часть десятичных дробей разделяются символом «точка». Числитель и знаменатель обыкновенных дробей разделяется при помощи символа «/». Для вывода результата в виде десятичной дроби стоит применить функцию **numer**.

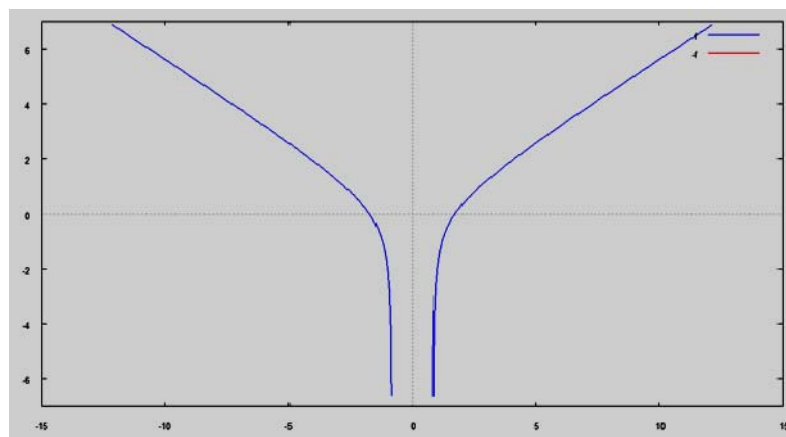
Maxima можно использовать для построения различных графиков, как непрерывных, так и разрывных. С помощью функции **plot2d** возможно построить график **f(x)** на отрезке [a, b].

```
(%i1) f(x):=(x^2-3)/((3*x^2-2)^(1/2));
```

```
(%o1) f(x):=
```

$$\frac{x^2 - 3}{(3x^2 - 2)^{1/2}}$$

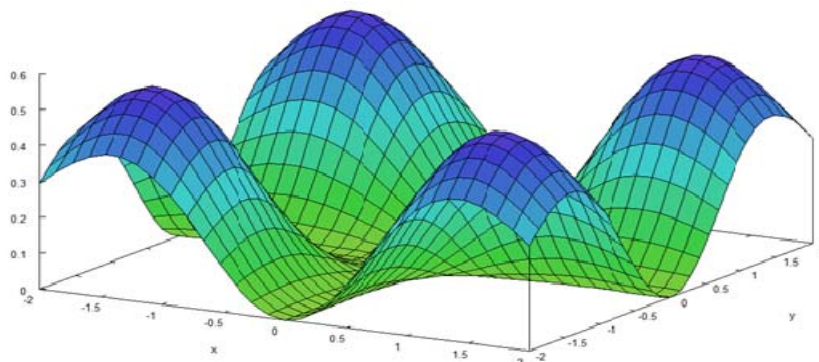
```
(%i2) plot2d([f,-f],[x,-15,15],[y,-7,7]);
```



Для построения трёхмерного графика используется функция **plot3d(f(x, y), [x, a, b], [y, c, d])**.

```
plot3d((x*y)^2*(%e^(-(x^2+y^2)/2)), [x,-2,2], [y,-2,2]);
```





Массив в Maxima – совокупность однотипных объектов с индексами. Число индексов не должно превышать пять. Матрица вводится функцией **matrix** ([...], [...], [...], ...). Над матрицами определены поэлементные операции: сложение (+), вычитание (-), умножение (\*), деление (/), возведение в степень (^). Кроме того, определены матричные операции: умножение (.), вычисление обратной матрицы (^-1) [1]. В Maxima вычисление определителя матрицы реализуется при помощи функции **determinant(a)**.

Для численного и аналитического решения системы линейных уравнений предназначена функция **linsolve**([eq1, eq2,...,eqn], [x1, x2, ... , xk]). Нелинейные уравнения и системы уравнений решаются в Maxima функцией **solve**([eq1, eq2, ..., eqn], [x1, x2, ... , xk]).

```
ex1:x+y+z-3*t=6; ex2:2*x-11*y+z+3*t=2; ex3:3*x-y+2*z-t=8; ex4:x-t=14;
z+y+x-3 t=6
z-11 y+2 x+3 t=2
2 z-y+3 x-t=8
x-t=14

linsolve([ex1,ex2,ex3,ex4],[x,y,z,t]);
[x= $\frac{184}{17}$ , y= $-\frac{6}{17}$ , z=-14, t= $-\frac{54}{17}$ ]
```

Предел функции можно найти с помощью функции **limit**(выражение, переменная, точка).

```
limit((1-sin(x))/(%pi/2-x), x, %pi/2);
0
```

Функция **diff(f,x,n)** возвращает производную n-го порядка функции f(x) по переменной x, а **diff(f)** – возвращает полный дифференциал. Функция интегрирования имеет два варианта вызова: **integrate**(выражение, переменная); **integrate**(выражение, переменная, нижний-предел, верхний-предел).

Найти общее решение обыкновенного дифференциального уравнения первого и второго порядка можно с помощью функции **ode2**(уравнение, зависимая переменная, независимая переменная) [2].

```
x2 'diff(y, x) + 3 y x =  $\frac{\sin(x)}{x}$ 
x2  $\left(\frac{d}{dx} y\right) + 3 x y = \frac{\sin x}{x}$ 
ode2(%, y, x)
y =  $\frac{\%c - \cos x}{x^3}$ 
```

Рассмотренные примеры не исчерпывают возможности пакета. Подробное описание Maxima на русском языке можно найти в [1, 2].

Грамотное использование Maxima в учебном процессе позволит снять психологический барьер при изучении курса высшей математики, делая его более интересным. Maxima не только позволяет решать учебные задачи из курса высшей математики, но и проводить сложные аналитические вычисления при решении реальных научно-технических задач. Уже сегодня систему Maxima можно рекомендовать использовать в университетах, а её бурное развитие, как свободного проекта, позволяет авторам предположить, что через несколько лет Maxima составит реальную конкуренцию таким мощным проприетарным программам, как Mathematica, Maple.

#### Список цитированных источников

1. Чичкарёв, Е.А. Компьютерная математика с Maxima. Руководство для школьников и студентов. – Режим доступа: <http://www.altlinux.org/Books:Maxima> – Дата доступа: 1.10.2011).
2. Губина, Т.Н. Решение дифференциальных уравнений в системе компьютерной математики Maxima: учебное пособие [Текст] / Т.Н. Губина, Е.В. Андропова. – Елец, ЕГУ им. И.А. Бунина, 2009. – 99 с.
3. <http://maxima.sourceforge.net/ru/Maxima>. URL: <http://andrevj.github.com/wxmaxima/help.html> – Дата доступа: 1.10.2011.

УДК 517.958

## ФУНКЦИЯ ГРИНА ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ БИГАРМОНИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ДЛЯ ШАРА В $\mathbf{R}^3$

**Осоприлко О.Н.**

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Басик А.И.*

Пусть  $\Omega \subset \mathbf{R}^d$  – ограниченная область с достаточно гладкой границей  $\partial\Omega$ . Рассмотрим задачу нахождения функции  $u \in C^4(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$  удовлетворяющей в области  $\Omega$  уравнению

$$\Delta^2 u = f(x), \quad (1)$$

и граничным условиям

$$u|_{\partial\Omega} = \varphi(x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|_{\partial\Omega} = \psi(x). \quad (2)$$

Здесь  $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_d^2}$  – оператор Лапласа в  $\mathbf{R}^d$ ,  $\Delta^2 u = \Delta(\Delta u)$ ,  $f: \Omega \mapsto \mathbf{R}$  – заданная в области  $\Omega$  функция,  $\varphi, \psi: \partial\Omega \mapsto \mathbf{R}$  – заданные на поверхности  $\partial\Omega$  функции,  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$  – единичное поле внешних нормалей на поверхности  $\partial\Omega$ ,  $\frac{\partial}{\partial \nu}$  – оператор дифференцирования по нормали к  $\partial\Omega$ .

Сформулированная задача (1), (2) называется задачей Дирихле для бигармонического уравнения и встречается в математической теории упругости. В случае функций двух переменных ( $d = 2$ ) эта задача решена в книге [1]. Используя представление бигармо-

нической функции двух переменных с помощью гармонических, авторами книги [1, с. 402] указывается явная формула решения задачи (1), (2) для круга на плоскости.

Отметим также, что приведенное в [1, с. 400] доказательство теоремы единственности решения задачи (1), (2) для функций класса  $C^4(\overline{\Omega})$ , дословно переносится на случай произвольной размерности пространства.

Следуя [2, с. 82], мы построим решение задачи Дирихле для шара в трехмерном пространстве ( $d = 3$ ) методом функций Грина.

Пусть функция  $u \in C^4(\overline{\Omega})$  является решением уравнения (1) и удовлетворяет граничным условиям (2), тогда в каждой точке  $y \in \Omega$  выполняется равенство (см. в работе [3] интегральное представление решений (1))

$$u(y) = \int_{\Omega} E(x; y) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( u(x) \frac{\partial \Delta E(x; y)}{\partial \nu} - \Delta E(x; y) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) dS(x) + \quad (3)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left( \Delta u(x) \frac{\partial E(x; y)}{\partial \nu} - E(x; y) \frac{\partial \Delta u(x)}{\partial \nu} \right) dS(x),$$

где  $E(x, y) = -\frac{1}{8\pi} r$  – фундаментальное решение оператора  $\Delta^2$  в  $\mathbf{R}^3$ ,

$$r = |x - y| = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + (x_3 - y_3)^2}.$$

Предположим, что существует функция  $g(x; y)$ , в каждой точке  $y \in \Omega$  обладающая свойствами

- (i)  $g(\cdot; y) \in C^4(\overline{\Omega})$ ;
- (ii)  $\Delta_x^2 g(x; y) = 0$  в области  $\Omega$ ;
- (iii)  $g|_{x \in \partial\Omega} = -E(x; y)$ ,  $\left. \frac{\partial g}{\partial \nu} \right|_{x \in \partial\Omega} = -\frac{\partial E(x; y)}{\partial \nu}$ .

Для функций  $u(x)$  и  $g(x; y)$  запишем аналог второй формулы Грина [3] для оператора  $\Delta^2$

$$0 = \int_{\Omega} g(x; y) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( u(x) \frac{\partial \Delta g(x; y)}{\partial \nu} - \Delta g(x; y) \frac{\partial u(x)}{\partial \nu} \right) dS(x) + \quad (4)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left( \Delta u(x) \frac{\partial g(x; y)}{\partial \nu} - g(x; y) \frac{\partial \Delta u(x)}{\partial \nu} \right) dS(x).$$

Складывая равенства (3) и (4) и пользуясь свойствами (ii)-(iii) функции  $g(x; y)$ , окончательно получим

$$u(y) = \int_{\Omega} (E(x; y) + g(x; y)) f(x) dx + \quad (5)$$

$$+ \int_{\partial\Omega} \left( \varphi(x) \frac{\partial \Delta (E(x; y) + g(x; y))}{\partial \nu} - \psi(x) \Delta (E(x; y) + g(x; y)) \right) dS(x).$$

**Определение 1.** Функция  $G(x; y) := E(x; y) + g(x; y)$  называется функцией Грина задачи Дирихле для бигармонического уравнения.

Из теоремы единственности решения задачи (1),(2) следует, что функция Грина определяется однозначно условиями (i)-(iii).

Таким образом, если существует решение  $u \in C^4(\bar{\Omega})$  задачи (1), (2) и для области  $\Omega$  существует функция Грина, то в каждой точке  $y \in \Omega$  выполняется равенство

$$u(y) = \int_{\Omega} G(x; y) f(x) dx + \int_{\partial\Omega} \left( \varphi(x) \frac{\partial \Delta G(x; y)}{\partial \nu} - \psi(x) \Delta G(x; y) \right) dS(x). \quad (6)$$

Формула (6) позволяет получить явную формулу решения задачи Дирихле, если удастся построить функцию Грина.

Построим функцию Грина для шара  $B(0; R)$  в  $\mathbf{R}^3$ . Зафиксируем произвольную точку  $y \in B(0; R)$ . Через  $z$  обозначим точку, лежащую на луче  $Oy$  и такую, что  $|y| \cdot |z| = R^2$  (точка  $z$  – инверсия точки  $y$  относительно сферы  $S(0; R)$ ). Пусть также

$$\rho = |y|, \quad \rho_1 = |z|, \quad r = |x - y|, \quad r_1 = |x - z|.$$

Нетрудно видеть, что при  $|x| = R$  треугольники  $\Delta Oxy$  и  $\Delta Oxz$  подобны, и, следовательно, выполняются соотношения

$$\frac{\rho}{R} = \frac{R}{\rho_1} = \frac{r}{r_1}.$$

Рассмотрим функцию

$$g(x; y) := -E\left(\frac{\rho}{R}x; \frac{\rho}{R}z\right) + C|x - z|^{-1} \left(1 - \frac{|y|^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right),$$

где  $C$  – некоторая постоянная.

Непосредственный подсчет показывает, что при каждом  $y \in B(0; R)$  функция  $g(x; y)$  является бигармонической и при  $|x| = R$  удовлетворяет равенству

$$g(x; y) = -E(x; y).$$

Далее, при  $|x| = R$  имеем

$$\frac{\partial g(x; y)}{\partial \nu} := -\frac{1}{8\pi} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{rR} - C \cdot \frac{2\rho}{R^3} \cdot \frac{R^2 - \rho^2}{rR}.$$

Положим  $C = \frac{R^3}{16\pi\rho}$ , тогда функция  $g(x; y)$  удовлетворяет условиям (i)-(iii).

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 1.** Функция Грина задачи Дирихле (1),(2) для бигармонического уравнения в шаре  $B(0; R)$  имеет вид

$$G(x; y) := -\frac{1}{8\pi} \cdot |x - y| + \frac{\rho}{8\pi\rho} \cdot |x - z| - \frac{R^3}{16\pi\rho} |x - z|^{-1} \left(1 - \frac{|y|^2}{R^2}\right) \left(1 - \frac{|x|^2}{R^2}\right),$$

где  $z$  инверсия точки  $y$  относительно сферы  $S(0; R)$ .

#### Список цитированных источников

1. Тихонов, А.Н. Уравнения математической физики / А.Н. Тихонов, А.А. Самарский. – М.: Наука, 1977. – 736 с.
2. Олейник, О.А. Лекции об уравнениях с частными производными / О.А. Олейник. – М.: БИНОМ, 2005. – 264 с.
3. Савчук, Л.А. О фундаментальном решении оператора  $\Delta^2$  в  $\mathbf{R}^3$  // Современные проблемы математического моделирования и новые образовательные технологии в математике: материалы Республиканской научно-практической конференции. – 22-23 апреля 2009. – С.144-146.

УДК 517.977

## КРИТЕРИИ ПОЛНОЙ УПРАВЛЯЕМОСТИ И КОНСТРУКТИВНОЙ ИДЕНТИФИЦИРУЕМОСТИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА СО МНОГИМИ ЗАПАЗДЫВАНИЯМИ

**Павловская А.Т.**

УО «Гродненский государственный университет им. Я.Купалы», Гродно  
Научный руководитель – Хартовский В.Е, к. ф.-м. н., доцент

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа с соизмеримыми запаздываниями  $\Sigma$  :

$$\dot{x}(t) - \sum_{i=1}^m D_i \dot{x}(t-ih) = \sum_{i=0}^m A_i x(t-ih) + \sum_{i=0}^m B_i u(t-ih), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$x(t) = \varphi(t), t \in [-mh, 0], u(t) \equiv 0, t < 0, \quad (2)$$

где  $x - n$  – вектор-столбец решения уравнения (1),  $u - r$  – вектор доступных измерению выходных величин,  $D_i, A_i, B_i$  – постоянные матрицы соответствующих размеров,  $0 < h$  – постоянное запаздывание, начальная функция  $\varphi \in \mathbf{D}([-mh, 0], \mathbf{R}^n)$ , где  $\mathbf{D}([-mh, 0], \mathbf{R}^n)$  – пространство абсолютно непрерывных функций.

**О п р е д е л е н и е 1.** Начальную функцию  $\varphi$  в (2) назовем полностью управляемой, если существуют момент времени  $t_1 > 0$  и управление,  $u(t), t \in [0, t_1 - mh]$ , обеспечивающее  $x(t) \equiv 0, t \geq t_1$ , при  $u(t) \equiv 0, t > t_1 - mh$ .

Если полностью управляемы все начальные функции  $\varphi \in \mathbf{D}([-mh, 0], \mathbf{R}^n)$ , то систему  $\Sigma$  назовем полностью управляемой.

Рассмотрим систему наблюдения  $\Sigma_1$  дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа:

$$\dot{z}(t) - \sum_{i=1}^m Q_i \dot{z}(t-ih) = \sum_{i=0}^m C_i z(t-ih), \quad t \geq 0, \quad (3)$$

$$z(t) = \eta(t), t \in [-mh, 0], \quad (4)$$

$$y(t) = \sum_{i=0}^m G_i z(t-ih), t \in T = [0, t_1], \quad (5)$$

где  $z - n$  – вектор-столбец решения уравнения (3),  $y - m$  – вектор доступных измерению выходных величин,  $Q_i = D'_i, C_i = A'_i, G_i = B'_i$  – постоянные матрицы соответствующих размеров,  $0 < h$  – постоянное запаздывание,  $t_1$  – фиксированный достаточно большой момент времени. Начальная функция  $\eta \in \mathbf{D}([-mh, 0], \mathbf{R}^n)$ .

**О п р е д е л е н и е 2.** Систему  $\Sigma_1$  назовем конструктивно идентифицируемой в направлении  $q \in \mathbf{D}(H^-, \mathbf{R}^n)$ , если найдутся момент времени  $t_1 > 0$  и кусочно-непрерывная  $g$  – вектор-функция  $v(t), t \in [mh, t_1]$ , для которой выполняется соотношение

$$\int_{mh}^{t_1} v'(t) y(t) dt = \left( q'(0) - \sum_{i=1}^m q'(-ih) Q_i \right) z(t_1) + \sum_{i=1}^m \int_{t_1}^{t_1+ih} q'(t_1 - t) (Q_i \dot{z}(t-ih) + C_i z(t-ih)) dt, \quad (6)$$

каково бы ни было решение системы  $\Sigma_1$ , порожденное начальной функцией  $\eta$ . Если конструктивная идентифицируемость системы  $\Sigma_1$  возможна в любом направлении  $q \in \mathbf{D}([-mh, 0], \mathbf{R}^n)$ , то систему  $\Sigma_1$  назовем полностью конструктивно идентифицируемой.

**Теорема 1.** Если система наблюдения  $\Sigma_1$  конструктивно идентифицируема в направлении  $p$ , то начальное состояние  $\varphi$  двойственной системы управления  $\Sigma$ , где  $\varphi(t) = q(t), t \in [-mh, 0]$ , полностью управляемо посредством  $u(t) = -v(t_1 - t), t \in [0, t_1 - mh]$ . Если начальное состояние  $\varphi$  системы  $\Sigma$  полностью управляемо функцией  $u(t), t \in [0, t_1 - mh]$ , то система  $\Sigma_1$  конструктивно идентифицируема в направлении  $p(t) = \eta(t)$ , причем разрешающая функция  $v(t) = -u(t_1 - t), t \in [mh, t_1]$ .

**Теорема 2.** Система  $\Sigma$  полностью конструктивно идентифицируема при достаточно большом тогда и только тогда, когда одновременно выполняются два условия:

$$1) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^m G_i e^{-\lambda i h} \\ \lambda E - C_0 - \sum_{i=1}^m (C_i + \lambda Q_i) e^{-\lambda i h} \end{bmatrix} = n \quad \forall \lambda \in \mathbf{C},$$

$$2) \quad \text{rank} \begin{bmatrix} F \\ FK \\ \dots \\ FK^{mn-1} \\ K^{mn} \end{bmatrix} = \text{rank} \begin{bmatrix} F \\ FK \\ \dots \\ FK^{mn-1} \end{bmatrix}.$$

где  $E$  – единичная матрица;  $\mathbf{C}$  – множество комплексных чисел,

$$\bar{G}_i = \begin{pmatrix} G_i \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}', \quad i = \overline{0, m}, \quad K = \begin{bmatrix} Q_1 & E & 0 & \dots & 0 \\ Q_2 & 0 & E & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Q_{m-1} & 0 & 0 & \dots & E \\ Q_m & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \sum_{i=0}^m \bar{G}_i K^{m-i}.$$

Обозначим  $\tilde{D} = [D_1, \dots, D_{m-1}]$ ,  $\bar{B}_i = \text{col}[B_i, 0, \dots, 0]$ ,  $i = \overline{0, m}$ ,  $R = \begin{bmatrix} \tilde{D} & D_m \\ E & 0 \end{bmatrix}$ ,  $L = \sum_{i=0}^m R^{m-i} \bar{B}_i$ .

Из теоремы 1 о двойственности задач полной управляемости и полной конструктивной идентифицируемости вытекает критерий полной управляемости системы  $\Sigma$ .

**Теорема 3.** Для полной управляемости  $\Sigma$  необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялись условия

$$1) \quad \text{rank} \left[ \lambda E - \sum_{i=0}^m C_i e^{-\lambda i h} + \lambda \sum_{i=1}^m D_i e^{-\lambda i h}, \sum_{i=0}^m B_i e^{-\lambda i h} \right] = n, \quad \forall \lambda \in \mathbf{C},$$

$$2) \quad \text{rank} [L, RL, \dots, R^{mn-1}L] = \text{rank} [L, RL, \dots, R^{mn-1}L, R^{mn}]$$

В случае  $m = 1$ ,  $B_0 = 0$  теорема 3 совпадает с критерием полной управляемости, полученным в [1].

**Список цитированных источников**

1. Метельский, А.В. Критерии конструктивной идентифицируемости полной управляемости линейных стационарных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, С.А. Минюк // Известия РАН. Теория и системы управления. – 2006. – № 5. – С. 15–23.

УДК 519.63

## ПРИМЕНЕНИЕ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ В МОДИФИЦИРОВАННЫХ ИНВАРИАНТАХ РИМАНА ДЛЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ГАЗОВОЙ ДИНАМИКИ

**Поляков Д.Б.**

*Институт математики НАНБ, г. Минск*

*Научный руководитель – Матус П.П., д. ф.-м. н., профессор*

### 1. Введение

Уравнения газовой динамики играют ключевую роль в математическом описании газовых процессов. Нелинейность этих уравнений в зависимости от гладкости входных данных может повлечь возникновение различных физических эффектов, таких как ударные волны или пограничные слои.

Целью этой работы является получение необходимых условий для существования глобального гладкого решения начально-краевых задач на примере одномерного изэнтропического течения газа. Для записи уравнений газовой динамики будут выбраны переменные Лагранжа. При этом будет использована методика из работы [1] и идея дифференцирования по временной переменной. Будут предложены разностные схемы, для которых эти же условия являются необходимыми для классической устойчивости. Полученные условия проиллюстрированы вычислительным экспериментом.

### 2. Постановка задачи

В области  $\bar{Q} = \bar{\Omega} \times [0, +\infty)$ ,  $\Omega = \{x : 0 < x < l\}$  рассмотрим следующую начально-краевую задачу для системы уравнений газовой динамики, записанную в переменных Лагранжа [2]:

$$\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial p(v)}{\partial t} = 0, (x, t) \in Q, \quad (1)$$

$$p(v) = K^2 v^{-\gamma}, \gamma = 1 + 2\varepsilon, \varepsilon = \text{const} > 0, K = \text{const} > 0, \quad (2)$$

$$v(x, 0) = v_0(x), u(x, 0) = u_0(x), 0 \leq x \leq l, \quad (2)$$

$$u(0, t) + c_1(v(0, t)^{-\varepsilon} - 1) = \mu_1(t), t \geq 0, \quad (3)$$

$$-u(l, t) + c_1(v(l, t)^{-\varepsilon} - 1) = \mu_2(t), t \geq 0.$$

Здесь  $v = v(x, t)$ ,  $u = u(x, t)$ ,  $p = p(x, t)$  обозначают соответственно удельный объем, скорость и давление соответственно,  $c_1 = \frac{K\sqrt{\gamma}}{\varepsilon}$ . Здесь и далее  $c_i$  обозначают произвольные положительные постоянные.

### 3. Запись системы в инвариантах Римана

Дифференциальная задача (1) – (3) в инвариантах Римана [2]

$$r = u + c_1(v^{-\varepsilon} - 1), s = -u + c_1(v^{-\varepsilon} - 1),$$

примет вид:

$$\frac{\partial r}{\partial t} + a(s+r) \frac{\partial r}{\partial x} = 0, \frac{\partial s}{\partial t} - a(s+r) \frac{\partial s}{\partial x} = 0, (x, t) \in Q, \quad (4)$$

$$r(x, 0) = r_0(x) = u_0(x) + c_1(v_0(x)^{-\varepsilon} - 1), 0 \leq x \leq l, \quad (5)$$

$$s(x, 0) = s_0(x) = -u_0(x) + c_1(v_0(x)^{-\varepsilon} - 1), 0 \leq x \leq l,$$

$$r(0, t) = \mu_1(t), s(l, t) = \mu_2(t), t \geq 0, \quad (6)$$

где  $a(s+r) = \frac{\varepsilon}{2(2c_1)^{\frac{1}{\varepsilon}}} (s+r+2c_1)^{1+\frac{1}{\varepsilon}}$ .

Таким образом, мы вместо системы (1) – (3) будем рассматривать эквивалентную ей (на гладких решениях) систему (4) – (6).

#### 4. Основная теорема

Сформулируем необходимые для формулировки теоремы условия на входные данные:

$$0 \leq r_0(x) \leq c_2, 0 \leq s_0(x) \leq c_2, 0 \leq x \leq l, \tag{7}$$

$$-c_3 \leq s'_0(x) \leq 0 \leq r'_0(x) \leq c_3, 0 \leq x \leq l, \tag{8}$$

$$0 \leq \mu_1(t) \leq c_2, 0 \leq \mu_2(t) \leq c_2, t \geq 0, \tag{9}$$

$$-c_3 a_{\max} \leq \mu'_1(t) \leq 0, -c_3 a_{\max} \leq \mu'_2(t) \leq 0, t \geq 0, \tag{10}$$

$$r_0(0) = \mu_1(0), s_0(l) = \mu_2(0), \tag{11}$$

$$\mu'_1(0) + a(r_0(0) + s_0(0))r'_0(0) = 0, \mu'_2(0) - a(r_0(l) + s_0(l))s'_0(l) = 0, \tag{12}$$

где  $a_{\max} = \frac{\varepsilon}{2(2c_1)^{\frac{1}{\varepsilon}}} (2c_2 + 2c_1)^{1+\frac{1}{\varepsilon}}$ .

В области  $\bar{Q}$  введем равномерную сетку

$$\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \bar{\omega}_\tau : \bar{\omega}_h = \left\{ x_i = ih, i = \overline{0, N}, h = \frac{l}{N} \right\}, \bar{\omega}_\tau = \{ t_n = n\tau, n \in N_0 \}.$$

На этой сетке аппроксимируем задачу (4) – (6) линеаризованной разностной схемой

$$r_{ht,i} + a_{h,i} \hat{r}_{hx,i} = 0, i = \overline{1, N}, \tag{13}$$

$$s_{ht,i} - a_{h,i} \hat{s}_{hx,i} = 0, i = \overline{0, N-1},$$

$$r_{h,i}^0 = r_{0i}, i = \overline{1, N}, s_{h,i}^0 = s_{0i}, i = \overline{0, N}, \tag{14}$$

$$\hat{r}_{h,0} = \mu_1^{n+1}, \hat{s}_{h,N} = \mu_2^{n+1}, n \in N_0. \tag{15}$$

Имеет место

**Теорема.** Пусть выполнены неравенства (7), (9) и (11). Тогда условия (8), (10) и (12) необходимы для существования глобального гладкого решения задачи (1) – (3). При выполнении условий (7)-(12) разностная схема (13)-(15) безусловно устойчива по начальным и граничным данным и имеет место оценка

$$\max \{ \| \delta r^n \|_{\bar{C}}, \| \delta s^n \|_{\bar{C}} \} \leq \max \{ \| \delta r^0 \|_{\bar{C}}, \| \delta s^0 \|_{\bar{C}}, \| \delta \mu_1 \|_{\bar{C}(T)}, \| \delta \mu_2 \|_{\bar{C}(T)} \} \tag{16}$$

#### 5. Вычислительный эксперимент

Рассмотрим задачу (1) со следующими входными данными:

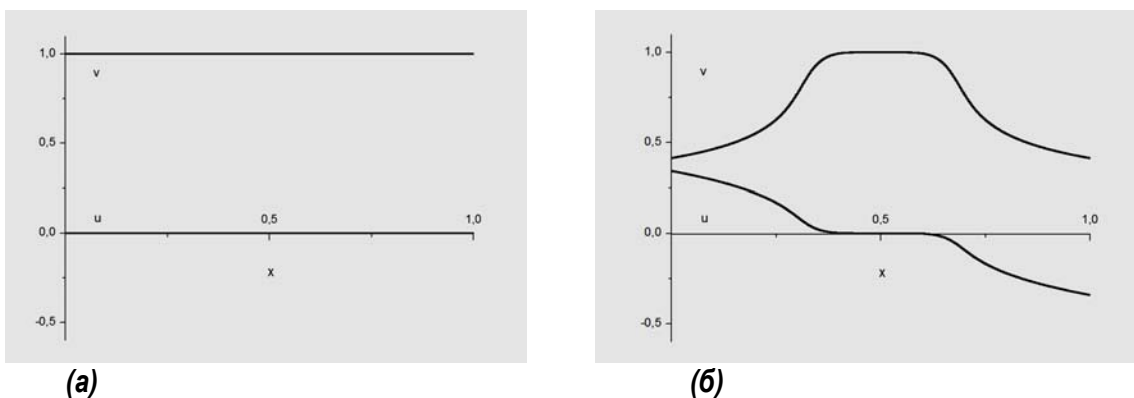
$$\begin{aligned} v_0(x) &\equiv 1, u_0(x) \equiv 0, 0 \leq x \leq l, \\ \mu_1(t) &= \mu_2(t) = 1 - \cos t, t \geq 0. \end{aligned} \tag{17}$$

В эксперименте были выбраны следующие значения параметров:

$$c_1 = 1, \varepsilon = \frac{1}{3}, l = 1, N = 1000, \tau = h.$$

Отметим, что выбранное значение параметра  $\varepsilon$  соответствует одноатомному газу. Легко проверить, что выполнены все условия, кроме условия (10). Результаты вычислительного эксперимента представлены на рисунке 1.





**Рисунок 1** – Профили удельного объема и скорости в начальный момент  $t = 0$  (а); решение разностной схемы (13) – (15) с входными данными (16) в момент времени  $t = 1,25$  (б)

Таким образом, вычислительный эксперимент проиллюстрировал необходимость условия (10) для существования глобального гладкого решения.

## 6. Выводы

В этой работе были сформулированы необходимые условия для существования глобального гладкого решения для начально-краевой задачи для системы уравнений газовой динамики. Построены разностные схемы, для которых эти же условия являются необходимыми для классической устойчивости. При этом полученные ограничения на граничные условия проиллюстрированы вычислительным экспериментом.

### Список цитированных источников

1. Lax, P.D. Development of singularities of solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations / P.D. Lax // J. Math. Phys. – 1964. – Vol. 5, № 5. – P. 611–613.
2. Nishida, T. Mixed problems for nonlinear conservation laws / T. Nishida, J. Smoller // Journal of Differential Equations – 1977. – Vol. 23, № 2. – P. 244–269.

УДК 330.43(075.8)

## ПРИМЕНЕНИЕ ИМИТАЦИОННОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ДЛЯ ОЦЕНКИ КАЧЕСТВА ИНФЕРЕНЦИИ, ПОЛУЧЕННОЙ МЕТОДОМ БУТСТРАПИРОВАНИЯ

**Пролиско Е.Е.**

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест*

Точная инференция<sup>1</sup> в современном эконометрическом анализе практически недостижима, если модель хоть сколь-нибудь замысловатая, а вовлеченные распределения не являются гауссовскими. Обычно используют асимптотический подход, когда при инференции используются приближения, свойственные теории больших выборок. Но асимптотическая теория часто разочаровывает неточностью предоставляемых приближений или трудностью аналитического вывода асимптотических результатов [1]. В этих случаях используют метод бутстрапирования, предоставляющий альтернативные асимптотическим приближения или возможность обходиться без сложных аналитических выводов.

<sup>1</sup> Инференция включает в себя построение доверительных областей и проверку статистических гипотез.

В основе бутстраповского подхода лежит та идея, что истинное распределение данных можно хорошо приблизить эмпирическим, то есть тем, как данные легли в выборке. На самом деле, эмпирическое распределение – единственный источник информации об истинном распределении данных, что у исследователя есть помимо спецификации модели. Идеологически бутстрап как раз и подразумевает это приближение истинного распределения эмпирическим; техническая же сторона дела – трансформировать приближение для распределения данных в приближенное распределение интересующих исследователя статистик, где используются симуляции. Идея того, что распределение самих данных используются вместо их истинного распределения, нашла отражение в названии метода<sup>2</sup>.

Чаще всего бутстраповское распределение используют для получения бутстраповских квантилей, для чего нужно лишь отсортировать бутстраповские статистики в порядке возрастания и в качестве квантилей  $q_{\alpha_1}^*$ ,  $q_{1-\alpha_2}^*$  взять значения  $\widehat{\varphi}_{[B\alpha_1]}^*$ ,  $\widehat{\varphi}_{[B(1-\alpha_2)+1]}^*$  (здесь  $[\cdot]$  означает взятие целой части выражения).

Если в выборке  $n$  наблюдений, то количество вариантов значений бутстраповской статистики имеет порядок  $n^n$ . Таким образом, в вычислительном плане задача сильно усложняется по мере роста  $n$ . Даже если бы компьютер справился с этой сложной комбинаторной задачей за разумное время, полученный результат окажется для наших целей точным сверх необходимого. Гораздо выгодней воспользоваться дополнительным приближением с помощью симуляций. Эта идея прекрасна тем, что как раз из эмпирического распределения, присваивающего всем наблюдениям выборки равные веса, вытягивать «наблюдения» (ресэмплировать) просто и удобно.

Пусть мы бутстрапируем разность  $\widehat{\theta} - \theta$ , где  $\widehat{\theta}$  – аналоговая оценка параметра  $\theta$ . При бутстрапировании  $\widehat{\theta}$  мы создаем бутстраповские статистики  $\widehat{\theta}^*$ , подсчитываемые по той же формуле, что и  $\widehat{\theta}$ , но на бутстраповских выборках. При этом бутстраповским аналогом параметра  $\theta$  является не он сам, а первоначальная статистика  $\widehat{\theta}$ . Действительно, если при приближении бутстрапом истинное распределение искривляется в эмпирическое, то и истинный параметр искривляется в свою оценку. Таким образом, правильным бутстраповским аналогом разности  $\widehat{\theta} - \theta$  является,  $\widehat{\theta}^* - \widehat{\theta}$ , но не  $\widehat{\theta}^* - \theta$ . Это называют *рецен-трированием*.

Если известна спецификация зависимости как парная линейная регрессия, то  $m = 2$  и исходный набор данных можно представить как выборку пар  $z_1 = (x_1, y_1)$ ,  $z_2 = (x_2, y_2)$ , ...,  $z_n = (x_n, y_n)$ . Тогда, полагая компоненту  $x$  как независимый фактор, а  $y$  – как зависимый, по имеющимся данным можно построить регрессию вида  $y_t = \beta_0 + \beta_1 \cdot x_t + \varepsilon_t$ ,  $t = \overline{1, n}$ , где  $\varepsilon_t$  – ошибка  $t$ -го измерения, а  $\beta_0$  и  $\beta_1$  – оцениваемые параметры модели.

Применяя к имеющейся выборке, например, стандартный метод наименьших квадратов (МНК), получаем выборочные оценки  $\widehat{\beta}_0$  и  $\widehat{\beta}_1$ , а применяя МНК к бутстраповским подвыборкам, получаем бутстраповские оценки  $\widehat{\beta}_{0b}^*$  и  $\widehat{\beta}_{1b}^*$ ,  $b = \overline{1, B}$ , на основе которых и строится инференция.

<sup>2</sup> «Бутстрапами» называются ремешки на обуви, ухватясь за которые, барон Мюнхаузен, в английской версии книги, вытащил себя из болота.

Рассмотрим предлагаемые в литературных источниках (например [2, 3]) несколько вариантов бутстраповских статистик, используемых для построения доверительных интервалов. Пусть нас интересует построение статистических выводов относительно параметра  $\beta_i$  из ее оценки  $\hat{\beta}_i, i = 0, 1$ .

1. *Эфроновский доверительный интервал.* В данном случае бутстрапируемой статистикой является сама оценка, т.е.  $\hat{\theta} = \hat{\beta}_i, i = 0, 1$ . Мы получаем бутстраповское распределение  $\hat{\theta}_b^* = \hat{\beta}_{ib}^*$ . Соответствующие квантили распределения  $-q_{\alpha/2}^*, q_{1-\alpha/2}^*$ , а доверительный интервал –

$$CI_E = [q_{\alpha/2}^*, q_{1-\alpha/2}^*].$$

Этот доверительный интервал дает плохую аппроксимацию для истинных уровней значимости, поскольку сохраняет смещение исходной выборки.

2. *Холловский доверительный интервал.* Для построения доверительного интервала используется рецентрированная статистика  $\hat{\theta} = \hat{\beta}_i - \beta_i, i = 0, 1$ , что снимает проблему смещения, связанного с конечностью выборки. Таким образом, получается бутстраповское распределение  $\{\hat{\theta}_b^* = \hat{\beta}_{ib}^* - \hat{\beta}_i^*\}_{b=1}^B$ , из которого берем соответствующие квантили  $q_{\alpha/2}^*, q_{1-\alpha/2}^*$ , а доверительный интервал –

$$CI_H = [\hat{\beta}_i - q_{1-\alpha/2}^*, \hat{\beta}_i - q_{\alpha/2}^*].$$

Холловский доверительный интервал дает лучшую, чем Эфроновский, аппроксимацию уровней значимости, но он не учитывает влияние стандартных ошибок оцениваемых параметров.

3. *t-процентный доверительный интервал.* Такой интервал использует в качестве бутстрапируемой статистики  $t$ -статистику, т.е.  $(\hat{\beta}_i - \beta_i) / s(\hat{\beta}_i), i = 0, 1$ , где  $s(\hat{\beta}_i)$  – оценка стандартного отклонения параметра  $\hat{\beta}_i$ . Затем находят бутстраповское распределение статистики  $\{\hat{\theta}_b^* = (\hat{\beta}_{ib}^* - \hat{\beta}_i^*) / s(\hat{\beta}_{ib}^*)\}_{b=1}^B$  и соответствующие квантили  $q_{\alpha/2}^*, q_{1-\alpha/2}^*$ , а сам  $t$ -процентный доверительный интервал строят как

$$CI_t = [\hat{\beta}_i - s(\hat{\beta}_{ib}^*) \cdot q_{1-\alpha/2}^*, \hat{\beta}_i - s(\hat{\beta}_{ib}^*) \cdot q_{\alpha/2}^*].$$

$t$ -процентный доверительный интервал еще лучше аппроксимирует истинные уровни значимости, чем Холловский доверительный интервал, но использовать его рекомендуется, только если оценку стандартного отклонения можно построить качественно.

4. *Симметричный t-процентный доверительный интервал.* Такой интервал использует в качестве бутстрапируемой «симметризованную  $t$ -статистику»  $|\hat{\beta}_i - \beta_i| / s(\hat{\beta}_i^*)$ . Распределение бутстраповской статистики есть  $\{\hat{\theta}_b^* = |\hat{\beta}_{ib}^* - \hat{\beta}_i^*| / s(\hat{\beta}_{ib}^*)\}_{b=1}^B$ , правый квантиль которой равен  $q_{1-\alpha}^*$ . Симметричный  $t$ -процентный доверительный интервал получаем в виде

$$CI_{|t|} = [\hat{\beta}_i - s(\hat{\beta}_{ib}^*) \cdot q_{1-\alpha/2}^*, \hat{\beta}_i - s(\hat{\beta}_{ib}^*) \cdot q_{1-\alpha}^*].$$

Симметричный  $t$ -процентный доверительный интервал имеет преимущество перед  $t$ -процентным доверительным интервалом если асимптотическое распределение статистики  $\hat{\beta}_i - \beta_i$  симметрично (как раз как в случае асимптотической нормальности), что  $CI_{|t|}$  дает наилучшую аппроксимацию уровней значимости.

Для качественной проверки результатов желательно иметь «доступ» к генеральной совокупности с известными параметрами. Указанную возможность может предоставить метод имитационного моделирования. Были построены имитационные модели, реализующие процессы получения выборок из генеральных совокупностей с известными параметрами и построения на их основе бутстраповских выборок. Используя эти модели, были получены результаты, которые не согласуются с объявленными в указанных источниках.

Во-первых все методы построения доверительных интервалов дают один и тот же результат. Это не является удивительным, так как, например, при устранении смещения, используя рецентрирование, мы вновь вносим его при построении доверительного интервала.

Во-вторых все предлагаемые методы дают более узкие доверительные интервалы, которые растут с ростом объема выборки.

#### **Список цитированных источников**

1. Анатольев, С.А. Асимптотические приближения в современной эконометрике // Экономика и математические методы. – 2005. – № 41. – С. 84–94.
2. Анатольев, С.А. Основы бутстрапирования // Квантиль. – 2007. – № 3. – С. 1–12.
3. Дэвидсон, Р. Бутстрапирование эконометрических моделей // Квантиль. – 2007. – № 3. – С. 13–36.

УДК 519.24

## **ВЫЧИСЛЕНИЕ МОМЕНТОВ МОДИФИЦИРОВАННОЙ ПЕРИОДОГРАММЫ МНОГОМЕРНОГО ВРЕМЕННОГО РЯДА**

**Стасюк Т.Г.**

*УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Мирская Е.И., к. ф.- м. н., доцент*

Спектральный анализ временных рядов является одним из основных направлений в исследованиях ученых многих стран мира, причем особое внимание уделяется методам спектрального анализа стационарных случайных процессов с дискретным временем.

В настоящее время существует большое количество различных методов и алгоритмов спектрального анализа временных рядов, касающихся в основном стационарных случайных процессов и однородных случайных полей с конечными вторыми моментами.

В данной работе исследованы первые два момента модифицированной периодограммы многомерного временного ряда. Вычислены математическое ожидание, дисперсия и ковариация модифицированной периодограммы, которая исследована в качестве оценки взаимной спектральной плотности процесса. Исследовано асимптотическое поведение математического ожидания и ковариации оценки.

Пусть  $X^r(t)$ ,  $t \in Z$  –  $r$ -мерный действительный стационарный случайный процесс. Будем предполагать, что  $MX_a(t) = 0$ , а  $f_{ab}(\lambda)$ ,  $\lambda \in \Pi = [-\pi, \pi]$ ,  $a, b = \overline{1, r}$  неизвестная взаимная спектральная плотность процесса.

Пусть  $X_a(0), X_a(1), \dots, X_a(T-1)$  –  $T$  последовательных, полученных через равные промежутки времени наблюдений за составляющей  $X_a(t)$ ,  $a = \overline{1, r}$  процесса  $X^r(t)$ ,  $t \in Z$ .

В данной работе в качестве оценки взаимной спектральной плотности исследована модифицированная периодограмма вида

$$I_{ab}^T(\lambda) = d_a^T(\lambda) \overline{d_b^T(\lambda)}, \quad (1)$$

где  $d_a^T(\lambda)$  – модифицированное конечное преобразование Фурье наблюдений, исследованное в работе [1]. Доказаны

**Теорема 1.** Для статистики (1) справедливо равенство

$$MI_{ab}^T(\lambda) = \int_{\Pi} f_{ab}(u + \lambda) \Phi_T(u) du,$$

$\lambda \in \Pi$ , где функция  $\Phi_T(u)$  задается выражением

$$\Phi_T(x) = \left[ 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t) \right]^{-1} |\varphi_T(x)|^2.$$

**Теорема 2.** Если взаимная спектральная плотность  $f_{ab}(\lambda)$  непрерывна в точке  $\lambda \in \Pi$ , ограничена на  $\Pi$ , то

$$\lim_{T \rightarrow \infty} MI_{ab}^T(\lambda) = f_{ab}(\lambda),$$

где  $\lambda \in \Pi$ ,  $a, b = \overline{1, r}$ .

**Теорема 3.** Для любых точек  $\lambda_1, \lambda_2 \in \Pi$  ковариация модифицированной периодограммы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} \text{cov}\{I_{a_1 b_1}^T(\lambda_1), I_{a_2 b_2}^T(\lambda_2)\} &= 2\pi \left[ \sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t) \right]^{-2} \sum_{t=0}^{T-1} h_T^4(t) \times \\ &\times \iiint_{\Pi^3} f_{a_1 b_1 a_2 b_2}(\mu_1 + \lambda_1, \mu_2 - \lambda_1, \mu_3 - \lambda_2) \Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3) d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 + \\ &+ \int_{\Pi} f_{a_1 a_2}(v) \Phi_T(v - \lambda_1, v - \lambda_2) dv \int_{\Pi} f_{b_1 b_2}(\mu) \Phi_T(\mu + \lambda_1, \mu + \lambda_2) d\mu + \\ &+ \int_{\Pi} f_{a_1 b_2}(v) \Phi_T(v - \lambda_1, v + \lambda_2) dv \int_{\Pi} f_{b_1 a_2}(\mu) \Phi_T(\mu + \lambda_1, \mu - \lambda_2) d\mu, \end{aligned}$$

где  $f_{abab}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  – семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка,  $\mu_i \in \Pi$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $a_1, b_1, a_2, b_2 = \overline{1, r}$

$$\Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3) = \left[ (2\pi)^3 \sum_{t=0}^{T-1} h_T^4(t) \right]^{-1} \varphi_T(\mu_1) \varphi_T(\mu_2) \varphi_T(\mu_3) \overline{\varphi_T(\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)}, \quad (2)$$

$$\Phi_T(x, y) = \left[ 2\pi \sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t) \right]^{-1} \varphi_T(x) \overline{\varphi_T(y)}, \quad (3)$$

$$\varphi_T(x) = \sum_{t=0}^{T-1} h_T(t) e^{ixt}. \quad (4)$$

**Теорема 4.** Для любого  $\lambda, \lambda \in \Pi$ , дисперсия модифицированной периодограммы (1) имеет вид

$$\begin{aligned} DI_{ab}^T(\lambda) &= 2\pi \left[ \sum_{t=0}^{T-1} h_T^2(t) \right]^{-2} \sum_{t=0}^{T-1} h_T^4(t) \times \iiint_{\Pi^3} f_{abab}(\mu_1 + \lambda, \mu_2 + \lambda, \mu_3 + \lambda) \Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3) d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 + \\ &+ \int_{\Pi} f_{aa}(v) \Phi_T(v - \lambda, v - \lambda) dv \int_{\Pi} f_{bb}(\mu) \Phi_T(\mu + \lambda, \mu + \lambda) d\mu + \\ &+ \int_{\Pi} f_{ab}(v) \Phi_T(v - \lambda, v - \lambda) dv \int_{\Pi} f_{ba}(\mu) \Phi_T(\mu + \lambda, \mu + \lambda) d\mu, \end{aligned}$$

где  $f_{abab}(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  – семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка,  $\mu_i \in \Pi, i = 1, 2, 3$ , а функции  $\Phi_T(x, y)$ ,  $\varphi_T(x)$ ,  $\Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3)$  задаются соответственно равенствами (3), (4), (2).

**Теорема 5.** Если семиинвариантная спектральная плотность четвертого порядка ограничена, выполнены условия теоремы 3 и

$$\iiint_{\Pi^3} |\Phi_T(\mu_1, \mu_2, \mu_3)| d\mu_1 d\mu_2 d\mu_3 \leq D < \infty,$$

то для  $\lambda_1 \pm \lambda_2 \neq 0 \pmod{2\pi}$

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \text{cov}\{I_{a_1 b_1}^T(\lambda_1), I_{a_2 b_2}^T(\lambda_2)\} = 0.$$

#### Список цитированных источников

1. Труш, Н.Н. Асимптотические методы статистического анализа временных рядов / Н.Н. Труш. – Мн.: БГУ, 1999. – 218 с.

УДК 518.948

## НЕЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ ГРАДИЕНТНОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫМ ОПЕРАТОРОМ

**Ступкин А.А., Харитонюк А.А.**

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест  
Научный руководитель – Мадорский В.М. к. ф.- м. н., доцент

Пусть необходимо решить уравнение

$$F(x) = f(x) + g(x) = 0, \quad f \in C_D^2, \quad g \in C_D. \quad (1)$$

Для решения уравнения (1) применим следующую итерационную процедуру:

Шаг 1. Последовательные приближения находятся по формуле

$$x_{k+1} = x_k - \beta_k \frac{\overline{f'(x_k)} f(x_k) (\|f(x_k)\|^2 + \beta_{k-1} \|g(x_k)\|^2)}{\|\overline{f'(x_k)} f(x_k)\|^2} \quad (2)$$

Шаг 2. Если  $\|f(x_k) + g(x_k)\| < \varepsilon$ , то приближенное решение уравнения (1) найдено, иначе пересчитывается шаговая длина по формуле

$$\beta_{k+1} = \min \left\{ 1, \frac{\beta_k (\|f(x_k)\|^2 + \beta_{k-1} \|g(x_k)\|^2)}{\|f(x_{k+1})\|^2 + \beta_k \|g(x_{k+1})\|^2} \right\}, \quad \beta_0, \beta_{-1} \in [10^{-2}, 10^{-1}], \quad (3)$$

и переходим на шаг 1.

Относительно операторов  $f$  и  $g$  полагаем, что имеют место соотношения:

$$\|f''(x)\| \leq K, \quad \|\beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n)\| \leq \beta_n L \|x_{n+1} - x_n\|.$$

#### Теорема.

Пусть в интересующей нас области  $D$  существует решение уравнения (1). Тогда при выполнении перечисленных выше условий, накладываемых на операторы  $f$  и  $g$ , если начальное приближение  $x_0$  и шаговая длина  $\beta_0$  таковы, что выполняется соотношение  $\varepsilon_0 = (KB^2 + LB)\beta_0 f(x_0) < 1$ , итерационный процесс (2)-(3) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к решению уравнения (1).

Доказательство теоремы вполне аналогично тому, как это проводится в работе [2].

### Вычислительный эксперимент и его обсуждение

Для тестирования использовались системы:

$$\begin{cases} x_1 + x_2^2 + x_3 + x_4^3 = a_1; \\ x_1 + |x_2| + x_3 - x_4 = a_2; \\ x_1 + 2x_2 + x_3^3 + |x_4| = a_3; \\ x_1 + x_2 + 5x_3 + |x_4| = a_4; \end{cases}$$

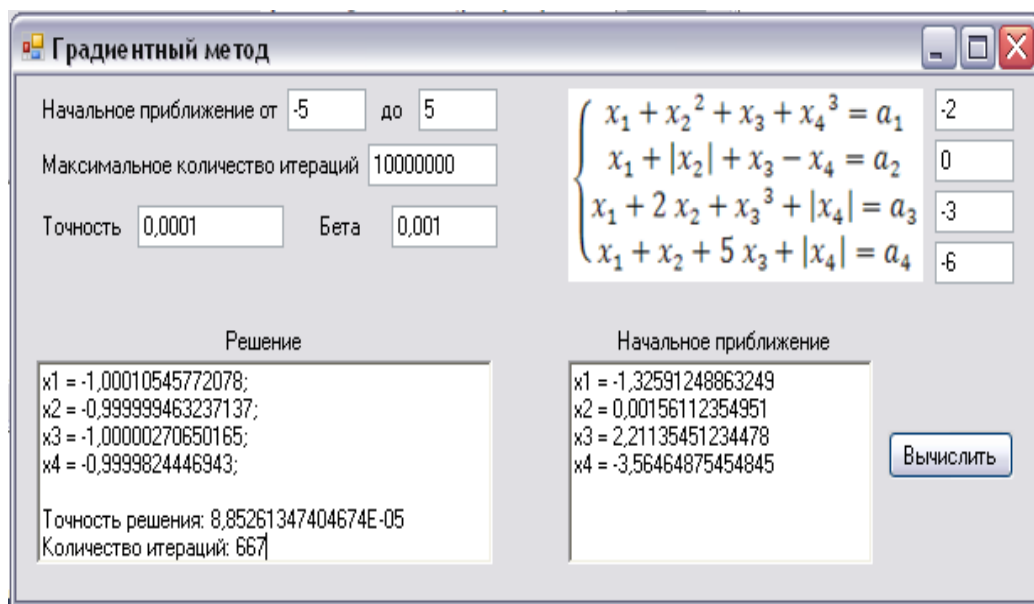
где  $a_1, a_2, a_3, a_4$  – некоторые константы.

Меняя значения  $a_1, a_2, a_3, a_4$ , получаем три системы:

1.  $a_1 = -2, a_2 = 0, a_3 = -3, a_4 = -6$ , тогда одним из точных решений этой системы является вектор  $(-1, -1, -1, -1)^T$
2.  $a_1 = 4, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 8$ , тогда одним из точных решений этой системы является вектор  $(1, 1, 1, 1)^T$
3.  $a_1 = -14, a_2 = 4, a_3 = -128, a_4 = -24$ , тогда одним из точных решений этой системы является вектор  $(2, -4, -5, -3)^T$

Каждая система тестировалась при значениях случайным образом полученных из интервалов  $[-2, 2], [-5, 5], [-10, 10]$  и запускалась на тестирование 100 раз. В качестве точности  $\epsilon$  использовалась 0,0001. В случае, если заданная точность не достигнута за 10000000 итераций, запуск считался неудавшимся.

Тестирование проводилось на компьютере: процессор 2.2 ГГц, ОЗУ 1024 Мб, программа написана на Visual C#. Программа имеет внешний вид:



Результаты тестирования сведены в таблице:

Таблица – Связь между эффективностью процесса и начальными данными

Интервал начальных приближений	Система		
	1.	2.	3.
<b>[- 2, 2]</b>	99% (31ms)	98% (32 ms)	98% (34 ms)
<b>[- 5, 5]</b>	80% (209 ms)	78% (224 ms)	77% (235 ms)
<b>[- 10, 10]</b>	75% (1291 ms)	74% (1321 ms)	75% (1306 ms)

В ячейках таблицы показан процент удавшихся запусков, в скобках указано среднее время (в миллисекундах), понадобившееся программе, чтобы достигнуть заданной точ-

ности. В связи с этим можно сделать следующие выводы: процесс (2)-(3) имеет широкую область сходимости и является достаточно быстрым.

#### Список цитированных источников

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

УДК 517.988

## ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА–КАНТОРОВИЧА ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРНЫХ УРАВНЕНИЙ

*Таныгина А.Н.*

*УО «Белорусский государственный университет», г. Минск*

Пусть  $X$  и  $Y$  – банаховы пространства,  $D \subset X$  – выпуклое множество,  $f$  и  $g$  – определенные на  $D$  и принимающие значения из  $Y$  нелинейные операторы, причем  $f$  дифференцируем в каждой внутренней точке множества  $D$ , а  $g$  – недифференцируемый оператор. Одним из наиболее эффективных методов решения операторного уравнения вида

$$f(x) + g(x) = 0 \quad (1)$$

является обобщенный метод Ньютона–Канторовича, последовательные приближения в котором задаются равенствами

$$x_{n+1} = x_n - [f'(x_n)]^{-1}(f(x_n) + g(x_n)) \quad (n = 0, 1, \dots), \quad (2)$$

где  $x_0 \in D$  – заданное начальное приближение.

В случае, когда  $g = 0$ , наиболее точные из известных оценки скорости сходимости процесса (2) были получены в работах [1, 2] при предположении о гладкости оператора  $f$ , названном авторами регулярной гладкостью. Цель настоящей работы – обобщение основного результата о сходимости последовательных приближений из [2] на уравнения вида (1) при предположении, что оператор  $f$  является регулярно гладким, а оператор  $g$  удовлетворяет модифицированному условию Липшица:

$$\|g(x'') - g(x')\| \leq \psi(t) \|x'' - x'\|, \quad \forall x', x'' \in \overline{B(x_0, t)} \subseteq D, \quad (3)$$

где  $\psi(t)$  – неубывающая функция неотрицательного аргумента.

Пусть  $\omega: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$  – непрерывная строго монотонно возрастающая вогнутая функция, причем  $\omega(0) = 0$ . Без ограничения общности будем считать, что  $f'(x_0) = I$ . Обозначим  $h(f) = \inf_{x \in D} \|f'(x)\|$ . Согласно [2] оператор  $f$  называется  $\omega$ -регулярно гладким

на  $D$  (или  $\omega$  является модулем регулярной гладкости для оператора  $f$  на  $D$ ), если существует число  $h \in [0, h(f)]$  такое, что для любых  $x', x'' \in D$  имеет место неравенство

$$\omega^{-1}(h_f(x', x'') + \|f'(x'') - f'(x')\|) - \omega^{-1}(h_f(x', x'')) \leq \|x'' - x'\|, \quad (4)$$

где

$$h_f(x', x'') = \min \{ \|f'(x')\|, \|f'(x'')\| \} - h.$$



Оператор  $f$  называется *регулярно гладким* на  $D$ , если он является  $\omega$ -регулярно гладким на  $D$  для некоторого  $\omega$ , обладающего указанными выше свойствами.

Условие (4) для большей наглядности можно переписать в виде

$$\|f'(x'') - f'(x')\| \leq \omega(\xi(x', x'') + \|x'' - x'\|) - \omega(\xi(x', x'')),$$

где  $\xi(x', x'') = \omega^{-1}(h_f(x', x''))$ .

Схема доказательства теоремы о сходимости последовательных приближений (2) к решению уравнения (1) основывается на использовании мажорантных скалярных уравнений. Данный способ был предложен Л.В. Канторовичем [3, гл. XVIII]. В процессе доказательства существенную роль играет приводимая ниже лемма.

Пусть  $\Omega(t) = \int_0^t \omega(\tau) d\tau$ ,  $\Psi(t) = \int_0^t \psi(\tau) d\tau$ ,  $\chi = \omega^{-1}(1-h)$ ,  $a$  – положительное число, удовлетворяющее неравенству  $\|f(x_0) + g(x_0)\| \leq a$ . Определим числовую последовательность  $\{t_n\}$  следующим рекуррентным соотношением:

$$t_{n+1} = t_n + \frac{a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n h + \Psi(t_n)}{h + \omega(\chi - t_n)}, \quad (5)$$

$n = 0, 1, \dots$ ;  $t_0 = 0$ . Если ввести в рассмотрение функции числового аргумента  $t \in [0, \chi]$

$$\Phi_h(t) = a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t) - th$$

и

$$W(t) = \Phi_h(t) + \Psi(t), \quad (6)$$

то соотношение (5) можно переписать в виде

$$t_{n+1} = t_n - \frac{W(t_n)}{\Phi'_h(t_n)},$$

$n = 0, 1, \dots$ ;  $t_0 = 0$ .

Обозначим для любого  $n = 1, 2, \dots$

$$r(x_{n-1}, x_n) = \|f(x_n) - f(x_{n-1}) - f'(x_{n-1})(x_n - x_{n-1})\|.$$

**Лемма.** Пусть оператор  $f$  является  $\omega$ -регулярно гладким на  $D$  с некоторым  $h$ , оператор  $g$  удовлетворяет условию (3), последовательность  $\{t_n\}$  определена по правилу (5) и выполнено условие

$$a < \Omega(\chi) + h \cdot \chi - \Psi(\chi). \quad (7)$$

Если для любого  $1 \leq k \leq n$  последовательные приближения  $x_k$  определены и удовлетворяют неравенству

$$\|x_k - x_{k-1}\| \leq t_k - t_{k-1},$$

то справедлива оценка

$$r(x_{n-1}, x_n) \leq a - \Omega(\chi) + \Omega(\chi - t_n) - t_n h + \Psi(t_{n-1}).$$

**Теорема.** Пусть оператор  $f$  является  $\omega$ -регулярно гладким на  $D$  с некоторым  $h$ , оператор  $g$  удовлетворяет условию (3), функция (6) имеет единственный нуль  $t_*$  на отрезке  $[0, \chi]$ , замкнутый шар  $\overline{B(x_0, t_*)}$  содержится во множестве  $D$  и выполнено условие (7). Тогда:

1) уравнение (1) имеет единственное решение  $x_*$  в шаре  $\overline{B(x_0, t_*)}$ ;

2) последовательные приближения (2) определены для всех  $n=0, 1, \dots$ , принадлежат шару  $\overline{B(x_0, t_*)}$  и сходятся к  $x_*$ ;

3) для всех  $n=0, 1, \dots$  справедливы оценки

$$\begin{aligned}\|x_{n+1} - x_n\| &\leq t_{n+1} - t_n, \\ \|x_* - x_n\| &\leq t_* - t_n,\end{aligned}$$

где последовательность  $\{t_n\}$  определена по правилу (5), монотонно возрастает и сходится к  $t_*$ .

#### **Список цитированных источников**

1. Galperin, A. Newton's method under a weak smoothness assumption / A. Galperin, Z. Waksman // J. Comp. Appl. Math. – 1991. – Vol. 35. – P. 207–215.
2. Galperin, A. Regular smoothness and Newton's method / A. Galperin, Z. Waksman // Numer. Funct. Anal. and Optimiz. – 1994. – Vol. 15, № 7&8. – P. 813–858.
3. Канторович, Л.В. Функциональный анализ в нормированных пространствах / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. – М.: Физматгиз, 1959. – 684 с.

УДК 517.977

## **К ВОПРОСУ УПРАВЛЕНИЯ ЛИНЕЙНЫМИ АВТОНОМНЫМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМИ СИСТЕМАМИ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА**

**Урбан О.И.**

*УО «Гродненский государственный университет им. Я. Купалы», г. Гродно  
Научный руководитель – Хартковский В.Е., к. ф.- м. н., доцент*

Системы с запаздыванием, в смысле их полной управляемости, начали изучаться Н.Н. Красовским в 60-х годах прошлого века, а затем активно исследовались многими математиками. Параллельно начали развиваться методы управления системами неполного ранга (не обладающие свойством полной управляемости). Настоящее исследование представляет собой изучение возможности построения управляющего воздействия для систем нейтрального типа неполного ранга в случае достаточно широкого класса начальных состояний.

Рассмотрим линейную автономную дифференциально-разностную систему нейтрального типа, которую назовем системой  $\Sigma$ :

$$\dot{x}(t) = D\dot{x}(t-h) + Ax(t) + A_1x(t-h) + Bu(t) + B_1u(t-h), \quad t \geq 0, \quad (1)$$

$$x(t) = \eta(t), \quad t \in [-h, 0], \quad u(t) \equiv 0, \quad t < 0, \quad (2)$$

где  $x-n$  – вектор-столбец решения уравнения (1),  $u-r$  – вектор-столбец кусочно-непрерывного воздействия.  $D, A, A_1, B, B_1$  – постоянные матрицы соответствующих размеров,  $h > 0$  – постоянное запаздывание.

Функцию  $\eta(t)$  в (2) будем называть начальной функцией и считать, что  $\eta \in D(H, \mathbb{R}^n)$ , где  $D(H, \mathbb{R}^n)$  – банахово пространство абсолютно непрерывных функций, определенных на  $H$  и со значениями в пространстве  $n$ -векторов  $\mathbb{R}^n$ .

**Определение 1.** Начальную функцию  $\eta$  в (2) назовем управляемой, если для любого натурального числа  $\theta$  (включая  $\theta = +\infty$ ) существует момент времени  $t_1 > 0$  и управление  $u(t)$ ,  $t \in [0, t_1 + \theta h]$ , обеспечивающее

$$x(t) \equiv 0, t \in [t_1, t_1 + \theta h]. \quad (3)$$

Если управляемы все начальные функции  $\eta$ , то систему  $\Sigma$  назовем управляемой.

Обозначим  $W(\lambda) = \lambda(E - De^{-\lambda h}) - (A + A_1 e^{-\lambda h})$ ,  $\tilde{B}(\lambda) = B + B_1 e^{-\lambda h}$ ,

$$B_D = [(DB + B_1), D(DB + B_1), \dots, D^{n-1}(BD + B_1)].$$

Рассмотрим последовательность векторов  $\{g^k\}_{k=0}^{k=+\infty}$ , определяемых дискретным уравнением  $Bg^{k+1} + B_1g^k = 0$ ,  $k = 0, 1, \dots$ , начальный вектор  $g^0$  считаем заданным. Обозначим через  $T$  матрицу подходящего размера, составленную из максимального числа линейно независимых начальных векторов  ${}^i g^0$ , для которых указанное выше дискретное уравнение имеет решение  $g^k$ ,  $k = 0, 1, \dots$  [1].

Для системы нейтрального типа  $\Sigma$  в работе [1] был получен следующий критерий управляемости.

**Теорема 1.** Для того чтобы система  $\Sigma$  была управляемой, необходимо и достаточно, чтобы одновременно выполнялось два условия:

$$\text{rank}[W(\lambda), \tilde{B}(\lambda), BT] = n \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}, \quad (4)$$

$$\text{rank}[B_D, BT] = \text{rank}[B_D, BT, D^n]. \quad (5)$$

В данной работе рассматривается случай, когда система  $\Sigma$  не является управляемой, а именно, нарушается условие (5). Цель работы – получить более слабые условия, при которых класс управляемых начальных состояний остается достаточно широким.

Управляемость начального состояния (2) определяется [1, 2] набором данных  $\eta^s = (\eta(0) - D\eta(-h), \eta(\tau), \tau \in H)$ . Рассмотрим этот набор как элемент гильбертова пространства  $M_2^n = \mathbb{R}^n \times L_2(H, \mathbb{R}^n)$ ,  $L_2(\cdot)$  – стандартное пространство суммируемых в квадрате функций.

**Определение 2** [2]. Набор данных  $x_t^s = (x_t(0) - Dx_t(-h), x(\tau), \tau \in H)$  назовем  $s$ -состоянием системы  $\Sigma$  в момент времени  $t$ , где  $x_t(\tau) = x(t + \tau)$ ,  $\tau \in H$ .

Основной результат сформулируем в виде утверждения.

**Теорема 2.** Для того, чтобы множество всех управляемых начальных функций  $\eta$  в (2) порождало всюду плотное множество  $s$ -состояний в пространстве  $M_2^n$ , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие:

$$\text{rank}[W(\lambda), \tilde{B}(\lambda), BT] = n, \quad \forall \lambda \in \mathbb{C}. \quad (6)$$

#### Список цитированных источников

1. Хартовский, В.Е. К вопросу управления линейными системами нейтрального типа / В.Е. Хартовский // Весці НАН Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2010. – №4. – С. 68-75.
2. Метельский, А.В. Почти полная управляемость линейных автономных дифференциально-разностных систем нейтрального типа / А.В. Метельский, С.А. Минюк // Дифференц. уравнения. Т. 44. 2008. – №11. – С. 1544-1555.

УДК 519.85 (075.4)

## РЕШЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И СИСТЕМ В СОВРЕМЕННЫХ МАТЕМАТИЧЕСКИХ ПАКЕТАХ

**Федченко Т.В.**УО «Донецкий национальный технический университет», г. Донецк  
Научный руководитель – Чеснокова О.В, ст. преп. кафедры ВМиП ДонНТУ

Решение реальных дифференциальных уравнений и систем представляет собой довольно сложную математическую задачу. Существуют уравнения (системы уравнений), для которых нельзя найти точное решение. Но даже для уравнений с известным аналитическим решением очень часто необходимо вычислить числовое значение в определённых точках. Поэтому при решении дифференциальных уравнений и систем широко используются математические пакеты. Рассмотрим возможности таких программ, как MatLab, Scilab и Octave на примере решения дифференциального уравнения [3]

$$y'(x) = 6y - 13x^3 - 22x^2 + 17x + \sin(x), y(0) = 2 \quad (1)$$

и системы [1]

$$\begin{cases} x' = \cos(x + 2y), \\ y' = \sin(3x - 4y), \\ x(0) = 2, y(0) = 1. \end{cases} \quad (2)$$

Для решения дифференциальных уравнений и систем в MatLab [1] предусмотрены следующие функции: ode45(f, interval, X0 [, options]), ode23(f, interval, X0 [, options]), ode113(f, interval, X0 [, options]), ode15s(f, interval, X0 [, options]), ode23s(f, interval, X0 [, options]), ode23t(f, interval, X0 [, options]) и ode23tb(f, interval, X0 [, options]). Входными параметрами этих функций являются: f – вектор-функция для вычисления правой части уравнения  $x' = f(x, t)$  или системы уравнений  $\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(t, \vec{x})$ ; interval – массив из двух чисел, определяющий интервал интегрирования дифференциального уравнения или системы; X0 – вектор начальных условий системы дифференциальных систем; options – параметры управления ходом решения дифференциального уравнения или системы. Все функции возвращают: массив T – координаты узлов сетки, в которых определяется решение; матрицу X, i-й столбец которой является значением вектор-функции решения в узле T<sub>i</sub>.

В функции ode45 реализован метод Рунге-Кутты 4–5 порядка точности, в функции ode23 также реализован метод Рунге-Кутты, но второго-третьего порядка, функция ode113 реализует метод Адамса.

Далее приведены примеры применения функции ode45.

%Решение дифференциального уравнения (1).

function y=A(t,x)

y=6\*x-13\*t^3-22\*t^2+17\*t-11+sin(t);

end

x0=[2]; interval=[0 0.5]; [T,X]=ode45(@A,interval,x0); plot(T,X,'-g'); grid on;

%Решение системы дифференциальных уравнений (2).

function y=t1(t,x)

```
y=[cos(x(1)+2*x(2));sin(3*x(1)-4*x(2))];
end
x0=[2;1]; interval=[0 5]; [T,X]=ode45(@t1,interval,x0); plot(T,X); grid on;
```

Наиболее часто используемыми в Octave функциями для решения дифференциальных уравнений являются [3]: `ode23(@f, interval, X0, options)`, `ode45(@f, interval, X0, options)` – функции решений обыкновенных нежёстких дифференциальных уравнений (или систем) методом Рунге-Кутты 2-3-го и 4-5-го порядка точности соответственно; `ode5r(f, interval, X0, options)`, `ode2r(f, interval, X0, options)` – функции решений обыкновенных жёстких дифференциальных уравнений (или систем). Входные и выходные параметры этих функций такие же, как и в MatLab. Параметр управления ходом решения дифференциального уравнения задается функцией `odeset`.

Пример использования функции `ode45`:

```
%Решение дифференциального уравнения (1).
function y=g(t,x)
y=6*x-13*t^3-22*t^2+17*t-11+sin(t);
end
par=odeset ("RelTol", 1e-5, "AbsTol", 1e-5, 'InitialStep', 0.025, 'MaxStep', 0.1);
[X45,Y45]=ode45(@g,[0 0.5],2,par);
plot(X45,Y45,'*b'); grid on;

%Решение системы дифференциальных уравнений (2).
function dx=syst2(t,x)
dx=zeros(2,1);dx(1)=cos(x(1)+2*x(2));dx(2)=sin(3*x(1)-4*x(2));
end
par=odeset ("RelTol", 1e-5, "AbsTol", 1e-5, 'InitialStep', 0.025, 'MaxStep', 0.1);
[X45,Y45]=ode45(@syst2,[0 5],[2;1],par); plot(X45,Y45); grid on;
```

График решения системы дифференциальных уравнений (2), найденного в Octave, представлен на рис. 1.

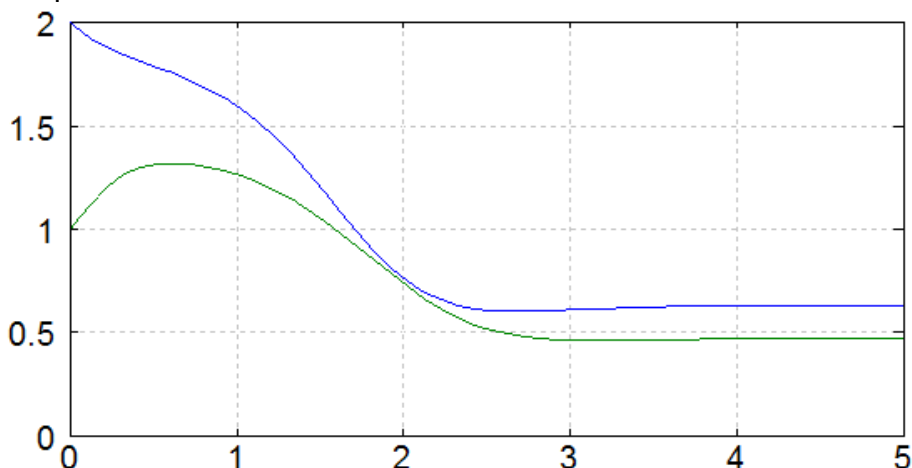


Рисунок 1 – Графическое решение системы дифференциальных уравнений (2)

В *Scilab* [2] для решения дифференциальных уравнений и систем предусмотрен достаточно мощный и универсальный инструмент, функция

`ode([type], y0, t0, t [, rtol [, atol]], f [, jac] [, w, iw])`,

где параметр `type` позволяет выбирать метод решения дифференциального уравнения или системы.

Далее приведены примеры решения дифференциального уравнения (1) и системы методом Рунге-Кутты четвертого порядка в Scilab.

```
%Решение дифференциального уравнения (1).
function y=f(t,x)
y=6*x-13*t^3-22*t^2+17*t-11+sin(t);
endfunction;
x0=2; t0=0; t=0:0.05:0.5; y=ode('rk', x0, t0, t, f); plot(t,y,'g'); xgrid();

%Решение системы дифференциальных уравнений (2).
function dx=syst2(t,x)
dx=zeros(2,1); dx(1)=cos(x(1)+2*x(2)); dx(2)=sin(3*x(1)-4*x(2));
endfunction
x0=[2;1];t0=0;t=0:0.01:5; y=ode('rk',x0,t0,t,syst2); plot(t,y); xgrid()
```

Все рассмотренные пакеты достаточно точно решают дифференциальные уравнение и системы с помощью встроенных функций. Кроме того, пакеты оснащены мощным языком программирования, который дает возможность пользователю самостоятельно запрограммировать любой алгоритм решения дифференциального уравнения или системы.

Опыт решения дифференциальных уравнений и систем в *Scilab* и *Octave* показывает, что эти пакеты можно рассматривать, как серьезную альтернативу проприетарному пакету *MatLab*. Так, в *Octave*, кроме рассмотренных стандартных функций решения дифференциальных уравнений общего типа, входящих в состав ядра пакета, содержится специализированный модуль расширения *odepkg*, в котором представлено огромное количество специальных функций, предназначенных для решения дифференциальных уравнений различного вида. С другой стороны, наличие в *Scilab* одной функции для решения дифференциальных уравнений и систем позволяет быстро освоить пакет и использовать его для решения конкретных научных и инженерных задач.

#### Список цитированных источников

1. Алексеев, Е.Р. Решение задач вычислительной математики в пакетах MathCad 12, MATLAB 7, Maple 9. Самоучитель / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова. – М.: НТ Пресс, 2005. – 496 с.
2. Алексеев, Е.Р. Решение инженерных и математических задач в пакете Scilab / Е.Р. Алексеев, Е.А. Чеснокова, Е.А. Рудченко. – М.: ALT Linux, 2008. – 257 с.
3. Алексеев, Е.Р. Черновик книги "GNU OCTAVE для преподавателя и студента" / Е.Р. Алексеев, О.В. Чеснокова. – URL: <http://gnu-octave.narod2.ru> – Дата доступа: 08.08.2011.

УДК 517.977

## ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ СТАБИЛИЗАЦИИ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ НЕУПРАВЛЯЕМЫХ ПО КАЛМАНУ

*Хомицкая Т.Г.*

*УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест*

Рассматривается неустойчивая динамическая система

$$\dot{x} = Ax, \quad (1)$$

где  $x = x(t)$  –  $n$ -вектор состояния системы в момент времени  $t$ ,  $t \geq 0$ ,  $A \in R^{n \times n}$  – постоянная матрица.

Считаем, что система (1) допускает целенаправленные воздействия  $u(t)$ ,  $t \geq 0$ , вместе с которыми её поведение описывается уравнением

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad b \in R^n. \quad (2)$$

Имея в виду использование для управления дискретных устройств, в качестве управляющих воздействий возьмем дискретные функции  $u_h(t)$ ,  $t \geq 0$ , с периодом квантования  $h > 0$ :

$$u_h(t) = u(\tau), \quad t \in [\tau, \tau + h[, \quad \tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots\}.$$

В этом классе система (2) эквивалентна дискретной системе

$$x(t+h) = A_h x(t) + b_h u_h(t), \quad t \in T_h, \quad (3)$$

$$\left( A_h = e^{Ah}, \quad b_h = \int_0^h e^{At} dt b \right),$$

т.е. траектория  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , системы (2) с начальным условием  $x(0) = x_0$  и управляющим воздействием  $u = u_h(t)$ ,  $t \geq 0$ , совпадает в моменты  $\tau \in T_h$  с траекторией дискретной системы (3) с тем же начальным условием.

Будем рассматривать систему (2), которая в классе дискретных управляющих воздействий неуправляема в смысле Калмана, т.е.

$$\text{rank}\{b_h, A_h b_h, \dots, A_h^{n-1} b_h\} = m < n,$$

но является в том же классе асимптотически управляемой.

**Определение.** Система (2) называется асимптотически управляемой в классе дискретных управляющих воздействий, если для каждого вектора  $x_0 \in R^n$  и каждого выбранного числа  $\varepsilon > 0$  найдутся такие число  $t^*(\varepsilon, x_0) \in T_h$  и дискретное управляющее воздействие  $u_h(t)$ ,  $t \in [0, t^*(\varepsilon, x_0)]$ , что соответствующая траектория  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , системы (2) с начальным состоянием  $x(0) = x_0$  обладает свойством  $\|x(t^*(\varepsilon, x_0))\| < \varepsilon$ .

Предположим, что в процессе стабилизации будут доступны точные значения текущих состояний  $x(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ .

Функция  $u(x)$ ,  $x \in R^n$ , называется обратной связью по состоянию. Ее подстановка в систему (2)

$$\dot{x} = Ax + bu(x) \quad (4)$$

– замыкание системы управления (2).

Траектория замкнутой системы представляет собой решение уравнения (4) с  $x(0) = x_0$ , которое не всегда имеет решение, продолжимое на всю ось времени. Функцию  $u_h(x)$ ,  $x \in R^n$ , назовем дискретной обратной связью с периодом квантования  $h$ , непрерывная траектория  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , замкнутой ею системы

$$\dot{x} = Ax + bu_h(x), \quad x(0) = x_0, \quad (5)$$

строится по решениям линейных уравнений

$$\dot{x} = Ax + bu_h(x_0), \quad t \in [0, h[, \quad x(0) = x_0;$$

$$\dot{x} = Ax + bu_h(x(h)), \quad t \in [h, 2h[; \dots$$

В этом случае замкнутая система всегда имеет единственную траекторию, продолжимую на всю ось времени.

Пусть  $G \subset R^n$  – некоторая окрестность состояния  $x = 0$ .

**Определение.** Функцию  $u_h(x)$ ,  $x \in G$ , будем называть ограниченной стабилизирующей дискретной обратной связью, если

- 1)  $u_h(0) = 0$ ;

2)  $u_h(x) \in U = \{u \in R : |u| \leq 1\}$ ,  $x \in G$ ;

3) для любого  $x_0 \in G$  траектория  $x(t)$ ,  $t \geq 0$ , замкнутой системы (5) с начальным состоянием  $x(0) = x_0$  содержится в  $G$ ;

4) нулевое решение замкнутой системы (5) асимптотически устойчиво.

Под стабилизацией системы (2) в классе дискретных управляющих воздействий по классическому принципу замкнутого контура понимается построение в явной форме обратной связи  $u_h(x)$ ,  $x \in G$ , с перечисленными свойствами.

Цель работы – изложить метод стабилизации системы (2) по принципу управления в режиме реального времени. В связи с этим сначала проанализируем использование стабилизирующей обратной связи в конкретном процессе стабилизации.

Предположим, что ограниченная стабилизирующая дискретная обратная связь  $u_h(x)$ ,  $x \in G$ , построена и в замкнутой системе (5) реализовалось начальное состояние  $x(0) = x_0^*$ . Оно породит траекторию  $x^*(t)$ ,  $t \geq 0$ , замкнутой системы (5). В процессе стабилизации на вход объекта управления (2) будут подаваться управляющие воздействия  $u_h^*(t) = u_h(x^*(t))$ ,  $t \geq 0$ .

Отсюда видно, что в конкретном процессе стабилизации обратная связь используется не полностью, нужны лишь её значения  $u_h^*(\tau) = u_h(x^*(\tau))$ ,  $\tau \in T_h$ , вдоль отдельной последовательности  $x^*(\tau)$ ,  $\tau \in T_h$ .

Функцию  $u_h^*(t)$ ,  $t \geq 0$ , назовем реализацией стабилизирующей обратной связи в конкретном процессе. Следовательно, для стабилизации системы (2) достаточно уметь вычислять значения реализации стабилизирующей обратной связи в реальном времени, т.е. в темпе поступления информации о текущих состояниях системы.

**Определение.** Устройство, которое на каждом промежутке  $[\tau, \tau + h]$ ,  $\tau \in T_h$ , способно вычислить значения  $u_h^*(\tau)$  за время  $s$  ( $0 < s < h$ ), назовем стабилизатором.

Таким образом, проблема стабилизации свелась к построению алгоритма работы стабилизатора. В основу алгоритма работы стабилизатора положен метод [1, 2] и некоторые факты теории устойчивости по Ляпунову [3, 4].

**Пример.** Пусть поведение неустойчивой динамической системы описывается уравнениями:

$$\dot{x}_1 = u, \quad \dot{x}_2 = -x_2; \quad x_1(0) = 10.741, \quad x_2(0) = 0.496276. \quad (6)$$

Следуя предложенному методу стабилизации, дискретный эквивалент системы (6) преобразуем к новым переменным:

$$\begin{aligned} y_1(\tau + h) &= y_1(\tau) + u_h(\tau), \quad y_2(\tau + h) = e^{-h} y_2(\tau); \\ y_1(0) &= 10.741, \quad y_2(0) = 0.496276; \quad \tau \in T_h = \{0, h, 2h, \dots\}. \end{aligned} \quad (7)$$

Результат работы стабилизатора (с периодом квантования  $h=1$ ) представлен на рис. 1, где изображена проекция на фазовую плоскость  $y_1 y_2$  траектории системы (7), порожденная управляющим воздействием

$$u_h^*(\tau) = \begin{cases} -1, & \tau \in \{0, 1, \dots, 9\}, \\ -0.741038, & \tau = 10, \\ 0, & \tau \in \{11, 12, \dots\}. \end{cases}$$



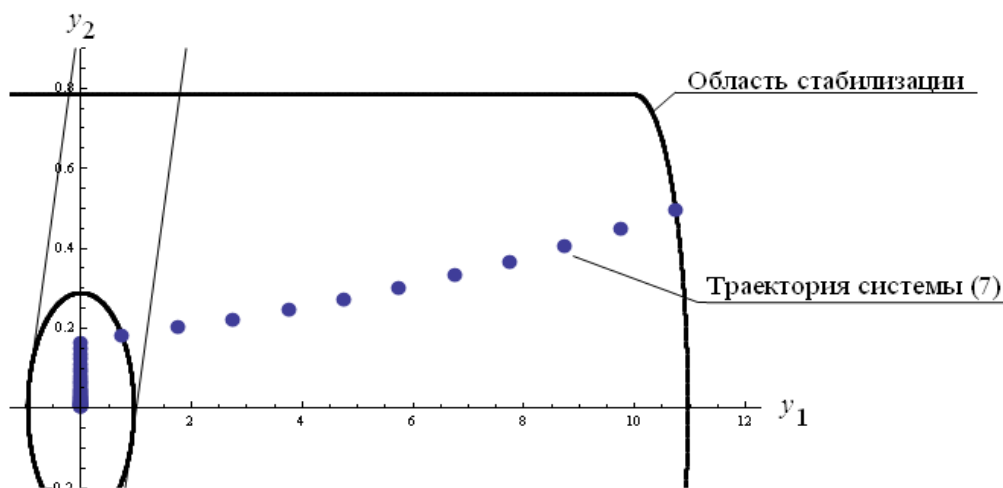


Рисунок 1

**Список цитированных источников**

1. Габасов, Р. К методам построения оптимальных стабилизаторов / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова // Прикладная математика и механика. – 1993. – Т. 57, Вып. 6. – С. 33 – 40.
2. Габасов, Р. Метод решения линейно-выпуклой задачи оптимального управления и стабилизация динамических систем в режиме реального времени / Р. Габасов, Ф.М. Кириллова, Т.Г. Хомицкая // Изв. ВУЗов. Математика. – 2004. – № 12(511). – С. 3 – 16.
3. Барбашин, Е.А. Введение в теорию устойчивости / Е.А. Барбашин – М.: Наука, 1967. – 223 с.
4. Бромберг, П.В. Матричные методы в теории релейного и импульсного регулирования / П.В. Бромберг – М.: Наука, 1967. – 324 с.

УДК 539.23

**ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОТОННЫХ НАНОПУЧКОВ****Чугунов С.В., Бас В.К.**

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
 Научный руководитель – Русаков К.И., к. ф.- м. н., доцент

В последнее время повысился интерес к фокусирующим свойствам диэлектрических сфер с диаметром порядка нескольких длин волн в видимом диапазоне света. Как было показано в работах [1-3], такие сферы могут генерировать пучок света с очень малым размером светового пятна и с углом расхождения, по крайней мере, в два раза меньшим, чем в пучке, полученном классической фокусировкой гауссова пучка в свободном пространстве.

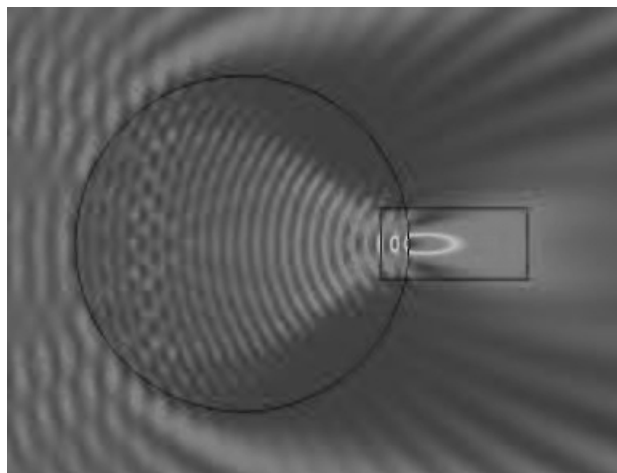
Эти пучки получили название "фотонные нанореактивные пучки" или "фотонные нанопучки". Они образуются в результате интерференции между падающей плоской волной и световым полем, рассеянным сферой или цилиндром. Нанореактивные пучки находят широкое применение при детектировании наноразмерных частиц, в усилении флуоресцирующих свойств, в фотонных волноводах с малыми потерями и в оптических устройствах хранения информации.

Распределение интенсивности в фотонном пучке может быть полностью рассчитано с помощью аналитического метода Ми, однако аналитический метод Ми в вычислительном отношении является довольно громоздким. Чтобы преодолеть данную проблему, нами был применен численный метод конечных элементов. Этот метод использовался

для изучения свойств нанопучков, таких как ширина пучка, его интенсивность в фокусе и угол расхождения, зависящих от изменяемых параметров установки (показателя преломления, длины падающей волны и диаметра сферы). Выбор двумерной модели, которая представляет из себя бесконечный цилиндр, позволил нам быстро изменять параметры системы и наблюдать распространение фотонного пучка.

На рисунке 1 показано распределение интенсивности фотонного нанопучка бесконечным цилиндром, рассчитанное методом конечных элементов в пакете COMSOL Multiphysics с использованием специально подобранной сетки для уменьшения области моделирования. Падающая слева плоская волна является линейно поляризованной в плоскости падения. В результате численного моделирования наблюдается образование системы дифракционных максимумов на теневой стороне цилиндра за счет интерференции падающей волны и поля, рассеянного цилиндром. Угловой спектральный анализ фотонных нанореактивных пучков выявил, что боковые компоненты пространственного распределения света сильнее рассеиваются, чем те, которые вносят основной вклад в конфигурацию фотонных нанопучков.

На рисунке 1 отчетливо виден основной главный максимум (фотонный нанореактивный пучок), причем его интенсивность на порядок выше интенсивности соседних максимумов. Кроме того, из рисунка 1 следует, что фотонный пучок практически без затухания распространяется на длину порядка 1 мкм, что невозможно без вклада максимумов высших порядков.



**Рисунок 1 – Графическое представление результатов расчета методом конечных элементов для распределения интенсивности плоской волны длиной 400 нм, сфокусированной бесконечно длинным цилиндром (диаметр 5,75 мкм). Интенсивность падающей волны составляет 1, максимальная интенсивность фотонного пучка равна 15,157**

Мы исследовали зависимость свойств нанопучка такой системы от варьируемых параметров, принимая во внимание, что в случае сферы интенсивность пучка значительно увеличивается [2]. Исходя из этого, мы оптимизировали размеры сфер, длины волн и показатели преломления, чтобы минимизировать полуширину фотонного нанопучка и одновременно повысить его мощность. Далее проводилось сравнение численных результатов с экспериментальными изображениями распределения интенсивности нанореактивного пучка при помощи недавно предложенной техники сканирующей конфокальной микроскопии.

В результате численного моделирования показано, что распределение рассеянного излучения существенно изменяется с изменением возбуждающей длины волны. Это по-

звоняет подобрать такие диаметры преломляющих цилиндров или сфер, при которых происходит усиление интенсивности его центрального максимума и уменьшение интенсивности смежных максимумов. Установлено, что ширина фотонного нанопучка колеблется вблизи величины равной 0,43 длины падающей световой волны в зависимости от параметров микросферы. Таким образом, можно подобрать оптимальный размер сферы, чтобы одновременно увеличить максимальную интенсивность центрального максимума, и уменьшить ширину фотонного нанопучка.

**Список цитированных источников**

1. Itagi, A.V. Optics of photonic nanojets / A.V. Itagi, W.A. Challener // J. Opt. Soc. Am. A. – 2005. – Vol.22, no.12. – P. 2847–2858.
2. Lecler, S. Properties of a three-dimensional photonic jet / S. Lecler, Y. Takakura, P. Meyrueis // Optics Letters. – 2005. – Vol. 30, no.19. – P. 2641–2643.
3. Gerlach, M. Nanojets and directional emission in symmetric photonic molecules / M. Gerlach, Y.P. Rakovich, J.F. Donegan // Optics Express. – 2007. – Vol. 15, no.25. – P. 17343–17350.

УДК 517.925

**МОДЕЛИРОВАНИЕ ПОИСКА РЕШЕНИЙ С ЗАДАНЫМИ ПРЕДЕЛЬНЫМИ СВОЙСТВАМИ У НОРМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА**

**Швычкина Е.Н.**

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Рассмотрим систему трех дифференциальных уравнений вида

$$\frac{dx_i}{dz} = \frac{\sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^{p_{i1}, p_{i2}, p_{i3}} P_{\tau_1, \tau_2, \tau_3}^{(i)} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}}{\sum_{\tau_1, \tau_2, \tau_3=0}^{q_{i1}, q_{i2}, q_{i3}} Q_{\tau_1, \tau_2, \tau_3}^{(i)} x_1^{\tau_1} x_2^{\tau_2} x_3^{\tau_3}} \quad (i = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где  $x_i(z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) – искомые функции,  $z$  – независимая комплекснозначная переменная;  $p_{ik}, q_{ik}$  ( $i, k = 1, 2, 3$ ) – целые неотрицательные числа, причем  $p_{i1} + p_{i2} + p_{i3} = p^{(i)}$ ,  $q_{i1} + q_{i2} + q_{i3} = q^{(i)}$ .

Заметим, что одновременно все коэффициенты многочленов  $P_{p^{(i)}}^{(i)}(x_1, x_2, x_3)$ ,  $Q_{q^{(i)}}^{(i)}(x_1, x_2, x_3)$  не должны быть тождественными нулями.

Для системы (1) ищутся решения  $x_i = x_i(z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ), обладающие бесконечными предельными свойствами

$$\begin{aligned} x_i(z) &\overset{\Gamma \ddot{E} \Gamma}{\underset{\ddagger}{\rightarrow}}(i = 1, 2, 3) \text{ при } z \overset{\Gamma \ddot{E} z_0}{\rightarrow} \\ x_i(z) &\overset{\Gamma \ddot{E} \Gamma}{\underset{\ddagger}{\rightarrow}}(i = 1, 2), \quad x_3 \rightarrow x_{30} \text{ при } z \overset{\Gamma \ddot{E} z_0}{\rightarrow} \\ x_i(z) &\overset{\Gamma \ddot{E} \Gamma}{\underset{\ddagger}{\rightarrow}} \quad x_2 \rightarrow x_{20}, \quad x_3 \rightarrow x_{30} \text{ при } z \overset{\Gamma \ddot{E} z_0}{\rightarrow} \end{aligned} \tag{2}$$

Вопросу существования и представления решений  $x_i = x_i(z)$  ( $i = 1, 2, 3$ ) со свойством (2) у нормальных систем трех дифференциальных уравнений посвящена работа [1]. Однако класс систем удовлетворяющих условиям, поставленным в работе [1], оказывается достаточно узким. Чтобы его расширить, применим следующий метод.

Введем замену

$$x_1 = \frac{1}{u^{\mu_1}}, x_2 = \frac{V_2}{u^{\mu_2}}, x_3 = \frac{V_3}{u^{\mu_3}}, \quad (3)$$

где  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  – натуральные числа. Замена (3), сведет систему к системе двух уравнений Брио и Буке, и одному уравнению, выражающему зависимость вида

$$\frac{dz}{du} = F(z, u).$$

Применяя метод, рассмотренный в [2], получим условия, гарантирующие существование решений системы (1), которые обладают предельными свойствами (2). Однако условия существования решений с заданными свойствами записываются, как правило, в таком виде, что требуется еще немало времени на их проверку даже для довольно простых систем. Используя возможности СКА *Mathematica* [3], приведем программный модуль, который находит решения обладающих заданными бесконечными предельными свойствами заданных дифференциальных систем.

### Пример 1.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_1}{dz} = \frac{x_1^3}{x_1 + x_2}, \quad \frac{dx_2}{dz} = \frac{2x_1^3 - x_1^2 x_2 - 2x_1^2}{2x_1 + 2x_3}, \quad \frac{dx_3}{dz} = \frac{2x_1^3 x_2 x_3 - x_1^4 x_3}{2(x_1^3 + x_1 x_2^2 - x_3)}. \quad (4)$$

Рассмотрим компьютерную реализацию приведенного метода. Определим для системы (4) значения  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$ , для нахождения которых приведем фрагмент кода:

```
pMax={};qMax={};
For[k=1,k<4,k++,deg=0;exp1={}; If[MatchQ[Numerator[sis[[k,2]]],x_+y_],
For[j=1,j<=Length[Numerator[sis[[k,2]]]],j++,deg=0;
exj=Exponent[Numerator[sis[[k,2]]][[j]],{x1[t],x2[t],x3[t]}//Flatten;
For[i=1,i<=Length[exj],i++,deg=deg+exj[[i]];exp1=Append[exp1,deg];
If[Max[exp1] <= exp1[[j]],INum_k=exj],
ex1=Exponent[Numerator[sis[[k,2]]],{x1[t],x2[t],x3[t]}//Flatten;
For[i=1,i<=Length[ex1],i++,deg=deg+ex1[[i]];exp1=Append[exp1,deg];INum_k=ex1];
pMax=Append[pMax,Max[exp1]];
s = {Sum_{i=1}^3 (INum[[i]] - IDen[[i]])\mu_i - \mu_1 - 1 == 0};
For[k=2,k<4,k++,s=Append[s, s = {Sum_{i=1}^3 (IDen[[i]] - INum[[i]])\mu_i + \mu_k + 1 + s[[1]] == 0}];
exp = Solve[s,{\mu_1, \mu_2, \mu_3}] // Flatten
{\mu_1 -> 1, \mu_2 -> 1, \mu_3 -> 1}.
```

Сделаем замену вида (3) и подставим в систему (4). Далее, применяя метод, рассмотренный в [2], получим однопараметрическое решение, которое обладает заданными бесконечными предельными свойствами (2):

$$x_1(\tau) = \frac{1}{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&,2]},$$

$$x_2(\tau) = -\frac{2}{5} - \frac{2}{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&,1]} - \frac{\alpha}{\sqrt{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&,1]}} - \frac{19}{75} \alpha \sqrt{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&,1]},$$

$$x_3(\tau) = \frac{25 - 3\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&1]}{25\sqrt{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&1]}}$$

где  $\tau \equiv z - z_0$  и

$$\psi(\tau, \alpha) = -140625\tau^2 + 281250\tau + (56250\tau - 140625)\tau^2 + (62500\alpha^2 - 56250)\tau^3 + (19000\alpha^2 - 5625)\tau^4 + 1444\alpha^2\tau^5.$$

Увидеть зависимость от параметра  $\alpha$  для действительной части функции  $x_1(\tau)$  (рис. 1) можно с помощью встроенного модуля *Manipulate*.

`Manipulate[Plot3D[Evaluate[Re[ $\frac{1}{\text{Root}[\psi(\tau, \alpha)\&2]}$ ]/.tau -> x + Iy]], {x, -12, 12}, {y, -12, 12}], {alpha, -5, 5}]`

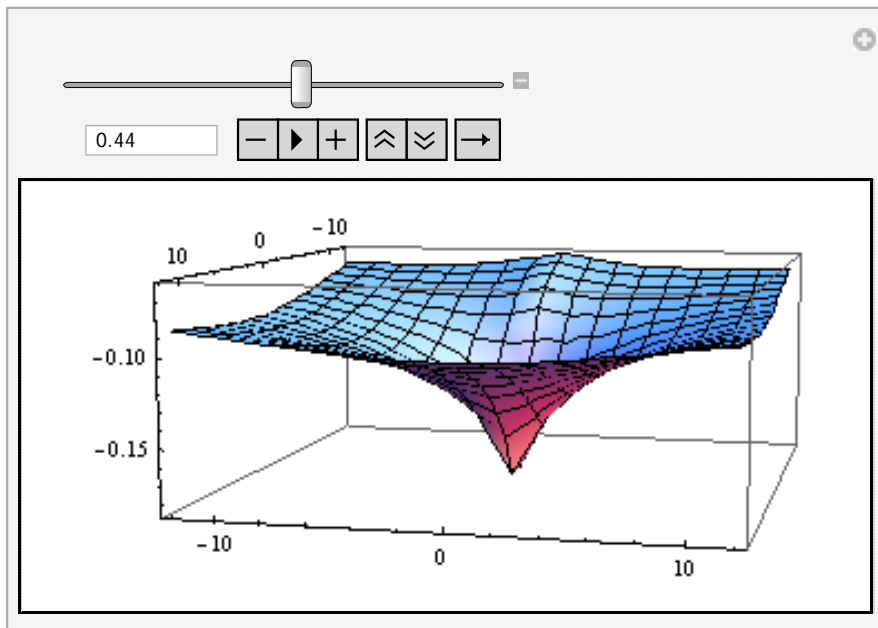


Рисунок 1 – Зависимость от параметра  $\alpha$  действительной части функции  $x_1(\tau)$

При различных значениях параметра  $\alpha$  возможно разложение функции  $x_1(\tau)$  в степенной ряд в окрестности точки  $\tau = 0$ . Например, при  $\alpha = 0$  получим ряд:

$$\frac{1}{\tau} + \frac{1}{5} - \frac{\tau}{25} + \frac{2\tau^2}{125} - \frac{\tau^3}{125} + \frac{14\tau^4}{3125} - \frac{42\tau^5}{15625} + O(\tau)^6,$$

который демонстрирует выполнение заданных предельных свойств (2) для функции  $x_1(\tau)$ , при  $\tau \equiv z - z_0$ .

**Список цитированных источников**

1. Чичурин А. В. О решениях систем с заданными предельными свойствами у частных классов нормальных дифференциальных систем с рациональными правыми частями / А. В. Чичурин // Вестн. Белорус. ун-та, Сер. 1: Физ. Мат. Мех. – 1992. – №2 – С. 62–66.
2. Shvychkina, H. About the Third Order Normal System of Differential Equations Having the Infinite Limit Properties of Its Solution // Computer Algebra Systems in Teaching and Research, Evolution, Control and Stability of Dynamical Systems, WSFiZ. – Siedlce, 2009. – P. 165–169.
3. Trott M. The Mathematica GuideBook for Symbolics. Springer Science+Business Media, Inc. – New York, 2006. – 1453 p.

УДК 517

## ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К СУММИРОВАНИЮ РЯДОВ

**Шошев Е.З.**

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест  
 Научный руководитель – Лебедь С.Ф., к. ф.- м. н., доцент

Методы операционного исчисления имеют широкое применение. В частности, они могут быть использованы для суммирования числовых и функциональных рядов.

Имеет место следующее утверждение.

**Теорема.** Пусть функция  $f(t)$  является оригиналом для  $F(p)$  (область аналитичности  $F(p): \operatorname{Re} p \geq k$ ), тогда сумма  $S$  ряда  $\sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n)$  вычисляется по формуле

$$S = (\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t) dt}{1 \mp e^{-t}}. \quad (1)$$

*Доказательство.* По определению изображения  $F(p) = \int_0^{+\infty} e^{-pt} f(t) dt$ . По свойству бесконечной убывающей геометрической прогрессии  $\frac{(\pm 1)^k e^{-kt}}{1 \mp e^{-t}} = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt}$ . С учетом этого

$$(\pm 1)^k \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t) dt}{1 \mp e^{-t}} = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n e^{-nt} dt = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt = \sum_{n=k}^{\infty} (\pm 1)^n F(n).$$

Что и требовалось доказать.

**Пример.** Используя формулу (1), вычислить сумму ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{(n^2+1)(n^2+2n+2)}$ .

**Решение.** Разложим общий член ряда на сумму простейших дробей методом неопределенных коэффициентов, получим  $F(n) = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{n^2+2n+2} = \frac{1}{n^2+1} - \frac{1}{(n+1)^2+1}$ .

Найдем оригинал полученного изображения  $f(t) = \sin t - e^{-t} \sin t = \sin t (1 - e^{-t})$ . Следовательно, по формуле (1) имеем:

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{+\infty} \frac{e^{-kt} f(t) dt}{1 - e^{-t}} dt = [k=1] = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} f(t) dt}{1 - e^{-t}} dt = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t} \sin t (1 - e^{-t})}{1 - e^{-t}} dt = \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt = \left[ \begin{array}{l} u = e^{-t} \quad du = -e^{-t} dt \\ dv = \sin t dt \quad v = -\cos t \end{array} \right] = -e^{-t} \cos t \Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} e^{-t} \cos t dt = \end{aligned}$$

$$= \left[ \begin{array}{l} u = e^{-t} \quad du = -e^{-t} dt \\ dv = \cos t dt \quad v = \sin t \end{array} \right] = -e^{-t} \cos t \Big|_0^{+\infty} - \left( e^{-t} \sin t \Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt \right)$$

В результате получим 
$$S = \int_0^{+\infty} e^{-t} \sin t dt = \frac{-e^{-t} \cos t - e^{-t} \sin t}{2} \Big|_0^{+\infty} = 0 - \frac{-1 - 0}{2} = \frac{1}{2}.$$

Определение. Производящей функцией последовательности  $\{a_k\}$  называется сумма

степенного ряда 
$$f_a(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k t^k.$$

**Теорема.** Пусть функция  $f(t)$  является оригиналом для  $F(p)$  (область аналитичности  $F(p): \operatorname{Re} p \geq 0$ ). Пусть, кроме того,  $\Phi(t, x)$  – производящая функция бесконечной последовательности функций  $\varphi_n(x)$  (то есть  $\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) t^n$ ). Тогда сумма  $S(x)$

сходящегося на  $[a, b]$  функционального ряда  $\sum_{n=0}^{\infty} F(n) \varphi_n(x)$  может быть найдена по

формуле

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t) dt. \tag{2}$$

*Доказательство.* Имеем:

$$\int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t) dt = \int_0^{+\infty} f(t) \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) e^{-nt} dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) \int_0^{+\infty} e^{-nt} f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(x) F(n) = S(x).$$

Что и требовалось доказать.

Пример. Используя формулу (2), с помощью подходящей производящей функции просуммировать ряд  $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}.$

Решение. Для общего члена ряда имеем:  $F(n) = \frac{1}{2n+1}, \varphi_n(x) = (-1)^n x^{2n+1},$

$f(t) = \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}t}.$  Производящая функция будет равна

$$\Phi(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x \cdot x^{2n} \cdot t^n = \frac{(-1)^n x}{1 + x^2 t}.$$

Тогда:

$$S(x) = \int_0^{+\infty} \Phi(e^{-t}, x) f(t) dt = \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} \frac{x}{1 + x^2 e^{-t}} e^{-\frac{1}{2}t} dt =$$

$$= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}t}}{1 + (x e^{-1/2t})^2} dt = - \int_0^{+\infty} \frac{d \left( x e^{-\frac{1}{2}t} \right)}{1 + (x e^{-1/2t})^2} dt = - \operatorname{arctg} \left( x e^{-\frac{1}{2}t} \right) \Bigg|_{t=0}^{t=x} = \operatorname{arctg} x.$$

**Список цитированных источников**

1. Власова, Е.А. Ряды: учеб. для вузов / Под ред. В.С. Зарубина, А.П. Крищенко. – М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2000. – 612 с.
2. Сборник задач по математике для вузов. Специальные разделы математического анализа. – М.: Наука. Главная редакция математической литературы, 1981. – 368 с.

УДК 517.988

## СПЕКТРАЛЬНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ КВАЗИОБРАТНОГО ОПЕРАТОРА ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

**Шнак Д.С.**

УО «Гродненский государственный университет им. Я. Купалы», г. Гродно  
Научный руководитель – Вувуникян Ю.М., д. ф.-м. н., доцент

Пусть оператор  $A$  является оператором Вольтерра-Винера с обобщенными импульсными характеристиками  $a_n$ , т.е.

$$Ax = \sum_{n=1}^{+\infty} S_n (a_n * x^{\otimes n}).$$

Оператор  $B$  – квазиобратный эволюционный оператор степени  $r$  к оператору  $A$ , т.е.

$$By = \sum_{m=1}^r S_m (b_m * y^{\otimes m}).$$

При этом при  $C = B \circ A$  и  $F = A \circ B$  имеем  $C = I + \sum_{n=r+1}^{+\infty} C_n$  и  $F = I + \sum_{n=r+1}^{+\infty} F_n$ .

Для нахождения спектральных характеристик оператора  $B$  воспользуемся формулой

$$\begin{aligned} \tilde{b}_n(\lambda) \tilde{a}_1^{\otimes n}(\lambda) = & - \sum_{m=1}^{n-1} \sum_{n_1+n_2+\dots+n_m=n} \tilde{b}_m(\lambda_1 + \dots + \lambda_{n_1}, \lambda_{n_1+1} + \dots + \lambda_{n_1+n_2}, \dots \\ & \dots, \lambda_{n_1+\dots+n_{m-1}+1} + \dots + \lambda_n) \tilde{a}_{n_1}(\lambda_1, \dots, \lambda_{n_1}) \dots \tilde{a}_{n_m}(\lambda_{n_1+n_2+\dots+n_{m-1}+1}, \dots, \lambda_n), \end{aligned} \quad (1)$$

где  $\tilde{a}_1(\lambda)$  – линейная часть нелинейного уравнения.

По формуле (1):

- при  $n = 1$  спектральная характеристика  $\tilde{b}_1(\lambda_1)$  равна  $\tilde{b}_1(\lambda_1) = \frac{1}{\tilde{a}_1(\lambda_1)}$ ;

- при  $n = 2$  спектральная характеристика  $\tilde{b}_2(\lambda)$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$ , равна

$$\tilde{b}_2(\lambda_1, \lambda_2) = - \frac{\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) \tilde{b}_1(\lambda_1) \tilde{b}_1(\lambda_2)}{\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2)} = - \frac{\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\tilde{a}_1(\lambda_1) \tilde{a}_1(\lambda_2) \tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2)};$$



- при  $n = 3$  спектральная характеристика  $\tilde{b}_3(\lambda)$ , где  $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ , равна

$$\tilde{b}_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = -\frac{1}{\tilde{a}_1(\lambda_1)\tilde{a}_1(\lambda_2)\tilde{a}_1(\lambda_3)\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)} \times$$

$$\times \left( \tilde{a}_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) + \frac{\tilde{a}_2(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_3)\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2)}{\tilde{a}_1(\lambda_1 + \lambda_2)} + \frac{\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2 + \lambda_3)\tilde{a}_2(\lambda_2, \lambda_3)}{\tilde{a}_1(\lambda_2 + \lambda_3)} \right);$$

и так далее.

Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение третьего порядка

$$x''' + ax'' + bx' + cx + dx^2 = f(t). \quad (2)$$

Уравнению (2) поставим в соответствие квадратичный эволюционный оператор  $Ax = a_1 * x + S_2(a_2 * x^{\otimes 2})$  с обобщенными импульсными характеристиками  $a_1 = \delta''' + a\delta'' + b\delta' + c\delta$ ,  $a_2 = d\delta^{\otimes 2}$ .

Используя преобразование Лапласа обобщенной функции  $\tilde{x}(\lambda) = \langle x(t), e^{-\lambda t} \rangle$ , где  $\lambda t = \lambda_1 t_1 + \dots + \lambda_n t_n$ , найдем спектральные характеристики оператора  $A$ :

$$\tilde{a}_1(\lambda) = \lambda^3 + a\lambda^2 + b\lambda + c;$$

$$\tilde{a}_2(\lambda_1, \lambda_2) = d;$$

$$\tilde{a}_n(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n) = 0 \quad \forall n \geq 3.$$

Теперь вычислим спектральные характеристики для квазиобратного эволюционного оператора  $B$ , используя найденные спектральные характеристики оператора  $A$ .

$$\tilde{b}_1(\lambda_1) = \frac{1}{\lambda_1^3 + a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c};$$

$$\tilde{b}_2(\lambda_1, \lambda_2) = -\frac{d}{(\lambda_1^3 + a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)(\lambda_2^3 + a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c)} \times$$

$$\times \frac{d}{\left( (\lambda_1 + \lambda_2)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c \right)};$$

$$\tilde{b}_3(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \frac{d^2}{(\lambda_1^3 + a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)(\lambda_2^3 + a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c)(\lambda_3^3 + a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c)} \times$$

$$\times \frac{d^2}{\left( (\lambda_1 + \lambda_2)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c \right)} \times$$

$$\times \frac{d^2}{\left( (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + c \right)} +$$

$$+ \frac{d^2}{(\lambda_1^3 + a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c)(\lambda_2^3 + a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c)(\lambda_3^3 + a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c)} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \frac{d^2}{\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + c\right)} \times \\
& \times \frac{d^2}{\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + c\right)}; \\
\tilde{b}_4(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4) = & \frac{-d^3}{\left(\lambda_1^3 + a\lambda_1^2 + b\lambda_1 + c\right)\left(\lambda_2^3 + a\lambda_2^2 + b\lambda_2 + c\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left(\lambda_3^3 + a\lambda_3^2 + b\lambda_3 + c\right)\left(\lambda_4^3 + a\lambda_4^2 + b\lambda_4 + c\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + c\right)} \times \\
& \times \left( \frac{1}{\left((\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^3 + a(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 + b(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + c\right)} \times \right. \\
& \times \frac{1}{\left((\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^3 + a(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 + b(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + c\right)} + \\
& + \frac{1}{\left((\lambda_2 + \lambda_3)^3 + a(\lambda_2 + \lambda_3)^2 + b(\lambda_2 + \lambda_3) + c\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left((\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^3 + a(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4)^2 + b(\lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4) + c\right)} + \\
& + \frac{1}{\left((\lambda_2 + \lambda_3)^3 + a(\lambda_2 + \lambda_3)^2 + b(\lambda_2 + \lambda_3) + c\right)} \times \\
& \times \frac{1}{\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + c\right)} + \\
& + \frac{1}{\left((\lambda_1 + \lambda_2)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c\right)\left((\lambda_3 + \lambda_4)^3 + a(\lambda_3 + \lambda_4)^2 + b(\lambda_3 + \lambda_4) + c\right)} + \\
& + \frac{1}{\left((\lambda_1 + \lambda_2)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2) + c\right)} \times \\
& \left. \times \frac{1}{\left((\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^3 + a(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3)^2 + b(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + c\right)} \right).
\end{aligned}$$

### Список цитированных источников

1. Вувуникян, Ю.М. Эволюционные операторы с обобщёнными импульсными и спектральными характеристиками: монография / Ю.М. Вувуникян. – Гродно: ГрГУ, 2007. – 224 с.
2. Вувуникян, Ю.М. Теорема о нелинейных квазиобратных операторах для класса квадратичных эволюционных операторов / Ю.М. Вувуникян, Д.С. Шпак // Вестник ГрГУ, Серия 2, Математика. Физика. Информатика, вычислит. техника и управление. – 2011. – № 2(111). – С. 57–62.

## СОДЕРЖАНИЕ

ЭЛЕКТРОННЫЕ ИНФОРМАЦИОННЫЕ ТЕХНОЛОГИИ  
В НАУЧНЫХ И ПРИКЛАДНЫХ РАЗРАБОТКАХ

<b>Аброськин А.В.</b> Эвристические методы раскрытия материала в среде распределенных вычислений.....	3
<b>Басин В.И.</b> Сайт для организации олимпиад по спортивному программированию.....	4
<b>Богданов А.Н., Савельева Н.В.</b> Информационная система сопровождения учебного процесса для авторских курсов.....	7
<b>Бокатюк С.С.</b> Автоматизация последовательной декомпозиции конечных автоматов.....	9
<b>Габрусевич О.В.</b> Моделирование зависимости оптимального уровня лимита денежной наличности от значений трансфертной ставки.....	12
<b>Грязных П.А., Дядищев А.О.</b> Комплексы системы тестирования E-JUDGE.....	14
<b>Данилевич Е.В., Крупская Е.И.</b> Проблемы индексирования динамического контента популярными поисковыми системами.....	15
<b>Жавнерко Е.В., Барановский А.Т.</b> Разработка Интернет-портала, поддерживающего научные, коммуникационные и организационные взаимодействия.....	17
<b>Запотьлок А.Ф.</b> Модели сигналов и функциональных устройств для исследования систем обработки данных.....	19
<b>Кисель Н.В., Кисло Д.А.</b> Формулирование требований на создание средств автоматизации управления перевозками грузов.....	21
<b>Касперович Ю.А.</b> Информационные корпоративные системы.....	23
<b>Клышевич В.С.</b> О возможностях API модулей Интернет-портала при разработке клиентского приложения.....	26
<b>Ковалев С.Г., Бобров Д.В., Петров П.В., Кольчевский Н.Н.</b> X3m.cms среда разработки сайта www.Rfe.by.....	27
<b>Коваленко В.Ю.</b> Обеспечение повышенной надежности программного обеспечения встраиваемых систем на базе ОС GNU/Linux.....	30
<b>Кондратьев А. П.</b> Продвижение бизнеса в интернете с помощью автоматизированной биржи рекламных сообщений.....	33
<b>Конончук А.Н.</b> Разработка внутрикорпоративного портала на SharePoint 2010.....	35
<b>Кот О.В.</b> Реоптимизация решений эвклидовых задач коммивояжера методом эластичных сетей.....	37
<b>Котов Д.С.</b> Использование вычислительной техники для расчета и визуализации зон заражения в изменяющихся метеорологических условиях.....	39
<b>Кофанов В.А.</b> Автоматизация этапа подготовки исходных данных для компьютерной программы «ТВиНД».....	42
<b>Крощенко А.А.</b> Система электронного документооборота «Сигма».....	44
<b>Лисица Е.В., Яцков Н.Н., Апанасович Т.В., Ри Х., Апанасович В.В.</b> Разработка метода оценки формы границ сегментированных объектов по люминесцентным изображениям живых клеток.....	46
<b>Магуйло В.С., Аверина И.Н.</b> Автоматизация управленческого учета арендных отношений.....	48
<b>Медведюк О.И., Сидорук О.В.</b> Формирование модели-эталона в части обеспечения произвольных входов и мониторинга процессов.....	51
<b>Мешечек Н.Н.</b> Распределенная система визуализации схем дорожно-транспортных происшествий с портативным терминалом.....	52

<b>Мисейко А.П., Ракитский А.В.</b> Разработка структуры базы данных и концепции ИС «Учет НИРС вуза» .....	54
<b>Морозова В.С., Стальбовская Н.И.</b> Сравнительная характеристика семейства ядер Cortex-M.....	56
<b>Неверович Ж.В.</b> Инструментальная поддержка количественной оценки потенциальных рисков IT-проектов.....	58
<b>Никонюк А.Н., Осмоловец А.М.</b> Алгоритмы построения тестовых спецификаций систем .....	61
<b>Охримчук В.В.</b> Оптимизация вывода текстовой информации стандартных форм web-приложений (на примере системы управления «Учет военнообязанных») .....	63
<b>Ракович О.Г.</b> Из практики применения технических средств обучения при изучении основ информационных технологий.....	65
<b>Савлевич Ю.И.</b> Применение стеганографии для защиты авторского права фотографий в формате JPEG .....	67
<b>Садко В.И., Слюсарева М.А.</b> Разработка концепции АРМ для исследования деятельности предприятия по перевозке грузов.....	70
<b>Самосюк А.А.</b> Базовая инфраструктура виртуального управления проектами.....	72
<b>Силаева З.Н., Силаев Н.В.</b> Средства динамической геометрии в процессе обучения ..	73
<b>Синица А.А.</b> Содержание методической подготовки учителя физики к использованию НИТ в условиях уровневой дифференциации .....	75
<b>Тарендь М.В.</b> Организация учебного процесса университета с использованием сетевых образовательных технологий .....	77
<b>Усиков А.В.</b> О некоторых подходах к разработке универсального клиента для веб-систем, связанных со сбором и анализом информации.....	79
<b>Чепонас А.С., Савельева Н.В.</b> Усиление безопасности сайтов посредством настройки сетевых сервисов и минимизации ошибок программирования.....	80
<b>Шитиков А.В.</b> Программная система тестирования эффективности оконных интерфейсов .....	83
<b>Шумель В.В.</b> Разработка программного обеспечения автооператора с ручным управлением .....	86

## **АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ**

<b>Актанорович С.В., Лещев А.Е.</b> К анализу чувствительности параметрических задач оптимизации .....	89
<b>Бобкович О.И., Ковш В.А.</b> Об аналитическом и численном исследовании дифференциального уравнения типа Риккати второго порядка и системы лотке-Вольтера .....	90
<b>Велесевич А.А., Марзан Е.И.</b> Моделирование решений уравнений гиперболического и параболического типов с использованием анимационных возможностей системы Mathematica.....	92
<b>Волотовская Ю.Н.</b> Численное решение задачи капиллярной гидростатики о равновесных формах жидкости, выдавливаемой из капилляра .....	94
<b>Гречко О.Г., Ершова Е.П.</b> Нелокальный вариант метода минимальных невязок для решения нелинейных уравнений .....	97
<b>Дерачиц Н.А.</b> Останов по соседним приближениям в методе итераций неявного типа решения некорректно поставленных задач.....	99
<b>Дерачиц Н.А.</b> Правило останова по невязке в неявной итерационной процедуре решения некорректных задач.....	101

<b>Жук Е.А., Мадорский В.М.</b> Нелокальный градиентный вариант метода Канторовича-Красносельского для решения нелинейных уравнений .....	103
<b>Зданевич М.В., Улезло Р.Ю.</b> Решение операторных уравнений первого рода при помощи итерационных процедур с апостериорным выбором числа итераций .....	105
<b>Каримова Т.И.</b> О существовании и единственности решения системы неавтономных стохастических дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных случайных процессов .....	108
<b>Киселева Н.Н.</b> Проникновение звукового поля через плоский проницаемый слой .....	111
<b>Комарчук А.В.</b> Неявный метод итераций для решения уравнений 1 рода .....	113
<b>Крищик Н.А.</b> Программная реализация алгоритма построения квадратурной формулы для вычисления аппроксимирующих вейвлет-коэффициентов .....	115
<b>Курак А.Н.</b> Решение задачи Дуффинга с недифференцируемым оператором .....	117
<b>Латий О.О., Гладкий И.И.</b> О сходимости решения одной системы стохастических дифференциальных уравнений .....	120
<b>Лебедь С.Ф.</b> Конформные отображения многосвязных областей .....	123
<b>Логвинович В.И.</b> Численное исследование и визуализация решений линейного дифференциального уравнения с шестью особыми точками .....	125
<b>Мороз Ю.А.</b> Сходимость в энергетической норме неявного метода итераций решения некорректных задач .....	126
<b>Новикова Т.А., Мовчан В.О.</b> Возможности свободной математической программы MAXIMA .....	127
<b>Осоприлко О.Н.</b> функция гринна задачи дирихле для бигармонического уравнения для шара в $\mathbb{R}^3$ .....	130
<b>Павловская А.Т.</b> Критерии полной управляемости и конструктивной идентифицируемости для линейных систем нейтрального типа со многими запаздываниями ....	133
<b>Поляков Д.Б.</b> Применение разностных схем в модифицированных инвариантах Римана для начально-краевых задач газовой динамики .....	135
<b>Пролиско Е.Е.</b> Применение имитационного моделирования для оценки качества инференции, полученной методом бутстрапирования .....	137
<b>Стасюк Т.Г.</b> Вычисление моментов модифицированной периодограммы многомерного временного ряда .....	140
<b>Ступкин А.А., Харитонюк А.А.</b> Нелокальный вариант градиентного метода решения операторного уравнения с недифференцируемым оператором .....	142
<b>Таныгина А.Н.</b> Обобщенный метод Ньютона–Канторовича для нелинейных операторных уравнений .....	144
<b>Урбан О.И.</b> К вопросу управления линейными автономными дифференциально-разностными системами нейтрального типа .....	146
<b>Федченко Т.В.</b> Решение дифференциальных уравнений и систем в современных математических пакетах .....	148
<b>Хомицкая Т.Г.</b> Об одном методе стабилизации линейных систем неуправляемых по Калману .....	150
<b>Чугунов С.В., Бас В.К.</b> Численное моделирование фотонных нанопучков .....	153
<b>Швычкина Е.Н.</b> Моделирование поиска решений с заданными предельными свойствами у нормальных дифференциальных систем третьего порядка .....	155
<b>Шошев Е.З.</b> Приложения операционного исчисления к суммированию рядов .....	158
<b>Шпак Д.С.</b> Спектральные характеристики квазиобратного оператора для дифференциального уравнения третьего порядка .....	160

# СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ И ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ

Материалы VII Республиканской научной конференции  
молодых ученых и студентов  
24–26 ноября 2011 года

Часть II

Ответственный за выпуск: **Махнист Л.П.**

Редактор: **Строкач Т.В.**

Компьютерная вёрстка: **Кармаш Е.Л.**

Корректор: **Никитчик Е.В.**

---

ISBN 978-985-493-206-4



9 789854 932064

Лицензия № 02330/0549435 от 08.04.2009 г.

Подписано к печати 14.11.2011 г.

Формат 60×84 1/16. Бумага «Снегурочка».

Гарнитура «Arial Narrow». Усл. п. л. 9,6. Уч.-изд. л. 10,4.

Тираж 95 экз. Заказ № 1037.

Отпечатано на ризографе Учреждения образования  
«Брестский государственный технический университет»  
224017, Брест, ул. Московская, 267.