МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ИНФОРМАТИКИ И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

по дисциплине «Информатика» для студентов строительных специальностей очной формы обучения третьего семестра

издание 3-е, дополненное и переработанное

Строительный факультет

Группа ______________________

Фамилия ____________________

Имя _________________________

Отчество ____________________

Вариант _____________________

м/тел. +375 (___) ____-___-___

Брест 2019

УДК 004

Практикум предназначен для студентов второго курса строительного факультета, изучающих дисциплину «Информатика». В него входят задания для лабораторных работ и задания для их защиты. В теоретической части изложены методические рекомендации по работе с MathCAD и веб-приложением Google Таблицы из пакета корпоративных веб-приложений G Suite for Education.

Составители: В.А. Кофанов, к.т.н., доцент
Т.Г. Хомицкая, ст. преподаватель
С.В. Сидак, ассистент

Рецензенты: доцент кафедры прикладной математики и информатики БрГУ имени А.С. Пушкина, доцент, к.ф.-м.н. О.В. Матысик

Общие указания

Практикум предназначен для организации самостоятельной, практической и лабораторной работы студентов в третьем семестре изучения дисциплины «Информатика».

Перед началом работы необходимо привести информацию на титульном листе, то есть должны быть указаны данные ее владельца (Ф.И.О., группа, номер мобильного телефона).

На текущей странице в блок «Индивидуальное задание» необходимо вклеить листок с вариантами заданий, полученный у преподавателя. Специальный блок «Условие» на странице с лабораторной работой заполняется простым переписыванием условия задачи с бланка индивидуального задания.

При выполнении лабораторных работ результаты вычислений заносятся в отчет в том же виде, в котором они отображаются на экране монитора. Ведение записей выполняется четко и разборчиво шариковой ручкой (блок-схемы – карандашом). Неправильные (ошибочные) записи на страницах практикума необходимо исправлять с использованием корректирующих средств (корректирующие ленты, штрих-корректоры и т.п.).

Каждая лабораторная работа считается выполненной только при наличии отметки преподавателя о ее защите, подтвержденной его подписью (личной печатью) на странице 4. Данные из этого листа служат основанием для допуска к итоговым испытаниям (зачету, экзамену).

Индивидуальное задание

место для индивидуального задания

Отметки о защите лабораторных работ

№	Наименование работы	Защита	Примечание
1	Лабораторная работа №1		
2	Лабораторная работа №2 (1,2)		
3	Лабораторная работа №3 (1,2)		
4	Лабораторная работа №4		
5	Лабораторная работа №5		
6	Лабораторная работа №6		

Итог работы в семестре:

Все лабораторные работы выполнены в полном объеме.

____
(дата, подпись)

Методические указания к выполнению лабораторных работ

ВЕБ-ПРИЛОЖЕНИЕ GOOGLE ТАБЛИЦЫ

Решение экстремальной задачи

Метод наименьших квадратов в Google Таблицах можно реализовать путем решения экстремальной задачи с использованием дополнения **Solver** (рисунок 1). Дополнение **Solver** необходимо предварительно установить (подключить к веб-приложению) через пункт главного меню **Дополнения / Установить дополнения**. Для корректной работы дополнения **Solver** также необходимо установить «точку» в качестве разделителя дробной и целой части дробного числа. Замена разделителя осуществляется путем изменения региональных настроек Google Таблицы с помощью пункта главного меню **Файл / Настройки таблицы** (Россия – «запятая», Соединенные Штаты – «точка»).

Исходными (экспериментальными) данными являются, например, пять точек с координатами X (**A2:A6**) и Y (**B2:B6**), а также вид аппроксимирующей функции – парабола ($a \cdot x^2 + b \cdot x + c$).

Порядок определения коэффициентов аппроксимирующей функции a, b и c следующий:

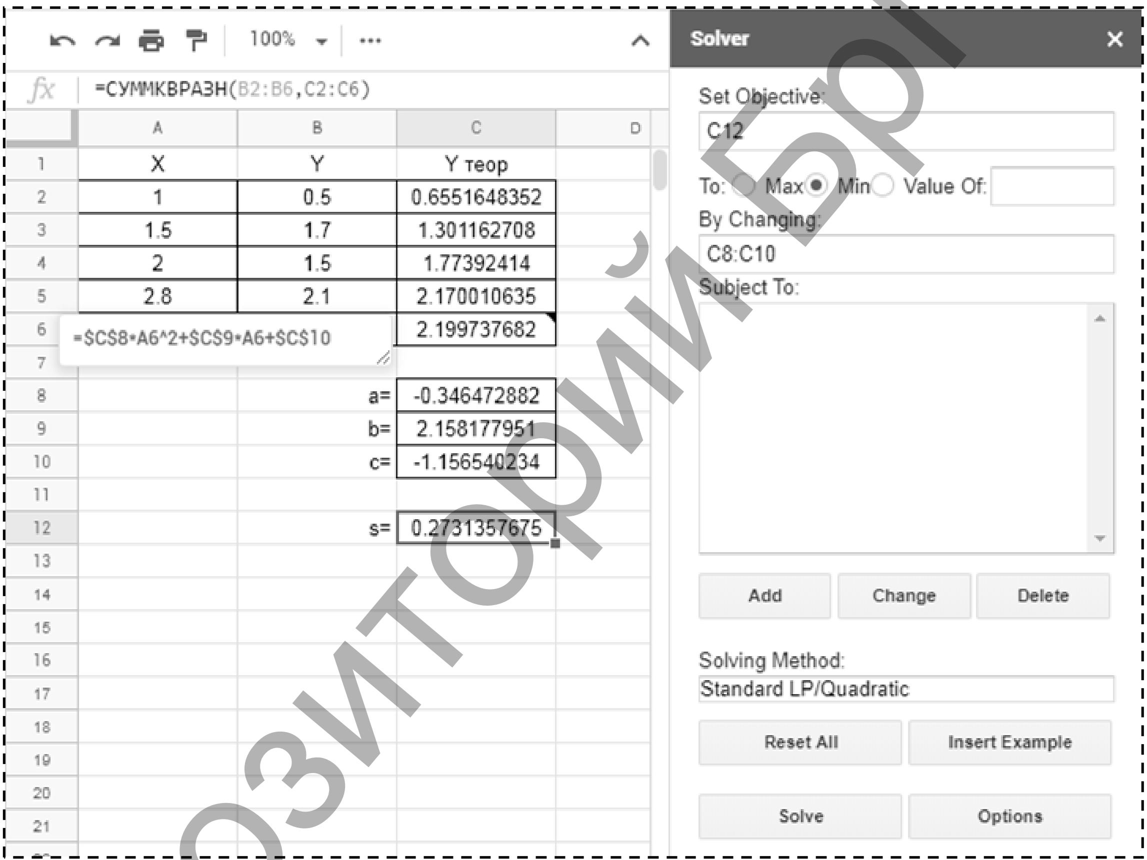


Рисунок 1 – Решение экстремальной задачи

1. Задаем начальные приближения для коэффициентов аппроксимирующей функции a (**C8**), b (**C9**) и c (**C10**), например, равными нулю.

2. Для каждой точки определяем теоретическое значение $Y_{теор}$ (**C2:C6**) на основе заданной функции и коэффициентов a, b и c.

3. В ячейке **C12** найдем сумму квадратов разностей между экспериментальными (**B2:B6**) и теоретическими (**C2:C6**) значениями Y с помощью функции

СУММКВРАЗН(массив_x; массив_y),

где **массив_x** – массив Y; **массив_y** – массив $Y_{теор}$.

4. Запускаем дополнение **Solver** через пункт главного меню **Дополнения**. В настройках дополнения указываем целевую ячейку (**Set Objective**) **C12**, содержащую функцию **СУММКВРАЗН**, направление поиска (**Min**), изменяемые ячейки (**By Changing**) **C8:C10**, содержащие значения коэффициентов аппроксимирующей функции, и метод расчета (**Solving Method**) – **Standard LP/Quadratic**.

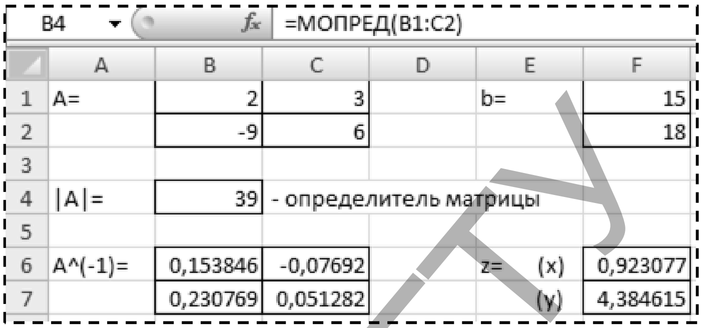
После завершения работы дополнения **Solver** ячейки **C8:C10** будут содержать значения коэффициентов a, b и c выбранной аппроксимирующей функции.

Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы

Чтобы решить систему линейных алгебраических уравнений, имеющих единственное решение, с помощью обратной матрицы необходимо в начале на рабочем листе сформировать массив **A**, содержащий коэффициенты при неизвестных и вектор-столбец **b**, содержащий свободные члены уравнений.

Затем необходимо обратную матрицу **A** (**A**$^{-1}$) умножить на вектор **b**. Для нахождения обратной матрицы можно использовать встроенную функцию **МОБР(массив)**, а для скалярного перемножения матриц ($\mathbf{A^{-1}} \cdot \mathbf{b}$) – функцию **МУМНОЖ(массив_1;массив_2)**. Проделаем эти операции на рабочем листе Google Таблицы (рисунок 2).

Ячейку **B4** используем для вычисления определителя матрицы **A** (**=МОПРЕД(B1:C2)**). Если определитель матрицы **A** не равен нулю (матрица невырожденная), значит существует ей обратная матрица.



B4 | =МОПРЕД(B1:C2)

	A	B	C	D	E	F
1	A=	2	3		b=	15
2		-9	6			18
3						
4	|A|=	39	- определитель матрицы			
5						
6	A^(-1)=	0,153846	-0,07692		z= (x)	0,923077
7		0,230769	0,051282		(y)	4,384615

Рисунок 2 – Решение СЛАУ матричным способом

Диапазон **B6:C7=МОБР(B1:C2)** содержит элементы обратной матрицы **A**, а диапазон **F6:F7 =МУМНОЖ(B6:C7;F1:F2)** – результат решения СЛАУ.

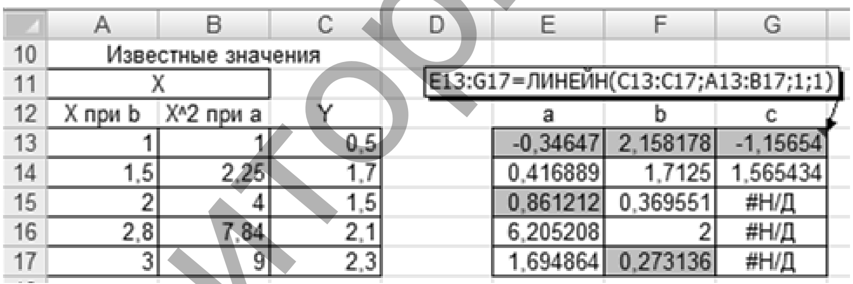
Аппроксимация с помощью встроенной функции ЛИНЕЙН

Метод наименьших квадратов в Google Таблицах можно реализовать с помощью встроенной функции (рисунок 3)

ЛИНЕЙН(**известные_значения_y**; **известные_значения_x**; **конст**; **статистика**),

где **известные_значения_y** – массив Y;
известные_значения_x – массив X;
конст – логическое значение, которое указывает, требуется ли, чтобы постоянный член был равен 0;
статистика – логическое значение, которое указывает, требуется ли статистика по регрессии.

В качестве исходных данных примем данные, приведенные на рисунке 1.



	A	B	C	D	E	F	G
10	Известные значения						
11	X				E13:G17=ЛИНЕЙН(C13:C17;A13:B17;1;1)		
12	X при b	X^2 при a	Y		a	b	c
13	1	1	0,5		-0,34647	2,158178	-1,15654
14	1,5	2,25	1,7		0,416889	1,7125	1,565434
15	2	4	1,5		0,861212	0,369551	#Н/Д
16	2,8	7,84	2,1		6,205208	2	#Н/Д
17	3	9	2,3		1,694864	0,273136	#Н/Д

Рисунок 3 – Схема проверки гипотезы о нормальном распределении

Перед использованием функции **ЛИНЕЙН** необходимо преобразовать исходные данные в соответствии с видом функции. В нашей функции ($a \cdot x^2 + b \cdot x + c$) аргумент x присутствует в двух слагаемых, поэтому вместо значений X будем задавать массив, состоящий из двух столбцов (**A13:B17**). В первом столбце (**A13:A17**) содержаться значения X, находящиеся в нашей функции при коэффициенте b. Во втором столбце (**B13:B17**) содержаться значения X^2, находящиеся при коэффициенте a.

Решение задачи линейного программирования с помощью дополнения Solver

Линейное программирование – область математики, разрабатывающая теорию и численные методы решения задач нахождения экстремума (максимума или минимума) линейной функции многих переменных при наличии линейных ограничений, т. е. линейных равенств или неравенств, связывающих эти переменные. К задачам линейного программирования сводится широкий круг вопросов планирования экономических процессов, где ставится задача поиска наилучшего (оптимального) решения.

Общая задача линейного программирования (ЗЛП) состоит в нахождении экстремального значения (максимума или минимума) линейной функции.

Пусть дана задача линейного программирования с двумя переменными.

$$Z(x, y) = 2x + y \to extr \ (\max \ \textit{или} \ \min)$$

$$\begin{cases} 3x + 4y \geq 10; \\ 2x - y \leq 9; \\ x - 3y \geq -4; \\ x \geq 0; \ y \geq 0. \end{cases}$$

В общем случае для решения задачи необходимо:

1. Создать форму для ввода условий задачи.

В ячейки **B4** и **C4** вносим коэффициенты при неизвестных из целевой функции. Диапазон ячеек **B7:C9** заполняем коэффициентами при неизвестных из левых частей неравенств (**Subject To**), а диапазон **F7:F9** – известными значениями из правых частей неравенств (рисунок 4).

2. Задать начальные приближения для неизвестных в ячейках, в которые будет помещен результат решения задачи (**By Changing**).

На рабочем листе Google Таблицы (рисунок 4) используем две ячейки **B3** и **C3**, которые до запуска дополнения **Solver** будут содержать начальные приближения переменных *x* и *y* (здесь, например, мы задали их равными нулю).

	A	B	C	D	E	F
1		Переменные				
2		x	y			
3	значения	0	0	ЦФ	*направление*	
4	коэффициенты	2	1	0	max	
5						
6		Ограничения		*левая часть*	*знак*	*правая часть*
7	коэф. огр. 1	3	4	0	>=	10
8	коэф. огр. 2	2	-1	0	<=	9
9	коэф. огр. 3	1	-3	0	>=	-4

Рисунок 4 – Исходные данные для решения ЗЛП

D
ЦФ
=СУММПРОИЗВ(B4:C4,$B$3:$C$3)
левая часть
=СУММПРОИЗВ(B7:C7,$B$3:$C$3)
=СУММПРОИЗВ(B8:C8,$B$3:$C$3)
=СУММПРОИЗВ(B9:C9,$B$3:$C$3)

Рисунок 5 – Формулы из рисунка 4

3. Ввести зависимость для целевой функции и ограничений.

В ячейку **D4** вносим формулу для определения целевой функции, заменяя в ней неизвестные переменные ссылками на ячейки, в которых содержаться их начальные значения. Такую же операцию выполняем и для ячеек **D7**, **D8** и **D9**, которые содержат формулы, определяющие значения левых частей неравенств (рисунок 5).

4. Указать параметры на боковой панели дополнения **Solver** и вывести результаты.

Заполняем соответствующие поля боковой панели дополнения **Solver**: указываем целевую ячейку, направление поиска, изменяемые ячейки и ограничения (рисунок 6). В качестве метода для поиска решения выберем **Standard LP/Quadratic**. По завершении процедуры поиска ячейки **B3** и **C3** будут содержать решение (x=6.2 и y=3.4) ЗЛП (рисунок 7).

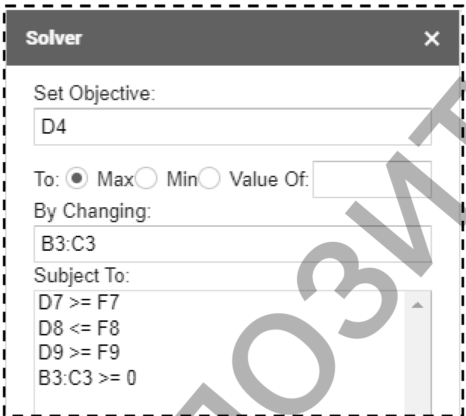


Рисунок 6 – Фрагмент боковой панели дополнения **Solver**

	A	B	C	D
1		Переменные		
2		x	y	
3	значения	6.2	3.4	ЦФ
4	коэффициенты	2	1	15.8
5				
6		Ограничения		*левая часть*
7	коэф. огр. 1	3	4	32.2
8	коэф. огр. 2	2	-1	9
9	коэф. огр. 3	1	-3	-4

Рисунок 7 – Результат решения ЗЛП

Решение транспортной задачи с помощью дополнения Solver

Допустим, составляется план поставок строительного песка на объекты строительной организации на очередную рабочую смену. Поставки планируется осуществлять с двух карьеров *A1* и *A2*, способных производить по $a1$=267 м^3 (**D3**) и $a2$=133 м^3 (**D4**) в смену соответственно. Заявки поступили с двух объектов *B1* и *B2* в количествах b1=144 м^3 (**B5**) и b2=256 м^3 (**C5**) соответственно. Известна стоимость *c* ден. ед. (**B3:C4**) за перевозку одного м^3 песка с каждого карьера на каждый объект. Например, стоимость перевозки одного м^3 песка с карьера A1 на объект B2 – 5 ден. ед.

	A	B	C	D
1		Объекты		
2	Карьеры	B1	B2	предложение
3	A1	3	5	267
4	A2	7	4	133
5	спрос	144	256	

Рисунок 8 – Исходные данные для решения транспортной задачи

Требуется составить план перевозок, который полностью удовлетворяет спрос объектов в строительном песке, а суммарные издержки за его перевозку при этом минимизируются.

Порядок решения транспортной задачи совпадает, в общем, с порядком решения, описанным в предыдущем примере с некоторыми особенностями.

1. Все исходные данные представлены на рисунке 8. Т.к. суммарный объем спроса равен суммарному объему предложения, то задача является закрытой, и нет необходимости в дополнительных исходных данных. В случае если объемы спроса и предложения не равны друг другу, то задача является открытой, которую необходимо преобразовать в закрытую. Подробнее о таком преобразовании смотри далее теоретический материал.

2. На рабочем листе Google Таблицы (рисунок 9) определяем диапазон ячеек **B9:C10**, которые до запуска дополнения **Solver** будут содержать начальные приближения для неизвестных, обозначающих количество м^3 песка, перевозимого с каждого карьера на каждый объект.

	A	B	C	D
7		Объекты		
8	Карьеры	B1	B2	предложение
9	A1	0	0	=СУММ(B9:C9)
10	A2	0	0	=СУММ(B10:C10)
11	спрос	=СУММ(B9:B10)	=СУММ(C9:C10)	
12				ЦФ
13				=СУММПРОИЗВ(B3:C4;B9:C10)

Рисунок 9 – Формулы для решения транспортной задачи

	A	B	C	D
7		Объекты		
8	Карьеры	B1	B2	предложение
9	A1	144	123	267
10	A2	0	133	133
11	спрос	144	256	
12				ЦФ
13				1579

Рисунок 10 – Результат решения задачи

3. В ячейку **D13** вносим формулу для определения целевой функции, которая выражает суммарные издержки на транспортировку всего объема песка. В диапазоне ячеек **D9:D10** определяем суммарный объем перевозок песка с каждого карьера, а в диапазоне **B11:C11** – суммарный объем перевозок песка на каждый объект (рисунок 9).

4. Заполняем соответствующие поля боковой панели дополнения **Solver**: указываем целевую ячейку, направление поиска (минимальное значение), изменяемые ячейки, ограничения и метод поиска решения – **Standard LP/Quadratic** (рисунок 11).

По завершении процедуры поиска диапазон ячеек **B9:C10** будет содержать решение задачи (рисунок 10). Из ответа следует, что с карьера A1 перевезут 144 м^3 песка на объект B1 и 123 м^3 песка – на объект B2. С карьера A2 доставят песок только на объект B2 в объеме 133 м^3.

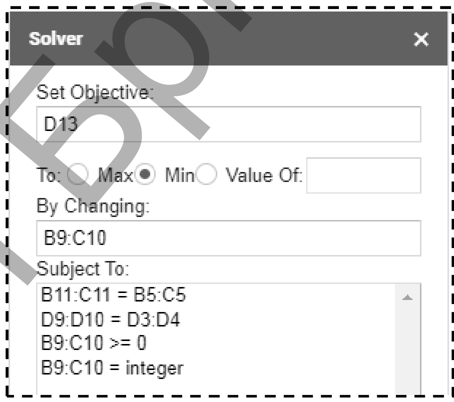


Рисунок 11 – Фрагменты боковой панели дополнения **Solver**

Решение задачи о раскрое с помощью дополнения Solver

Предположим, что на предприятии имеются стальные бруски длиной *L*=7.9 м (**K2**), из которых необходимо получить 38 (**K6**) заготовок *p1* длиной *d1*=1.4 м (**B6**), 34 (**K7**) заготовки *p2* длиной *d2*=2.9 м (**B7**) и 35 (**K8**) заготовок *p3* длиной *d3*=3.2 м (**B8**). Требуется составить план разрезки брусков по критерию минимума отходов, обеспечивающий выполнение запроса по заготовкам.

fx =СУММПРОИЗВ(C10:H10,C2:H2)+СУММПРОИЗВ(I6:I8-K6:K8,B6:B8)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			x1	x2	x3	x4	x5	x6		Длина бруска	
2	кол-во брусков		0	0	0	0	0	0		L=	7.9
3											
4					Варианты						
5	Заготовки		1	2	3	4	5	6	левая часть	знак	правая часть
6	d1=	1.4	5	3	3	1	1	1	0	>=	38
7	d2=	2.9	0	1	0	2	1	0	0	>=	34
8	d3=	3.2	0	0	1	0	1	2	0	>=	35
9											
10	отходы		0.9	0.8	0.5	0.7	0.4	0.1	ЦФ	-263.8	-> min

Рисунок 12 – Исходные данные для решения задачи о раскрое

1. Все исходные данные представлены на рисунке **Ошибка! Источник ссылки не найден.** Дополнительно сформировано 6 возможных вариантов *x1..x6* разрезки брусков на заготовки. Например, по четвертому варианту разрезки бруска выйдет одна заготовка *d1* и две заготовки *d2*. Подробнее о составлении возможных вариантов разрезки смотри далее в теоретическом материале.

2. На рабочем листе Google Таблицы (рисунок 12) определяем диапазон ячеек **C2:H2**, которые до запуска дополнения **Solver** будут содержать начальные приближения для неизвестных, обозначающих количество использованных брусков по каждому варианту разрезки.

3. В диапазоне ячеек **C10:H10** определяем отходы от каждого варианта раскроя по формуле, например,

C10 = $K$2-СУММПРОИЗВ(C6:C8;$B$6:$B$8)

В диапазоне ячеек **I6:I8** определяем суммарное количество каждого типа заготовок, полученных от всех вариантов раскроя. Например, формула в ячейке

I6 = СУММПРОИЗВ($C$2:$H$2;C6:H6).

Формулу в целевой ячейке формируем таким образом, чтобы ее результат отражал суммарное количество (длину) всех отходов, включающих в себя лишние заготовки.

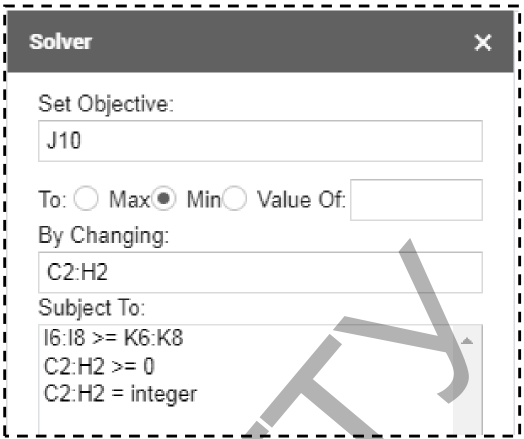


Рисунок 13 – Фрагмент диалогового окна **Поиск решения** для задачи о раскрое

J10 = СУММПРОИЗВ(C10:H10;C2:H2)+СУММПРОИЗВ(I6:I8-K6:K8;B6:B8)

4. Заполняем соответствующие поля боковой панели дополнения **Solver**: указываем целевую ячейку, направление поиска, изменяемые ячейки, ограничения и метод поиска решения – **Standard LP/Quadratic** (рисунок 13).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1			*x1*	*x2*	*x3*	*x4*	*x5*	*x6*		Длина бруска	
2	кол-во брусков		1	0	0	17	0	18		L=	7.9
3											
4					Варианты						
5	Заготовки		1	2	3	4	5	6	*левая часть*	*знак*	*правая часть*
6	d1=	1.4	5	3	3	1	1	1	40	>=	38
7	d2=	2.9	0	1	0	2	1	0	34	>=	34
8	d3=	3.2	0	0	1	0	1	2	36	>=	35
9											
10	отходы		0.9	0.8	0.5	0.7	0.4	0.1	ЦФ	20.6	-> min

Рисунок 14 – Фрагмент диалогового окна **Поиск решения**

По завершении процедуры поиска решения диапазон ячеек **C2:H2** будет содержать решение задачи (рисунок 14). Данный ответ отражает следующее: необходимо раскроить по первому варианту 1 брусок, по четвертому – 17 брусков и по шестому –18 брусков. Суммарная длина отходов равна 20.6 метра, в которые входят две лишние заготовки *d1* и одна заготовка *d2*.

Решение экстремальной задачи

Метод наименьших квадратов в Mathcad можно реализовать путем решения экстремальной задачи с использованием функции **Minimize** (рисунок 15).

Исходными данными (экспериментальными) являются пять точек, координаты которых занесем в вектора X и Y, а также вид аппроксимирующей функции – парабола ($a \cdot x^2 + b \cdot x + c$).

Порядок определения коэффициентов аппроксимирующей функции *a*, *b* и *c* следующий:

1. Задаем аппроксимирующую функцию φ.
2. Задаем функцию Φ, определяющую сумму квадратов разностей.
3. Задаем начальное приближение для неизвестных коэффициентов *a*, *b* и *c*.
4. Используя функцию **Minimize**, определяем значения коэффициентов *a*, *b* и *c*.

$$X := (1\ \ 1.5\ \ 2\ \ 2.8\ \ 3)^T \qquad Y := (0.5\ \ 1.7\ \ 1.5\ \ 2.1\ \ 2.3)^T$$

$$\varphi(x,a,b,c) := a \cdot x^2 + b \cdot x + c$$

$$\Phi(a,b,c) := \sum_{i=0}^{4} \left(\varphi\left(X_i,a,b,c\right) - Y_i\right)^2$$

$$a := 0 \qquad b := 0 \qquad c := 0$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \mathrm{Minimize}(\Phi,a,b,c) \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.34647 \\ 2.15818 \\ -1.15654 \end{pmatrix}$$

Рисунок 15 – Решение экстремальной задачи

Решение СЛАУ с помощью обратной матрицы

Для определения неизвестных коэффициентов функции в соответствии с методом наименьших квадратов можно составить систему линейных алгебраических уравнений. В общем случае система линейных алгебраических уравнений – это система из *m* линейных алгебраических уравнений с *n* неизвестными. Пример получения такой системы уравнений рассмотрен далее в теоретическом материале. Решить систему уравнений можно, например, с помощью обратной матрицы (рисунок 16).

$$X := (1\ \ 1.5\ \ 2\ \ 2.8\ \ 3)^T \qquad Y := (0.5\ \ 1.7\ \ 1.5\ \ 2.1\ \ 2.3)^T \qquad \mathrm{ORIGIN} := 1 \qquad n := \mathrm{length}(X) \qquad n = 5$$

$$A := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i\right)^4 & \sum_{i=1}^{n} \left(X_i\right)^3 & \sum_{i=1}^{n} \left(X_i\right)^2 \\ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i\right)^3 & \sum_{i=1}^{n} \left(X_i\right)^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i \\ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i\right)^2 & \sum_{i=1}^{n} X_i & \sum_{i=1}^{n} 1 \end{bmatrix} \qquad b := \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \left[\left(X_i\right)^2 \cdot Y_i\right] \\ \sum_{i=1}^{n} \left(X_i \cdot Y_i\right) \\ \sum_{i=1}^{n} Y_i \end{bmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := A^{-1} \cdot b \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.34647 \\ 2.15818 \\ -1.15654 \end{pmatrix}$$

Рисунок 16 – Пример решения СЛАУ с помощью обратной матрицы

Аппроксимация с помощью встроенной функции linfit

Метод наименьших квадратов в Mathcad можно реализовать также с помощью встроенной функции

linfit(vx,vy,F),

где **vx** – вектор значений аргумента;
vy – вектор значений функции;
F – пользовательская векторная функция скалярного аргумента.

В качестве исходных данных примем данные, приведенные на рисунке 17.

$$X := (1 \;\; 1.5 \;\; 2 \;\; 2.8 \;\; 3)^T \qquad Y := (0.5 \;\; 1.7 \;\; 1.5 \;\; 2.1 \;\; 2.3)^T$$

$$F(x) := \begin{pmatrix} x^2 \\ x \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \mathrm{linfit}(X, Y, F) \qquad \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.34647 \\ 2.15818 \\ -1.15654 \end{pmatrix}$$

Рисунок 17 – Пример решения СЛАУ с помощью обратной матрицы

Из решения на рисунке 17 видно, что найденные значения коэффициентов *a*, *b* и *c* совпадают со значениями, показанными на рисунках 15 и 16.

Решение задачи линейного программирования

При решении задач линейного программирования для поиска условного экстремума функции нескольких переменных в MathCAD можно использовать блок **Given..Minimize** (**Given..Maximize**). Его использование схоже с использованием блока **Given..Find**, только вместо команды **Find** используем команду **Minimize** (**Maximize**, в которой указываем имя функции и необходимые ее аргументы.

Условие	Решение (листинг MathCAD)
$Z(x,y) = 2x + y \to \max$ $\begin{cases} 3x + 4y \ge 10; \\ 2x - y \le 9; \\ x - 3y \ge -4; \\ x \ge 0;\; y \ge 0. \end{cases}$	$Z(x,y) := 2 \cdot x + y \qquad x := 0 \quad y := 0$ given $3 \cdot x + 4 \cdot y \ge 10 \quad 2 \cdot x - y \le 9 \quad x - 3 \cdot y \ge -4 \quad x \ge 0 \quad y \ge 0$ $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} := \mathrm{maximize}(Z, x, y) = \begin{pmatrix} 6.2 \\ 3.4 \end{pmatrix} \qquad Z(x,y) = 15.8$

Результат совпадает с решением в Google Таблицах, показанным на рисунке 7.

Графическое решение задачи линейного программирования

Под графическим решением задачи линейного программирования будем понимать подбор неизвестного параметра вручную таким образом, чтобы на графике целевая функция касалась области допустимых ее значений.

Ограничение 1 $\quad f1(x) := \dfrac{10 - 3 \cdot x}{4}$

Ограничение 2 $\quad f2(x) := -9 + 2 \cdot x$

Ограничение 3 $\quad f3(x) := \dfrac{4 + x}{3}$

Целевая функция $\quad fZ(x, C) := C - 2 \cdot x$

Подбираемый вручную параметр

$C := 16$

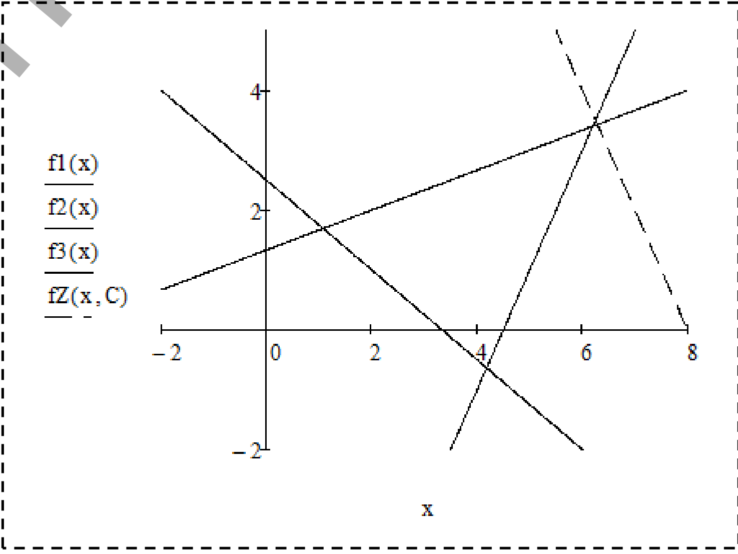


Рисунок 18 – Графическое решение задачи линейного программирования, показанной на рисунке 7.

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Метод наименьших квадратов

Суть метода наименьших квадратов заключается в нахождении коэффициентов функции $\varphi(x,\, a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_m)$, при которых функция $\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ принимает наименьшее значение, т.е.

$$\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=0}^{n} (\varphi(x_i,\, a_0,\, a_1,\, \ldots,\, a_m) - y_i)^2 \to \min ,$$

где x_i и y_i – заданные (известные) координаты точек.

Требуется дать приближенное аналитическое описание зависимости, т.е. подобрать функцию $\varphi(x)$ такую, которая аппроксимировала бы на отрезке $[x_0; x_n]$ заданную отдельными экспериментальными значениями y_i функцию $f(x)$.

Решая поставленную задачу приравняем к нулю частные производные минимизируемой функции $\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ по переменным $a_0, a_1, \ldots, a_m$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m)}{\partial a_0} = 0; \\ \dfrac{\partial \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m)}{\partial a_1} = 0; \\ \ldots \\ \dfrac{\partial \Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m)}{\partial a_m} = 0. \end{cases}$$

В результате получим систему:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=0}^{n} (\varphi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i) \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_0}\right|_{x=x_i} = 0; \\ \sum\limits_{i=0}^{n} (\varphi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i) \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_1}\right|_{x=x_i} = 0; \\ \ldots \\ \sum\limits_{i=0}^{n} (\varphi(x_i, a_0, a_1, \ldots, a_m) - y_i) \left.\dfrac{\partial \varphi}{\partial a_m}\right|_{x=x_i} = 0. \end{cases}$$

Решив систему, найдем оптимальный набор параметров $a_0^*,\, a_1^*,\, \ldots,\, a_m^*$.

Пример.

Пусть для заданной таблицы значений необходимо определить параметры квадратичной зависимости

$$\varphi(x, a, b, c) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c .$$

Тогда функция $\Phi(a_0, a_1, \ldots, a_m)$ примет вид

$$\Phi(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} ((a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c\ ) - y_i)^2 \to \min .$$

Частные производные функции по параметрам равны:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a} = x^2; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial b} = x; \quad \frac{\partial \varphi}{\partial c} = 1 .$$

Составим систему линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n} \left[((a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c) - y_i) \cdot x_i^2\right] = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[((a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c) - y_i) \cdot x_i\right] = 0 \\ \sum\limits_{i=1}^{n} \left[((a \cdot x_i^2 + b \cdot x_i + c) - y_i) \cdot 1\right] = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i \cdot x_i^2\right) \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum\limits_{i=1}^{n} x_i = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(y_i \cdot x_i\right) \\ a\sum\limits_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum\limits_{i=1}^{n} x_i + c\sum\limits_{i=1}^{n} 1 = \sum\limits_{i=1}^{n} y_i \end{cases} .$$

Решая СЛАУ, находим a,b и c.

Далее выполняем оценку полученной функции по:

– остаткам

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi(x_i))^2 = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i{}^2 ;$$

– коэффициенту детерминации

$$R^2 = 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \varphi(x_i))^2}{\sum_{i=1}^{n} (y_i - \overline{y})^2}, \text{ где } \overline{y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i .$$

Графический метод решения задачи линейного программирования (ЗЛП)

Дана задача линейного программирования с двумя переменными:

$$Z(x,y) = 2x + y \to extr \ (\max \ \textit{или} \ \min)$$

$$\begin{cases} 3x + 4y \ge 10; \\ 2x - y \le 9; \\ x - 3y \ge -4; \\ x \ge 0;\ y \ge 0. \end{cases}$$

Необходимо определить экстремальное значение функции. Для достижения этой цели выполним следующие действия.

1. Построим область допустимых значений (ОДЗ).

Каждое из пяти ограничений графически представляет собой прямую (рисунок 19), которая делит все координатное пространство на две части: одна часть содержит ОДЗ функции, вторая – нет. Координатное пространство, находящееся на пересечении пяти таких областей, будет являться ОДЗ функции. ОДЗ может быть в виде: неограниченной области, ограниченной области, отрезка или точки.

В нашем случае областью допустимых значений является четырехугольник ABCD.

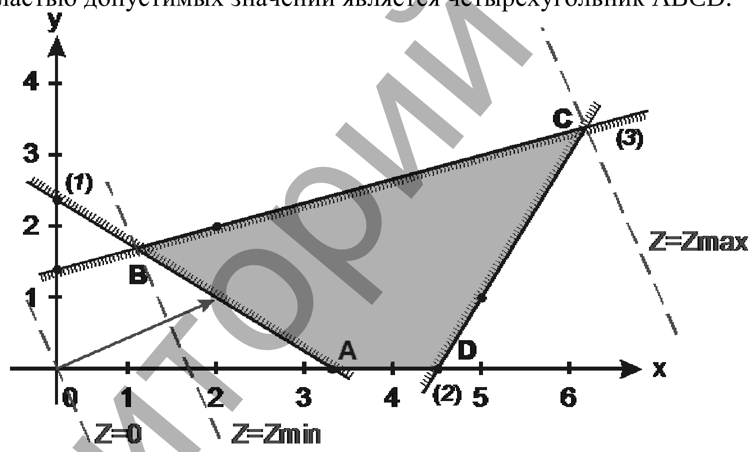


Рисунок 19 – Графическое решение задачи линейного программирования, показанной на рисунке 18

2. Построим вектор наискорейшего возрастания целевой функции (ЦФ).

Вектор указывает направление наискорейшего возрастания функции, а противоположный ему – направление наискорейшего убывания. Величина вектора равна производной функции в этом направлении:

$$gradF = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial F}{\partial x} \\ \dfrac{\partial F}{\partial y} \end{pmatrix}, \text{ в нашем случае } gradF = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

3. Проводим произвольную линию уровня, проходящую через ОДЗ.

Прямая, перпендикулярная градиенту, является линией уровня целевой функции и поэтому во всех своих точках принимает одно и тоже значение. Приравнивая целевую функцию к постоянной *C*, а затем меняя ее, получим семейство прямых, каждая из которых является линией уровня, которые обладают свойством: при смещении в одну сторону уровень только возрастает, а в другую – только убывает.

4. Перемещаем линию уровня.

При решении задачи на максимум линию уровня перемещаем в направлении градиента. При решении задачи на минимум линию уровня перемещаем в антиградиентном направлении. Линию уровня в обоих случаях перемещают до тех пор, пока она не коснется ОДЗ в крайнем (последнем) положении. Возможны следующие случаи. (1) Крайнее положение линии уровня представляет собой вершину многоугольника, координаты которой и есть *единственное решение ЗЛП*. Значение *C*, при котором получено крайнее положение линии уровня, является экстремальным значением ЦФ ЗЛП. (2) ЗЛП имеет *бесконечное множество решений*, если линия уровня в своем крайнем положении лежит на стороне многоугольника. Тогда координаты любой точки, лежащей на стороне многоугольника, и есть решение ЗЛП. (3) Если при перемещении линии уровня невозможно получить крайнее положение, то *ЗЛП не имеет решения*, т.к. ЦФ неограниченно возрастает (или убывает). В нашем случае максимум функции достигается в точке С, а минимум – в точке В.

5. Определяем экстремальное значение функции.

Определить экстремальное значение функции можно в MathCAD с использованием блока **Given..Minimize** (**Given..Maximize**) или в Google Таблицах с помощью дополнения **Solver**.

Задача о раскрое материалов

Сущность задачи об оптимальном раскрое состоит в разработке таких технологически допустимых планов раскроя, при которых получается необходимый комплект заготовок, а отходы по площади, весу или стоимости сводятся к минимуму.

Предположим, что на предприятии имеются стальные бруски длиной L=7.9 м, из которых необходимо получить 38 заготовок p_1 длиной d_1=1.4 м, 34 заготовки p_2 длиной d_2=2.9 м и 35 заготовок p_3 длиной d_3=3.2 м. Требуется составить возможные варианты разреза бруска и определить величину отходов для каждого из вариантов, а также привести описание математической модели для определения количества брусков по каждому варианту разреза, чтобы удовлетворить спрос в заготовках при минимальных отходах.

1. Определение рациональных способов раскроя материала.

В задачах оптимального раскроя рассматриваются так называемые рациональные (оптимальные по Парето) способы раскроя. Предполагается, что из единицы материала можно изготовить заготовки нескольких видов. Способ раскроя единицы материала называется *рациональным* (*оптимальным по Парето*), если увеличение числа заготовок одного вида возможно только за счет сокращения числа заготовок другого вида.

Пусть i – индекс вида заготовки, i = 1..m; v – индекс способа раскроя единицы материала, v = 1..s; a_{iv} – количество (целое число) заготовок вида i, полученных при раскрое единицы материала v-м способом.

Приведенное определение рационального способа раскроя может быть формализовано следующим образом. Способ раскроя k называется *рациональным* (*оптимальным по Парето*), если для любого другого способа раскроя v из соотношений $a_{iv} > a_{ik}$, i = 1..m, следуют соотношения $a_{iv} = a_{ik}$, i = 1..m.

вариант		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
d1=	1,4	5	~~4~~	3	3	~~2~~	~~2~~	1	1	1	~~0~~	~~0~~	~~0~~
d2=	2,9	0	~~0~~	1	0	~~1~~	~~0~~	2	1	0	~~2~~	~~1~~	~~0~~
d3=	3,2	0	~~0~~	0	1	~~0~~	~~1~~	0	1	2	~~0~~	~~1~~	~~2~~
отходы		0,9	~~2,3~~	0,8	0,5	~~2,2~~	~~1,9~~	0,7	0,4	0,1	~~2,1~~	~~1,8~~	~~1,5~~
			(1)			(3)	(4)				(7)	(8)	(9)

Тогда количество отходов при v способе раскроя материала:

$$c_k = L - \sum_{i=1}^{m}\left(a_{ik} \cdot d_i\right),$$

где k = 1..n, где n – общее число рациональных способов раскроя.

2. Определение интенсивности использования рациональных способов раскроя.

Для определения интенсивности составим математическое описание исследуемого процесса.

а) переменные: x_k – количество брусков ($x_k \geq 0$, x_k – целые), полученных по варианту k.

б) целевая функция: $c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \ldots + c_n \cdot x_n$ – общая сумма остатков, которая по условию задачи должна быть минимальна

$$\sum_{k=1}^{n}\left(c_k \cdot x_k\right) \to \min,$$

где $c_k \cdot x_k$ – сумма остатков от разрезки брусков по варианту k.

в) ограничения: $a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \ldots + a_{in} \cdot x_n$ – общее количество заготовок длины d_i после разреза всех брусков должно быть не менее заданного по условию задачи количества p_i

$$\sum_{k=1}^{n}\left(a_{i,k} \cdot x_k\right) \geq p_i,$$

где $a_{ik} \cdot x_k$ – количество заготовок длины d_i от разрезки брусков по варианту k.

Если количество полученных заготовок превысит требуемое, то лишние заготовки будут считаться отходами. Тогда целевая функция примет следующий вид

$$\sum_{k=1}^{n}(c_k \cdot x_k) + \sum_{i=1}^{m}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}(a_{i,k} \cdot x_k) - p_i\right) \cdot d_i\right) \to \min$$

В итоге, математическая модель (в скалярной форме) для выбранного варианта будет следующей

$$0.9 \cdot x_1 + 0.8 \cdot x_2 + 0.5 \cdot x_3 + 0.7 \cdot x_4 + 0.4 \cdot x_5 + 0.1 \cdot x_6 + (5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 + x_5 + x_6 - 38) \cdot 1.4 +$$
$$+ (x_2 + 2 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 - 34) \cdot 2.9 + (x_3 + x_5 + 2 \cdot x_6 - 35) \cdot 3.2 \to \min$$

$$\begin{cases} 5 \cdot x_1 + 3 \cdot x_2 + 3 \cdot x_3 + x_4 + x_5 + x_6 \geq 38; \\ x_2 + 2 \cdot x_4 + 5 \cdot x_5 \geq 34; \\ x_3 + x_5 + 2 \cdot x_6 \geq 35; \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0; x_6 \geq 0; \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 - \text{целые}. \end{cases}$$

3. Определяем экстремальное значение функции. Определить экстремальное значение функции можно в Google Таблицах с помощью дополнения **Solver**.

Транспортная задача

Допустим, составляется план поставок строительного песка на объекты строительной организации на очередную рабочую смену. Поставки планируется осуществлять с m=2 карьеров *A1* и *A2*, способных производить по a_1=267 м^3 и a_2=133 м^3 в смену соответственно. Заявки поступили с n=2 объектов *B1* и *B2* в количествах b_1=144 м^3 и b_2=256 м^3 соответственно. Известна стоимость c ден. ед. за перевозку одного м^3 песка с каждого карьера на каждый объект ($c_{1,1}$=3, $c_{1,2}$=5, $c_{2,1}$=7, $c_{2,2}$=4).

Требуется составить план перевозок, который полностью удовлетворяет спрос объектов в строительном песке, а суммарные издержки за его перевозку при этом минимизируются.

В суммарные издержки как правило входят издержки от перевозки песка с карьеров на объекты, а также издержки, связанные с затратами на выработку, на недопоставку или избыток объемов песка.

Различают две модели транспортной задачи: **открытая** и **закрытая**. Модель транспортной задачи называют **закрытой**, если суммарный объем груза, имеющегося у поставщиков, равен суммарному спросу потребителей, т.е. выполняется равенство

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Построим математическую модель задачи.

а) переменные: x_{ij} (i = 1..m, j = 1..n) – объем песка, перевозимого с карьера A_i на объект B_j. Объем перевозимого песка есть натуральное число.

б) целевая функция: суммарные затраты на транспортировку продукции должны быть минимальны.

$$Z = Z_T = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \to \min$$

где ($c_{ij} \cdot x_{ij}$) – стоимость перевозки песка с карьера A_i на объект B_j.

в) ограничения: объем перевезенного песка с каждого карьера равен объему его производства и одновременно объем перевезенного песка на каждый объект равен объему его потребления, т.е.

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i , \; \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j .$$

В нашем случае математическая модель в скалярной форме примет вид:

$$Z = Z_T = 3 \cdot x_{1,1} + 5 \cdot x_{1,2} + 7 \cdot x_{2,1} + 4 \cdot x_{2,2} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} = 267; \quad x_{1,1} + x_{2,1} = 144; \quad x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2} \geq 0; \\ x_{2,1} + x_{2,2} = 133; \quad x_{1,2} + x_{2,2} = 256; \quad x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2} - \textit{целые}. \end{cases}$$

Модель транспортной задачи называют **открытой**, если выполняется одно из условий:

$$\sum_{i=1}^{m} a_i < \sum_{j=1}^{n} b_j \;\text{ или }\; \sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{n} b_j .$$

Для разрешимости транспортной задачи с открытой моделью необходимо преобразовывать ее в закрытую, путем ввода фиктивного поставщика A_{m+1}, способного производить

$$a_{m+1} = \sum_{j=1}^{n} b_j - \sum_{i=1}^{m} a_i;\ c_{m+1,\,j} = 0,\ j = \overline{1,n};$$

либо фиктивного потребителя B_{n+1}, способного принять

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j;\ c_{i,n+1} = 0,\ i = \overline{1,m}.$$

Рассмотрим два варианта открытой задачи путем умышленного изменения объема производства на карьере А1. В первом случае объем производства будет равен 207 м^3 (добавляем фиктивный карьер), а во втором – 307 м^3 (добавляем фиктивный объект).

	A	B	C	D
1		Объекты		
2	Карьеры	B1	B2	предложение
3	A1	3	5	207
4	A2	7	4	133
5	ф A3	0	0	60
6	спрос	144	256	

Рисунок 20 – Транспортная задача с фиктивным поставщиком

	A	B	C	D	E
1			Объекты		
2	Карьеры	B1	B2	ф B3	предложение
3	A1	3	5	0	307
4	A2	7	4	0	133
5	спрос	144	256	40	

Рисунок 21 – Транспортная задача с фиктивным потребителем

На рисунке 20 для трансформации открытой транспортной задачи в закрытую добавлен фиктивный карьер А3 с объемом производства 60 м^3. На рисунке 21 добавлен фиктивный объект В3 с объемом потребления 40 м^3. В обоих вариантах стоимость транспортировки единицы объема песка от фиктивного поставщика или к фиктивному потребителю равна нулю.

В связи с добавлением фиктивного (несуществующего) поставщика (карьера) изменится математическая модель задачи путем добавления фиктивных (недопоставленных) объемов $x_{3,1}$ и $x_{3,2}$. Таким образом:

$$Z = Z_T = 3 \cdot x_{1,1} + 5 \cdot x_{1,2} + 7 \cdot x_{2,1} + 4 \cdot x_{2,2} + 0 \cdot x_{3,1} + 0 \cdot x_{3,2} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} = 207; \quad x_{3,1} + x_{3,2} = 60; \quad x_{1,1} + x_{2,1} + x_{3,1} = 144; \quad x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,1}, x_{3,2} \geq 0; \\ x_{2,1} + x_{2,2} = 133; \quad x_{1,2} + x_{2,2} + x_{3,2} = 256; \quad x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{3,1}, x_{3,2} - \textit{целые}. \end{cases}$$

С добавлением фиктивного (несуществующего) потребителя (объекта) математическая модель задачи изменится путем добавления фиктивных (лишних) объемов $x_{1,3}$ и $x_{2,3}$.

$$Z = Z_T = 3 \cdot x_{1,1} + 5 \cdot x_{1,2} + 7 \cdot x_{2,1} + 4 \cdot x_{2,2} + 0 \cdot x_{1,3} + 0 \cdot x_{2,3} \to \min$$

$$\begin{cases} x_{1,1} + x_{1,2} + x_{1,3} = 307; \quad x_{1,1} + x_{2,1} = 144; \quad x_{1,3} + x_{2,3} = 40; \quad x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{1,3}, x_{2,3} \geq 0; \\ x_{2,1} + x_{2,2} + x_{2,3} = 133; \quad x_{1,2} + x_{2,2} = 256; \quad x_{1,1}, x_{1,2}, x_{2,1}, x_{2,2}, x_{1,3}, x_{2,3} - \textit{целые}. \end{cases}$$

В формулировке транспортной задачи могут присутствовать дополнительные условия, которые, несомненно, приведут к изменению математической модели. Охватить весь набор таких условий не представляется возможным. Тем не менее рассмотрим некоторые из них.

Например, выработка песка (2 ден. ед. за м^3) связана с затратами на его производство Z_P. Такое условие приведет к изменению целевой функции Z.

$$Z = Z_T + Z_P \to \min, \text{ где } Z_P = 2 \cdot \left(x_{1,1} + x_{1,2} + x_{2,1} + x_{2,2}\right).$$

Для открытой модели целевая функция идентична с тем условием, что (в случае с фиктивным потребителем) карьеры лишний песок не вырабатывают (простаивают), иначе

$$Z_P = 2 \cdot \left(x_{1,1} + x_{1,2} + x_{2,1} + x_{2,2} + x_{1,3} + x_{2,3}\right).$$

Другой пример. Суточный (смена) простой объекта влечет за собой штраф в размере 400 ден. ед. Такое условие присутствует в моделях с фиктивным поставщиком, в которых недопоставка песка может повлечь за собой простой объекта. В этом случае необходимо предварительно определить штраф от простоя объекта из расчета недопоставки единицы объема песка. Затем изменить целевую функцию

$$Z = Z_T + Z_P + Z_{PR} \to \min, \text{ где } Z_{PR} = \frac{400}{144} \cdot x_{3,1} + \frac{400}{256} \cdot x_{3,2} \approx 2.778 \cdot x_{3,1} + 1.563 \cdot x_{3,2}.$$

И наоборот. Лишняя выработанная продукция влечет за собой затраты на ее хранение (3 ден. ед. за м^3). Такое условие присутствует в моделях с фиктивным потребителем. Так как затраты за хранение единицы объема песка известны, то предварительно ничего ненужно определять. Необходимо изменить целевую функцию следующим образом:

$$Z = Z_T + Z_P + Z_H \to \min \text{, где } Z_H = 3 \cdot \left(x_{1,3} + x_{2,3}\right).$$

Если выражение целевой функции привести к подобным слагаемым, то получим следующее:

– для закрытой модели

$$Z = (3+2)\cdot x_{1,1} + (5+2)\cdot x_{1,2} + (7+2)\cdot x_{2,1} + (4+2)\cdot x_{2,2} \to \min;$$

– для модели с фиктивным поставщиком

$$Z = (3+2)\cdot x_{1,1} + (5+2)\cdot x_{1,2} + (7+2)\cdot x_{2,1} + (4+2)\cdot x_{2,2} + 2.778\cdot x_{3,1} + 1.563\cdot x_{3,2} \to \min;$$

– для модели с фиктивным потребителем

$$Z = (3+2)\cdot x_{1,1} + (5+2)\cdot x_{1,2} + (7+2)\cdot x_{2,1} + (4+2)\cdot x_{2,2} + (2+3)\cdot x_{1,3} + (2+3)\cdot x_{2,3} \to \min.$$

С учетом вышеизложенных дополнительных условий коэффициенты целевой функции в открытых моделях в Google Таблицах можно представить, как показано на рисунках 22 и 23.

	A	B	C	D
1		Объекты		
2	Карьеры	B1	B2	предложение
3	A1	5	7	207
4	A2	9	6	133
5	ф A3	2,778	1,563	60
6	спрос	144	256	

Рисунок 22 – Транспортная задача с фиктивным поставщиком

	A	B	C	D	E
1			Объекты		
2	Карьеры	B1	B2	ф B3	предложение
3	A1	5	7	5	307
4	A2	9	6	5	133
5	спрос	144	256	40	

Рисунок 23 – Транспортная задача с фиктивным потребителем

Лабораторная работа № 1

ТЕМА. Знакомство с веб-приложением **Google Сайты** (Google Sites).

Условие: Создать собственный сайт в веб-приложении **Google Сайты**.

Задание: 1. Создать собственный сайт в веб-приложении **Google Сайты**.

- Открыть браузер.
- Перейти на сайт по адресу google.com.
- В правом верхнем углу нажать кнопку **Войти** и ввести на открывшейся странице свои корпоративные данные.
- В правом верхнем углу нажать символ **Меню веб-приложений Google** (точки) и выбрать веб-приложение **Сайты**. В браузере откроется соответствующее приложение.
- В правом нижнем углу выбрать символ **Плюс** (создать новый сайт).
- Сконструировать сайт-визитку вашей компании, которая занимается инженерными расчетами в области организации строительства. Сайт должен отображать результаты ваших следующих лабораторных работ (расчетов) и содержать следующие обязательные элементы:
  - **Имя файла** (левый верхний угол экрана);
  - **Заголовок сайта**;
  - **Тема сайта** (настройка темы с правой стороны страницы);
  - **Информация о компании на главной странице** (цели, достижения, фотографии и т.п.)
  - **Дополнительные страницы** (для 4 лабораторных работ);
  - **Заголовки страниц**;
  - **Страница «Контакты»**, содержащая такие данные как имена руководителей, контакты, расположение на карте Google и т.п.

2. На дополнительных страницах сайта разместить для каждой лабораторной работы:

- условие задачи;
- файлы, графики и рисунки, содержащие решение задачи;
- результат решения задачи.

3 Добавить на сайт презентацию всех лабораторных работ.

4 Опубликовать созданный сайт для пользователей корпоративной сети.

 Работа выполнена верно: (дата) ___________ (подпись)_______________

Задания на защиту лабораторной работы № 1

Задание 1. Создать на сайте дополнительный элемент:

выдано: ____________ ____________________
(дата) (подпись)

Задание 2. Создать на сайте дополнительный элемент:

выдано: ____________ ____________________
(дата) (подпись)

Задание 3. Создать на сайте дополнительный элемент:

выдано: ____________ ____________________
(дата) (подпись)

Лабораторная работа № 2 (1,2)

ТЕМА. Анализ экспериментальных данных с помощью метода наименьших квадратов в Google Таблицах и СКМ MathCAD.

Задание: 1. Предварительный анализ экспериментальный данных

График по экспериментальным данным

Вид расчетной функции:

φ(   ) =

Экстремальная задача Φ(   ) =

Система уравнений для определения параметров расчетной функции:

2. Решения экстремальной задачи в (1) *Google Таблицы*, (2) *MathCAD*

(1) диапазон значений данных (1)______________________________

(2) имя векторов данных и их длина (2)______________________________

формула расчетной функции (1)______________________________
для (1) *указать имя ячейки результата*

(2)______________________________

формула экстремальной функции (1)______________________________
для (1) *указать имя ячейки результата*

(2)______________________________

3. Решение системы линейных алгебраических уравнений (выписать значения)

A = (   )   b = (   )

 Работа выполнена верно: (дата) ___________ (подпись)_______________

4. Решение с использование встроенных возможностей

в *Google Таблицы*	в *MathCAD*
диапазон значений данных __________________	вспомогательная функция
вспомогательные расчеты	
___________ = ________________________________	$F(t) = \begin{pmatrix} \\ \\ \\ \end{pmatrix}$
___________ = ________________________________	
встроенная функция	
___________ = ________________________________	

5. Результат решения задачи

параметры расчетной функции	значение экстремальной функции
	Ф =
	коэффициент детерминации
	R^2 =

Вывод (о выборе расчетной функции**):** ____________________________________
____ .

Ответ (расчетная функция**):** ____

Задания на защиту лабораторной работы № 2 (1,2)

Задание 1. Экспериментальные данные представлены в диапазоне от ______ до ______. Найти в *Google Таблицах* или *MathCAD* параметры расчетной функции из лабораторной работы, используя решение экстремальной задачи (решение СЛАУ или встроенные функции системы).

Ответ (расчетная функция): ____ .

выдано: __________ ________________
(дата) (подпись)

Задание 2. Экспериментальные данные $\{x_i, y_i\}$ представлены в таблице:

x_i								
y_i								

Найти в *Google Таблицах* параметры линейной функции (квадратичной функции или ________________________), используя решение экстремальной задачи (встроенные функции системы или построение линии тренда).

Ответ (расчетная функция): ____ .

выдано: __________ ________________
(дата) (подпись)

Лабораторная работа № 3(1,2)

ТЕМА. Решение задач линейного программирования.

Условие: Решить задачу линейного программирования:

____

Целевая функция: $fZ(x,y) =$____________________.

$$\begin{cases} \\ \\ x \ge 0, \ \ y \ge 0 \end{cases}$$

Задание: 1. Получить графическое решение задачи.

- подписать прямые;
- заштриховать ОДЗ;
- построить вектор градиента;
- указать точки максимума и минимума решения ЗЛП.

$f1(x) =$

$f2(x) =$

$f3(x) =$

$fc(x,C) =$

$grad\ \ fZ = \begin{pmatrix} \ \ \ \ \ \ \end{pmatrix}$

Задание: 2. Уточнить в MathCAD координаты вершины путем решения СЛАУ.

Пересечение функций _______ и _______. ЦФ (min): $fZ =$ ___________.

Пересечение функций _______ и _______. ЦФ (max): $fZ =$ ___________.

Задание: 3. Уточнить в MathCAD и Google Таблицах координаты вершины.

Исследование на минимум. Начальные значения x = _________, y = _________.

Уточненные значения: x = ________, y = ________. ЦФ (min): $fZ =$ __________.

Исследование на максимум. Начальные значения x = _________, y = _________.

Уточненные значения: x = ________, y = ________. ЦФ (max): $fZ =$ __________.

 Работа выполнена верно: (дата) ___________ (подпись)_______________

Задания на защиту лабораторной работы № 3(1,2)

Задание 1. Решить задачу линейного программирования с целевой функцией _________________, исключив из основной системы ограничений задачи из лабораторной работы ограничение номер _____.

Координаты вершины:

x = _____________,

y = _____________.

(отметить на графике)

Целевая функция:

fZ = ___________.

выдано: _________ _____________
(дата) (подпись)

Задание 2. Решить задачу линейного программирования из лабораторной работы, изменив знак неравенства в ограничениях номер _____ и _____ на обратный.

Координаты вершины:

x = _____________,

y = _____________.

(отметить на графике)

Целевая функция:

fZ = ___________.

выдано: _________ _____________
(дата) (подпись)

Задание 3. Решить задачу линейного программирования из лабораторной работы, изменив знак неравенства в ограничениях номер _____ и _____ на обратный.

Координаты вершины:

x = _____________,

y = _____________.

(отметить на графике)

Целевая функция:

fZ = ___________.

выдано: _________ _____________
(дата) (подпись)

Лабораторная работа № 4

ТЕМА. Решение задач математического программирования.

Условие: На предприятии имеются стальные бруски длиной L = _____ м, которые необходимо разрезать на заготовки длиной d_1 = ____м, d_2 = ____м, d_3 = ____м. Требуемое количество заготовок каждого вида не менее p_1 = ____шт, p_2 = ___шт, p_3 = ___шт соответственно.
Составить план разрезки брусков по критерию минимума отходов, обеспечивающий выполнение запроса по заготовкам.

Задание: 1. Составить рациональные варианты разреза бруска и определить величину отходов для каждого из вариантов. Количество вариантов _____.

2. Привести математическую модель задачи в скалярной форме для определения количества брусков по каждому варианту разреза.

ЦФ = _

_ _

_ _

_ $\rightarrow$ min

Ограничения:

_ _

_ _

_ _

_ _

_ _

3. Найти, воспользовавшись дополнением **Solver**, в Google Таблицах план разрезки брусков.

План: ____

____

____

____.

При этом:

общее количество отходов равно _________ м,

из них: ________ м отходов, полученных от разреза брусков;

________ м отходов, полученных от изготовления лишних заготовок

в количестве d_1 = ____ шт, d_2 = ____ шт, d_3 = ____ шт.

 Работа выполнена верно: (дата) ___________ (подпись)_______________

Задания на защиту лабораторной работы № 4

Задание 1. Дополнительное условие к задаче: ____________________________

____

План: ____

____.

При этом: общее количество отходов равно _________ м,

из них: ________ м отходов, полученных от разреза брусков;

________ м отходов, полученных от изготовления лишних заготовок

в количестве d_1 = ____ шт, d_2 = ____ шт, d_3 = ____ шт.

выдано: __________ ________________
(дата) (подпись)

Задание 2. Дополнительное условие к задаче: ____________________________

____

План: ____

____.

При этом: общее количество отходов равно _________ м,

из них: ________ м отходов, полученных от разреза брусков;

________ м отходов, полученных от изготовления лишних заготовок

в количестве d_1 = ____ шт, d_2 = ____ шт, d_3 = ____ шт.

выдано: __________ ________________
(дата) (подпись)

Задание 3. Дать пояснения выражениям из математической модели:

____

____

____

____

____

____

____

____

выдано: __________ ________________
(дата) (подпись)

Лабораторная работа № 5

ТЕМА. Решение задач математического программирования.

Условие: Составить план поставок строительного песка на объекты строительной организации на очередную рабочую смену (8 часов). Поставки планируется осуществлять с __ карьеров $A_1, \ldots, A$, способных производить по $a_1, \ldots, a\_$ т в смену соответственно. Заявки поступили с __ объектов $B_1, \ldots, B$ в количествах $b_1, ..., b$ т соответственно (для непрерывной работы объектов). Известны: стоимость c_{ij} ден. ед. за перевозку одной тонны песка с каждого i-го ($i = 1, \ldots,$ __) карьера на каждый j-й ($j = 1, \ldots,$ __) объект; затраты s=_____ ден. ед. на добычу одного тонна песка на каждом i-ом ($i = 1, \ldots,$ __) карьере; штраф p=______ ден. ед. за один час простоя на j-ом ($j = 1, \ldots,$ __) строительном объекте.

Составить план перевозок, который полностью удовлетворяет спрос объектов в строительном песке, а суммарные издержки за добычу песка и его перевозку при этом минимизируются.

Задание: 1. Привести математическую модель задачи в скалярной форме

ЦФ = _

_ _

_ _

_ → min

Ограничения:

_ _

_ _

_ _

_ _

_ _

_ _

_ _

_ _

2. Найти, воспользовавшись дополнением **Solver**, в Google Таблицах оптимальный план перевозок.

Суммарные издержки корпорации составляют _____________ ден. ед.,
из них:

расходы на производство продукции – __________ ден. ед.;
транспортные расходы – ___________ ден. ед.;
штраф за ______________________________________ – __________ ден. ед.

 Работа выполнена верно: (дата) ___________ (подпись)_______________

План перевозок от предприятий к потребителям в смену:

	B_1	B_2					предложение
A_1							
A_2							
спрос							

Предприятие ____
____
____

Задания на защиту лабораторной работы № 5

Задание 1. Дополнительное условие к задаче: ___________________________
____

Суммарные издержки корпорации составляют ____________ ден. ед.,
из них:

расходы на производство продукции – _________ ден. ед.;
транспортные расходы – __________ ден. ед.;
штраф за ___________________________________ – _________ ден. ед.

выдано: __________ ______________
(дата) (подпись)

Задание 2. Дать пояснения выражениям из математической модели:

____
____
____
____
____
____
____
____
____

выдано: __________ ______________
(дата) (подпись)

Лабораторная работа № 6

ТЕМА. Знакомство с веб-приложением **Google Презентации** (Google Slides).

Условие: Создать презентацию в веб-приложении **Google Презентации**.

- Открыть браузер.
- Перейти на сайт по адресу google.com.
- В правом верхнем углу нажать кнопку **Войти** и ввести на открывшейся странице свои корпоративные данные.
- В правом верхнем углу нажать символ **Меню веб-приложений Google** (точки) и выбрать веб-приложение **Презентации**. В браузере откроется соответствующее приложение.
- На панели шаблонов нажать символ **Плюс** (создать новую презентацию на основе пустого файла).
- На боковой панели выбрать приемлемую тему для будущей презентации.
- На первом слайде в заголовке указать название своей компании. В подзаголовке свое ФИО и должность в этой компании.
- С помощью пункта меню **Вставка / Новый слайд** добавить необходимое количество слайдов. Для каждого слайда выбрать нужный макет из пункта меню **Слайд / Выбрать макет**.
- На втором слайде, используя различные элементы форматирования, разместить информацию о вашей компании.
- В заголовках последующих слайдов поместить текст «Лабораторная работа №» и указать ее номер. Остальное пространство слайда заполнить результатами расчетов лабораторных работ 2, 3, 4 и 5, включая:
  - условие задачи;
  - графики и рисунки, содержащие решение задачи;
  - результат решения задачи.

Задание на защиту лабораторной работы № 6

Задание. Создать в презентации: ....

....

....

....

....

выдано: ____________ ____________________

(дата) (подпись)

 Работа выполнена верно: (дата) ____________ (подпись)________________

Список дополнительной литературы

1. Кирьянов, Д. В. Mathcad 15 / Mathcad Prime 1.0. – СПб. : БХВ-Петербург, 2012. – 432 с.
2. Таблицы - центр обучения G Suite [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://gsuite.google.ru/learning-center/products/sheets.
3. Презентации - центр обучения G Suite [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://gsuite.google.ru/learning-center/products/slides.
4. Справка - Класс [Электронный ресурс]. – Режим доступа: https://support.google.com/edu/classroom.

Оглавление

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:
Кофанов Валерий Анатольевич
Хомицкая Татьяна Георгиевна
Сидак Светлана Васильевна

ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

по дисциплине «Информатика» для студентов строительных специальностей очной формы обучения третьего семестра

издание 3-е, дополненное и переработанное

Текст печатается в авторской редакции, орфографии и пунктуации

Ответственный за выпуск: Кофанов В.А.
Редактор:Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка: Кофанов В.А.

Подписано в печать 01.10.2019 г. Формат 60x84 $^1/_8$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 3,72. Уч. изд. л. 4,0. Заказ № 1261. Тираж 19 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.