А. І. Тузік , Т. А. Тузік

УВОДЗІНЫ У МАТЭМАТЫЧНЫ АНАЛІЗ. ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАЕ ЗЛІЧЭННЕ ФУНКЦЫЙ АДНОЙ ПЕРАМЕННАЙ

$$y'_x = \lim_{\forall \Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

Брэст 1996

Падручнікі і вучэбныя дапаможнікі для вышэйшых навучальных устаноў

А.І. Тузік, Т.А. Тузік

УВОДЗІНЫ У МАТЭМАТЫЧНЫ АНАЛІЗ. ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАЕ ЗЛІЧЭННЕ ФУНКЦЫЙ АДНОЙ ПЕРАМЕННАЙ

Выданне першае

Рэкамендавана Навукова-метадычным цэнтрам вучэбнай кнігі і сродкаў навучання Міністэрства адукацыі і навукі Рэспублікі Беларусь у якасці вучэбна-метадычнага дапаможніка па вышэйшай матэматыцы для студэнтаў электронна-механічных спецыяльнасцяў тэхнічных вышэйшых навучальных устаноў

Брэст, БПІ, 1996

ББК 22.11я73
Т 81
УДК 51(075.8)

Тузік А.І., Тузік Т.А. Уводзіны ў матэматычны аналіз. Дыферэнцыяльнае злічэнне функцый адной пераменнай: Вучэбны дапаможнік па вышэйшай матэматыцы для студэнтаў электронна-механічных спецыяльнасцяў тэхнічных ВНУ. - Брэст. Брэсцкі політэхнічны інстытут, 1996 - 115 с.: з іл.

Дапаможнік складзены ў адпаведнасці з дзейнічаючай праграмай па вышэйшай матэматыцы для студэнтаў I курса тэхнічных ВНУ. Тэарэтычны матэрыял ілюструецца рашэннем задач, а частка яго ў выглядзе тэарэтычных практыкаванняў сфармулявана для самастойнага разгляду.

к.ф.-м.н., дацэнт Тузік Альфрэд Іванавіч

дацэнт Тузік Таццяна Аляксандраўна

Рэцэнзенты: Кафедра матэматычнага аналізу і дыферэнцыяльных ураўненняў БрГПІ імя А.С. Пушкіна; прафесар Беларускага дзяржаўнага універсітэта інфарматыкі і радыеэлектронікі Р.М. Жаўняк

Навуковы рэдактар: А.І. Тузік

Тэхнічны рэдактар: Т.М. Аверына

УВОДЗІНЫ У МАТЭМАТЫЧНЫ АНАЛІЗ

І. ЛІКАВЫЯ МНОСТВЫ. ФУНКЦЫЯНАЛЬНАЯ ЗАЛЕЖНАСЦЬ

І.І. АСНОЎНЫЯ АЗНАЧЭННІ І ПАНЯЦЦІ

Пераменнай (зменнай) называецца велічыня, якая прымае хаця б два розных значэнні.

Велічыня, якая прымае ці можа прымаць толькі адно значэнне, называецца пастаяннай (сталай або нязменнай).

Мноства значэнняў, якія можа прымаць пераменная велічыня, будзем абазначаць вялікімі літарамі, а самі значэнні, так званыя элементы мноства - малымі літарамі.

Калі для ўсякага элемента a з мноства A вынікае, што a належыць мноству B, то мноства A змяшчаецца ў мностве B.

$$(\forall a \in A \Rightarrow a \in B) \Rightarrow A \subset B.$$

У гэтым выпадку A з'яўляецца падмноствам мноства B.

Для абазначэння канкрэтных мностваў выкарыстоўваюцца фігурныя дужкі, у якіх указваецца правіла, па якому знаходзяцца элементы дадзенага мноства.

Разглядзім канкрэтныя прыклады лікавых мностваў:

$N = \{1, 2, 3, \dots, n, \dots\}$ - мноства натуральных лікаў;

$Z = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$ - мноства цэлых лікаў;

$Q = \{m/n\},\ n \neq 0,\ \forall m, n \in Z$ - мноства рацыянальных лікаў.

Няцяжка паказаць, што ўсякі рацыянальны лік можна прадставіць у выглядзе бясконцага перыядычнага дзесятковага дробу.

Усякі лік, які прадстаўляецца бясконцым неперыядычным дзесятковым дробам, называецца ірацыянальным. Напрыклад: $\pi, \sqrt{2}, \sqrt{7}, e$.

Аб'яднанне мностваў рацыянальных і ірацыянальных лікаў утварае мноства рэчаісных (сапраўдных) лікаў, якое абазначаецца R. Відавочна, што $N \subset Z \subset Q \subset R$.

Калі кожнаму рэчаіснаму ліку x паставіць у адпаведнасць пункт на лікавай прамой, то яна таксама абазначаецца R.

$$R:\ -\infty < x < \infty.$$

Укажам яшчэ некаторыя мноствы, якія мы будзем разглядаць:

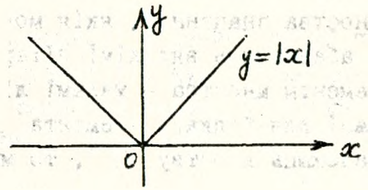
$[a, b] = \{x \in R \mid a \leq x \leq b\};$

$$]a, b[\iff (a, b) = \{ x \in R \mid a < x < b \};$$

$$]-\infty, \infty[\iff (-\infty, \infty) = \{ x \in R \mid -\infty < x < \infty \}.$$

Абсалютная велічыня ці модуль рэчаіснага ліку x абазначаецца $|x|$ і азначаецца наступнай роўнасцю

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



Відавочна, што

$$|x| \geq 0, \quad \forall x \in R, \qquad x \leq |x|.$$

Справядлівы наступныя ўласцівасці:

1. $|x+y| \leq |x| + |y|$;

2. $|x-y| \geq |x| - |y|$;

3. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$;

4. $|x/y| = |x| / |y|, \quad |y| \neq 0.$

І.2. АБМЕЖАВАНЫЯ МНОСТВЫ

Мноства $\mathcal{D} \subset R$ называюцца абмежаваным зверху (знізу), калі існуе рэчаісны лік b (a) такі, што выконваецца няроўнасць $x \leq b$ $(x \geq a)$ для $\forall x \in \mathcal{D}$.

Мноства $\mathcal{D}$, якое змяшчаецца ў R, называецца абмежаваным, калі яно аднасачова абмежавана і зверху, і знізу, г. зн.

$$\exists\, a, b \in R : \quad a \leq x \leq b, \quad \forall x \in \mathcal{D}.$$

Найменшая (найбольшая) сярод верхніх (ніжніх) граніц мноства называецца дакладнай верхняй (ніжняй) гранню або мяжой мноства і абазначаецца

$$\sup_{\forall x \in \mathcal{D}} \{\mathcal{D}\} = M \qquad \left(\inf_{\forall x \in \mathcal{D}} \{\mathcal{D}\} = m\right).$$

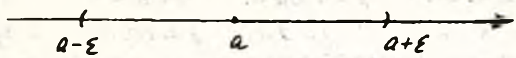
Адзначым, што дакладная зерхняя і дакладная ніжняя грані могуць і не належаць мноству $\mathcal{D}$. Няхай $\mathcal{D} = (a, b)$,

$$M = \sup \mathcal{D} = b\ , \quad m = \inf \mathcal{D} = a\ , \quad M = b \notin \mathcal{D}\ , \quad m = a \notin \mathcal{D}.$$

Справядліва наступнае сцвярджэнне, якое мы прымем у якасці аксіёмы:

Для ўсякага абмежаванага мноства існуюць дакладная верхняя і дакладная ніжняя грані (межы).

Увядзем паняцце аб ε - ваколлі пункта $x = a$. Гэта інтэрвал даўжыні 2ε з цэнтрам у пункце a .



$$|x-a| < \varepsilon \iff -\varepsilon < x-a < \varepsilon \iff$$

$$\iff a-\varepsilon < x < a+\varepsilon\ , \quad a, \varepsilon \in R, \quad \varepsilon > 0.$$

I.3. ФУНКЦЫЯНАЛЬНАЯ ЗАЛЕЖНАСЦЬ

Калі кожнаму значэнню $x \in \mathcal{D} \subset R$ па некатораму правілу f ставіцца ў адпаведнасць вызначаны лік $y \in E \subset R$, то кажуць, што на мностве $\mathcal{D}$ зададзена функцыя $y = f(x)$.

Калі пары лікаў $(x, y = f(x))$ на плоскасці ХОУ паставіць у адпаведнасць пункт з такімі каардынатамі, то атрымаем графік функцыянальнай залежнасці.

Функцыянальную залежнасць можна таксама разглядаць як адлюстраванне мноства $\mathcal{D}$ на мноства E . $x \in \mathcal{D} \xrightarrow{y=f(x)} y \in E$,

$\mathcal{D}(f)$ - мноства дапушчальных значэнняў x , $E(f)$ - мноства прымаемых значэнняў y .

Калі $y = \varphi(x)$, $z = f(y) \iff z = f(\varphi(x))$, то такая функцыя называецца складанай.

Спосабы задання функцый:

I. Аналітычны (з дапамогай формулы);

2. Графічны;

3. Таблічны;

4. Праграма на ЭВМ для вылічэння значэнняў функцыі.

I.4. АСНОЎНЫЯ ЭЛЕМЕНТАРНЫЯ ФУНКЦЫІ

I. Ступеневая $y=x^{\alpha}$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

2. Паказнікавая $y=a^{x}$, $a\neq 0$, $0<a\neq 1$; $a^{x} \Leftrightarrow \exp_a x$.

3. Лагарыфмічная $y=\log_a x$, $0<a\neq 1$.

4. Трыганаметрычная $y=\sin x$, $y=\cos x$, $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$.

5. Адваротныя трыганаметрычныя $y=\arcsin x$, $y=\arccos x$, $y=\operatorname{arctg} x$, $y=\operatorname{arcctg} x$.

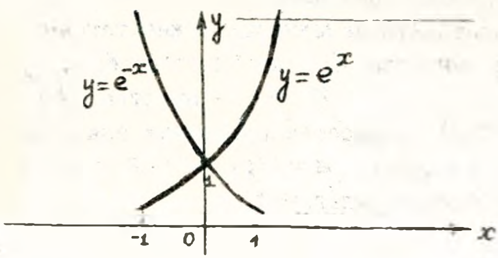
Тэарэтычнае практыкаванне. Паўтарыць самастойна ўласцівасці і графікі элементарных функцый.

I.5. ГІПЕРБАЛІЧНЫЯ ФУНКЦЫІ

Існуе канцоўны ліміт

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e\approx 2,71828\ldots$$

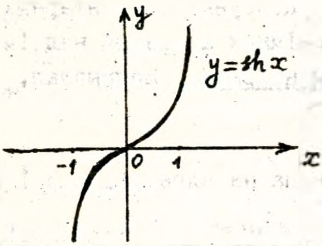
Гэта ірацыянальны лік. Графікі $y=e^{\pm x}$ маюць выгляд (рыс. I.I).



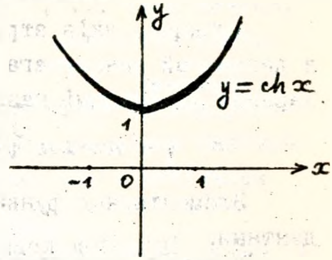
Рыс. I.I

I. Гіпербалічны сінус $sh\,x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ (рыс. I.2), функцыя няцотная. $\mathcal{D}(sh) = R$, $E(sh) = R$.

2. Гіпербалічны косінус $ch\,x = \dfrac{e^{x} + e^{-x}}{2}$ (рыс I.3), функцыя цотная, $\mathcal{D}(ch) = R$, $E(ch) = [1, \infty)$



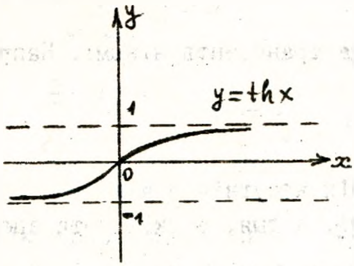
Рыс. I.2



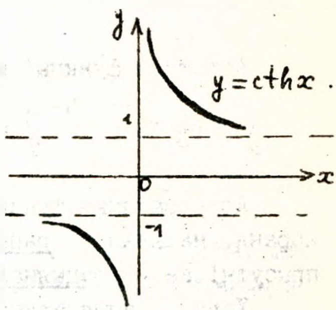
Рыс. I.3

3. Гіпербалічны тангенс $th\,x = \dfrac{sh\,x}{ch\,x}$ (рыс. I.4) , $\mathcal{D}(th) = R$, $E(th) = (-1, 1)$.

4. Гіпербалічны катангенс $cth\,x = \dfrac{ch\,x}{sh\,x}$ (рыс. I.5), $\mathcal{D}(cth) = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ $E(cth) = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$



Рыс. I.4



Рыс. I.5

Справядлівы наступныя формулы:

$$sh(x+y) = sh\,x \cdot ch\,y + ch\,x \cdot sh\,y;$$

$$ch(x+y) = ch\,x \cdot ch\,y + sh\,x \cdot sh\,y;$$

$$y = -x \Rightarrow 1 = ch^2 x - sh^2 x;$$

$$y = x \Rightarrow sh\,2x = 2\,sh\,x\,ch\,x;$$

$$ch\,2x = ch^2 x + sh^2 x.$$

I.6. КЛАСІФІКАЦЫЯ ФУНКЦЫЙ

Функцыі, якія атрымліваюцца з асноўных элементарных функцый з дапамогай канцоўнага ліку алгебраічных аперацый над імі і утварэння функцыі ад функцыі называюцца элементарнымі. Напрыклад,

$$y = \arcsin \sqrt[3]{5 \log_2 x + 1}.$$

Элементарныя функцыі падзяляюцца на алгебраічныя і трасцэнтдэнтныя.

Элементарныя функцыі, у якіх над аргументам праводзіцца канцоўны лік алгебраічных аперацый і падвышэння да ступені з рацыянальным паказнікам называюцца алгебраічнымі. Напрыклад,

$$y = \frac{3 \cdot \sqrt[6]{x} + 1}{x^2 + 3x - 2}$$

Астатнія функцыі называюцца трансцэнтдэнтнымі. Напрыклад:

$$y = \lg x, \qquad y = 2^x, \qquad y = \sin x.$$

Алгебраічныя функцыі, у якіх адсутнічае аперацыя здабывання кораня, называюцца рацыянальнымі, а тыя, у якіх гэта аперацыя прысутнічае - ірацыянальнымі.

Усякую рацыянальную функцыю можна прадставіць як адносіну двух мнагаскладаў адносна аргумента x .

Функцыянальная залежнасць віда $y = f(x)$ называецца яўнай. Калі ж есць толькі судачыненне $F(x, y) = 0$, якое звязвае x і y , нявырашанае адносна y , то гэта судачыненне вызначае y як функцыю x няяўна.

2. ЛІМІТЫ ПАСЛЯДОЎНАСЦЕЙ І ФУНКЦЫЙ

2.1. ЛІМІТ ЛІКАВАЙ ПАСЛЯДОЎНАСЦІ

Няхай кожнаму з натуральных лікаў 1, 2, 3, ... , ... адпавядае вызначаны лік x_1, x_2, ..., x_n, ... Тады кажуць, што на мностве натуральных лікаў $n \in N$ зададзена паслядоўнасць $\{x_n\}$, дзе $x_n = f(n)$, $\forall n \in N$.

Пры гэтым x_n называецца агульным членам лікавай паслядоўнасці. З апошняй роўнасці відаць, што паслядоўнасць можна разглядаць, як дыскрэтную функцыю, якая зададзена пры цэлалікавых значэннях аргумента.

<u>Азначэнне</u>. Лік a называецца <u>лімітам паслядоўнасці</u> $\{x_n\}$, пры ўзрастанні n да бясконцасці, калі для ўсякага, як хочаш малога дадатнага ліку ε, знойдзецца такі нумар $N = N(\varepsilon)$ залежны ад ε, што для ўсіх нумароў $n > N$ будзе выконвацца няроўнасць $|x_n - a| < \varepsilon$.

Пішуць гэта так:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a \tag{1}$$

$$(\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \; N = N(\varepsilon) \Rightarrow \forall n > N(\varepsilon) \quad |x_n - a| < \varepsilon)$$

$$\Leftrightarrow \quad (-\varepsilon < x_n - a < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon, \; \forall n > N(\varepsilon)).$$

Такім чынам, калі існуе $\lim x_n = a$, гэта азначае, што для $\forall \varepsilon > 0$ можна ўказаць нумар $N = N(\varepsilon)$, пачынаючы з якога <u>ўсе</u> члены паслядоўнасці будуць належаць ε - вакаллю пункта a.

Няхай $\{x_n\} = \{\frac{1}{n}\} = \{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots\}$.

Дакажам, што $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$.

$$\forall \varepsilon > 0 \quad |x_n - a| = |\frac{1}{n} - 0| = \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \Longleftrightarrow \quad n > \frac{1}{\varepsilon} \quad \Longrightarrow$$

$N = [\frac{1}{\varepsilon}]$ - цэлая частка ад $\frac{1}{\varepsilon}$.

Напрыклад, пры $\varepsilon = 0{,}1$, $N(\varepsilon) = 10$; пры $\varepsilon = 0{,}01$ $N(\varepsilon) = 100$.

Адзначым, што не ўсякая паслядоўнасць мае ліміт. Напрыклад, паслядоўнасць $\{x_n\} = \{(-1)^n\} = \{-1, 1, -1, 1, \dots\}$ ліміта не мае.

Калі паслядоўнасць $\{x_n\}$ мае ліміт, то яна называецца <u>збежнай</u>, а калі гэты ліміт не існуе, ці роўны бясконцасці, то - <u>разбежнай</u>.

Паслядоўнасць $\{x_n\}$ называецца <u>абмежаванай</u>, калі існуе лік $C > 0$, што $|x_n| \le C = const$, $\forall n \in N$.

Справядліва <u>тэарэма</u> Бальцана-Веерштраса:

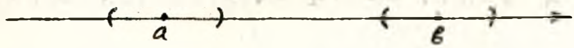
З любой <u>абмежаванай паслядоўнасці</u> можна вылучыць збежную падпаслядоўнасць.

Дакажам наступную <u>тэарэму</u>:

<u>Калі паслядоўнасць мае ліміт, то ён адзіны.</u>

<u>Доказ</u>. Дапусцім, што паслядоўнасць $\{x_n\}$ пры ўзрастанні n мае 2 розных ліміты: $n \to \infty$ $\exists \lim x_n = a$, $\exists \lim x_n = b$, $a \ne b$.
Гэта значыць, што для $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $N = N(\varepsilon)$, што для

$$\forall n > N \Rightarrow |x_n - a| < \varepsilon \quad і \quad |x_n - b| < \varepsilon$$



Калі ўзяць $\varepsilon < |b-a|/2$, то такая сістэма няроўнасцей адначасова выконвацца не будзе. Атрыманае супярэчнасць паказвае, што наша ўмова аб існаванні двух розных лімітаў немагчыма. Такім чынам, калі паслядоўнасць мае ліміт, то ён адзіны.

Справядліва наступная тэарэма, якую прыводзім без доказу:

<u>Усякая манатонна нарастальная (спадальная) паслядоўнасць, абмежаваная зверху (знізу), мае ліміт</u>.

З дадзенай тэарэмы вынікае, што паслядоўнасць

$$\{x_n\} = \left\{ \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \right\}$$

мае ліміт, таму што:

I. $\forall n \in N \Rightarrow (x_n < x_{n+1}) \Rightarrow \{x_n\}$ - нарастальная;

2. $\forall n \in N \quad (2 \le x_n < 3) \Rightarrow \quad |x_n| < 3$ - паслядоўнасць абмежаваная. На аснове тэарэмы існуе

$$\lim_{n \to \infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e \approx 2,71828...$$

Адзначым, што лік e з'яўляецца ірацыянальным і шырока выкарыстоўваецца ў матэматыцы і яе прымяненнях, у прыватнасці лік e служыць асновай натуральных лагарыфмаў.

$$\log_e x = \ln x.$$

Паміж дзесятковымі і натуральнымі лагарыфмамі існуе наступнае судачыненне

$$\lg x = \frac{\ln x}{\ln 10} \approx 0,4343 \ln x.$$

2.2. ЛІМІТ ФУНКЦЫІ

Ад паняцця ліміта паслядоўнасці няцяжка перайсці да ліміта функцыі. Няхай функцыя $y=f(x)$ зададзена на некаторым інтэрвале, які змяшчае пункт $x=a$.

Азначэнне I. Калі для значэнняў аргумента x, блізкіх да пункта $x=a$, адпаведныя значэнні функцыі $f(x)$ як хочаш мала адрозніваюцца ад ліку b, то кажуць, што b есць ліміт $f(x)$, калі x імкнецца да a, і пішуць

$$\lim_{x \to a} f(x) = b.$$

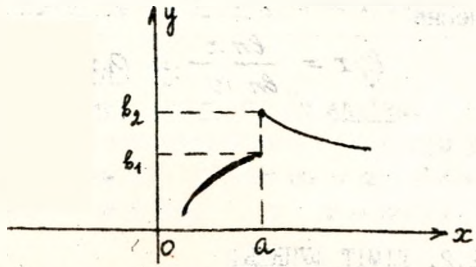
Зараз дадзім строга матэматычнае азначэнне ліміта функцыі.

Азначэнне 2. Калі для $\forall \varepsilon > 0$ можна знайсці дадатны лік δ, залежны ад ε, $\delta=\delta(\varepsilon)$ такі, што як толькі значэнні аргумента здавальняюць няроўнасці $|x-a| < \delta$, то адпаведныя значэнні функцыі будуць адрознівацца ад b менш, чым на ε, г. зн. $|f(x)-b| < \varepsilon$. Тады кажуць, што b есць ліміт $f(x)$, калі $x \to a$ і пішуць

$$\lim_{\forall x \to a} f(x) = b. \qquad (2)$$

З існавання ліміта (2) вынікае, што функцыя $y=f(x)$ <u>азначана</u> у некаторым ваколлі пункта $x=a$, за выключэннем, мабыць, самога пункта $x=a$. Вось чаму існаванне ліміта функцыі у некаторым пункце есць <u>лакальная</u> уласцівасць гэтай функцыі у ваколлі дадзенага пункта.

Калі $x \to a$, заставаючыся увесь час менш чым a, і пры гэтым існуе ліміт функцыі $f(x)$, то ен называецца лімітам злева ці левабаковым лімітам і азначаецца $\lim\limits_{x \to a-0} f(x) = b_1 = f(a-0)$. (рыс. 2.I).

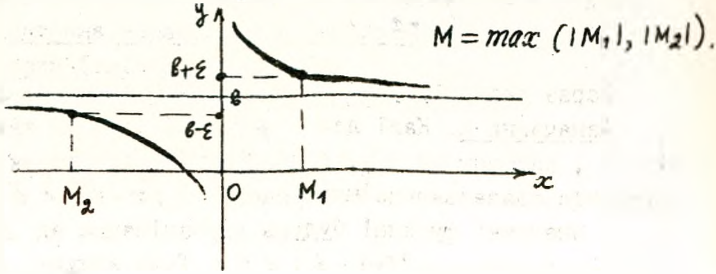


Рыс. 2.I.

Калі $x \to a$, застаючыся увесь час больш за a, і пры гэтым існуе ліміт функцыі $f(x)$, то ен называецца лімітам справа ці правабаковым лімітам $\lim\limits_{x \to a+0} f(x) = b_2 = f(a+0)$. (рыс. 2.I).

Да гэтай пары мы лічым, што лікі a і b канцоуныя. Разгледзім выпадкі, калі гэтыя лікі могуць быць бясконцымі.

Удакладнім, што значыць $\lim\limits_{x \to \infty} f(x) = b$ (рыс. 2.2)

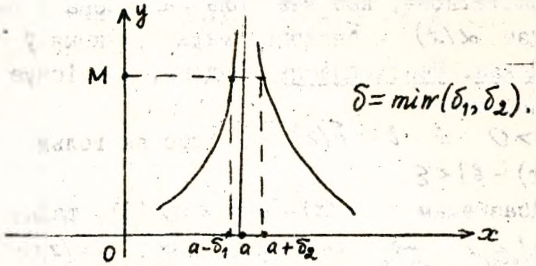


Рыс. 2.2

Азначэнне 3. Калі для $\forall \varepsilon > 0$ можна знайсці такі дадатны лік $M = M(\varepsilon)$, што як толькі $|x| > M$, то $|f(x) - b| < \varepsilon$, г. зн. існуе $\lim f(x) = b$, $\forall x \to \infty$.

Удакладнім, што значыць $\lim f(x) = \infty, x \to a$ (рыс. 2.3).

Азначэнне 4. Калі для $\forall M > 0$ можна знайсці такі лік $\delta = \delta(M)$, што як толькі $|x - a| < \delta$, то $|f(x)| > M$, г. зн. існуе $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$



Рыс. 2.3

Тэарэтычнае практыкаванне. Сфармуляваць самастойна, што значыць $\exists \lim f(x) = \infty$, $x \to \infty$.

Азначэнне 5. Функцыя $y = f(x)$, $x \in \mathfrak{D}$, называецца абмежаванай на мностве $\mathfrak{D}$, калі існуе лік $C > 0$, што для $\forall x \in \mathfrak{D}$ $|f(x)| \le C$. У адваротным выпадку $f(x)$ -неабмежавана.

Напрыклад:

$y = \sin x$ - абмежавана для $x \in (-\infty, \infty)$: $|\sin x| \le 1$;

$y = \lg x$ - неабмежавана для $x \in (0, +\infty)$: $|\lg x| < \infty$;

$y = \lg x$ - абмежавана для $x \in (0{,}1; 10)$: $|\lg x| \le 1$.

Калі існуе канцоўны ліміт $\lim f(x) = b, x \to a$, то функцыя y ваколлі пункта $x = a$ будзе абмежаванай. Калі $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \infty$, то y ваколлі пункта $x = a$ функцыя неабмежавана.

3. БЯСКОНЦА МАЛЫЯ ФУНКЦЫІ. АСНОЎНЫЯ ТЭАРЭМЫ АБ ЛІМІТАХ.

3.1. БЯСКОНЦА МАЛЫЯ ФУНКЦЫІ І ІХ УЛАСЦІВАСЦІ.

Азначэнне 1. Функцыя $\alpha = \alpha(x)$ называецца бясконца малой

$(б.м.ф.)$, у ваколлі пункта $x=a$, калі яе лімiт пры $x \to a$ роўны нулю.

Гэта значыць, што для $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \quad \delta=\delta(\varepsilon)$, што для $|x-a|<\varepsilon \Rightarrow |\alpha(x)-0|=|\alpha(x)|<\varepsilon$.

Азначэнне 2. Функцыя $f(x)$ называецца бясконца вялікай у ваколлі пункта $x=a$, калі $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.

Тэарэма I. Для таго, каб пры $x\to a$ функцыя $f(x)$ мела сваім лімітам лік b , г.зн. $\lim f(x)=b, \forall x\to a$ (1), неабходна і дастаткова, каб яна была пададзена ў выглядзе $f(x)=b+\alpha(x)$ (2), дзе $\alpha(x)$ - бясконца малая функцыя ў ваколлі пункта .

Доказ. Неабходнасць. Вядома, што існуе лімiт (I). Гэта значыць, што

$\forall \varepsilon>0 \quad \exists \quad \delta=\delta(\varepsilon)>0$, што як толькі $|x-a|<\delta$, то $|f(x)-b|<\varepsilon$.

Абазначым $f(x)-b=\alpha(x)$ (3), тады (для $\forall \varepsilon>0 \ \exists \delta>0$: $|x-a|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon \Leftrightarrow \alpha(x)$ - бясконца малая функцыя для $x\in(a-\delta, a+\delta)$.

З формулы (3) $\Rightarrow f(x)=b+\alpha(x)$, што і трэба было даказаць.

Дастатковасць. Вядома, што $f(x)$ пададзена ў выглядзе (2). З роўнасці (2) вынікае, што $f(x)-b=\alpha(x)$. Паколькі $\alpha(x)$ - б. м. ф. у ваколлі пункта $x=a$, то гэта значыць, што для $\forall \varepsilon>0 \quad \exists \quad \delta=\delta(\varepsilon)>0 \Rightarrow |x-a|<\delta \Rightarrow |\alpha(x)|<\varepsilon$ ці $|f(x)-b|<\varepsilon$ Адсюль вынікае, што $\exists \lim\limits_{\forall x\to a} f(x)=b$.
Дастатковасць (2) даказана.

Тэарэма даказана цалкам.

Тэарэма 2: Сума канцоўнага ліку бясконца малых функцый есць функцыя бясконца малая ў ваколлі разглядаемага пункта.

Заўвага. Сума бясконцавага ліку б.м.ф. можа быць, а можа і не быць бясконца малой функцыяй.

Тэарэма 3. Здабытак канцоўнага ліку бясконца малых функцый есць функцыя бясконца малая ў ваколлі разглядаемага пункта.

Тэарэма 4. Няхай $\alpha(x)$ - бясконца малая функцыя ў ваколлі пункта $x=a$, функцыя $z(x)$, абмежаваная ў ваколлі гэтага пункта, г.зн. $|z(x)|\le c=const$ для $\forall x\in(a-\delta, a+\delta)$. Тады іх здабытак будзе бесконцы малой функцыяй у ваколлі пункта $x=a$, г.зн. $\beta(x)=\alpha(x)\cdot z(x)$ - б.м.ф. $\forall x\in(a-\delta, a+\delta)$.

Вынікі:

1. Здабытак двух бясконца малых функцый есць функцыя бясконца малая.

2. Здабытак бясконца малой функцыі на лік есць бясконца малая функцыя, $\alpha(x)\cdot C =$ б.м.ф., калі $C - \forall\ const$.

3. Функцыя, зваротная да бясконца малой функцыі, будзе бясконца вялікай.

$$\left(\lim_{x\to a} \alpha(x) = 0\right) \iff \left(\lim_{x\to a} \frac{1}{\alpha(x)} = \infty\right).$$

3.2. АСНОЎНЫЯ ТЭАРЭМЫ АБ ЛІМІТАХ.

Тэарэма I. Калі функцыі $u(x)$ і $v(x)$ пры $x\to a$ маюць канцоўныя ліміты $\lim u(x) = A$, $\lim v(x) = B$, $\forall x\to a$, (I)

то ліміт алгебраічнай сумы функцый роўны алгебраічнай суме ліміатаў складнікаў, г. зн.

$$\lim_{\forall x\to a} (u(x) \pm v(x)) = \lim_{x\to a} u(x) \pm \lim_{x\to a} v(x) = A \pm B. \tag{2}$$

Доказ. З існавання лімітаў (I) функцый $u(x)$ і $v(x)$ вынікае, што ў ваколлі пункта $x = a$ яны могуць быць пададзены ў выглядзе

$$u(x) = A + \alpha(x), \qquad v(x) = B + \beta(x), \tag{3}$$

дзе $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ — б.м.ф.

Саставім алгебраічную суму функцый, атрымаем

$$u(x) \pm v(x) = (A + \alpha(x)) \pm (B + \beta(x)) = (A \pm B) + (\alpha(x) \pm \beta(x)).$$

Пераходзім да ліміту пры $x\to a$

$$\lim_{\forall x\to a} (u(x) \pm v(x)) = A \pm B = \lim_{\forall x\to a} u(x) \pm \lim_{\forall x\to a} v(x).$$

Тэарэма 2. Калі функцыі $u(x)$ і $v(x)$ пры $x \to a$ маюць канцоўныя ліміты (I), то іх здабытак мае ліміт, прычым

$$\lim_{x \to a} (u(x) \cdot v(x)) = \lim_{x \to a} u(x) \cdot \lim_{x \to a} v(x) = A \cdot B .$$

Доказ. З існавання лімітаў функцый (I) вынікае ўяўленне (3). Таму $u(x) \cdot v(x) = (A + \alpha(x)) \cdot (B + \beta(x)) = A \cdot B +$ $+ (A \cdot \beta(x) + B \cdot \alpha(x) + \alpha(x) \cdot \beta(x)) = A \cdot B + \gamma(x)$, дзе $\gamma(x)$ – бясконца малая функцыя на аснове уласцівасцей б.м.ф. Пераходзім да ліміту пры $x \to a$

$$\lim_{x \to a} (u(x) \cdot v(x)) = A \cdot B = \lim_{x \to a} u(x) \cdot \lim_{x \to a} v(x).$$

Вынік. Пастаянны множнік можна выносіць за знак ліміта.

$$\lim_{x \to a} (C \cdot u(x)) = C \cdot \lim_{x \to a} u(x).$$

Тэарэма 3. Няхай існуюць канцоўныя ліміты (I), пры гэтым $B \neq 0$, тады ліміт дзелі роўны дзелі ад лімітаў, г.зн.

$$\lim_{x \to a} \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{A}{B} = \frac{\lim\limits_{x \to a} u(x)}{\lim\limits_{x \to a} v(x)}, \quad B \neq 0.$$

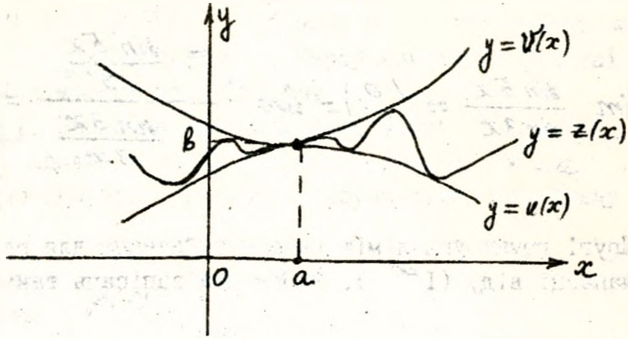
Доказ тэарэмы 3 аналагічны доказу тэарэмы 2.

Заўвага. Калі пры знаходжанні лімітаў выразаў $u(x) \pm v(x)$, $u(x) \cdot v(x)$, $u(x) / v(x)$ парушаны ўмовы тэарэм I – 3, то ўзнікаюць так званыя нявызначанасці віду : $\frac{0}{0}$; $\frac{\infty}{\infty}$; $0 \cdot \infty$; $\infty - \infty$, якія патрабуюць перад знаходжаннем ліміту дадатковых пераўтварэнняў.

Тэарэма 4. Калі адпаведныя значэнні трох функцый $u(x)$, $z(x)$, $v(x)$ задавальняюць няроўнасцям $u(x) \leq z(x) \leq v(x)$ для $x \in (a - \delta, a + \delta)$ і ліміты функцый $u(x)$ і

$v(x)$ пры $x \to a$ роўны b, то і $\lim z(x) = b, \forall x \to a$.

У праўдзівасці дадзенай тэарэмы пераканаемся з геаметрычных меркаванняў (рыс. 3.1).



Рыс. 3.1

Тэарэма 5. Калі $f(x) \geq 0$ і існуе канцоўны ліміт $\lim\limits_{\forall x \to a} f(x) = b$, то $b \geq 0$.

Тэарэма 6. Калі $u(x) \leq v(x)$ для $\forall x \in (a-\delta, a+\delta)$ і існуюць ліміты функцый, то $\lim\limits_{\forall x \to a} u(x) \leq \lim\limits_{\forall x \to a} v(x)$.

Такім чынам, пры пераходзе да лімітаў у няроўнасцях знакі няроўнасцяў захоўваюцца.

Тэарэма 7. Усякая манатонна нарастальная (спадальная) функцыя, абмежаваная зверху (знізу), мае ліміт.

3.3. Першы і другі грунтоўныя ліміты.

Справядлівасць зазначаных ніжэй лімітаў будзе даказана з дапамогай правіла Лапіталя, якое разгледзім у дальнейшым.

$$1. \quad \lim_{\forall x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Выкарыстоўваюць пры раскрыцці нявызначанасцей віду $\frac{0}{0}$.

Прыклады:

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}\cdot 5=5\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{5x}=5\cdot 1=5$$

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\sin 3x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{5\cdot\frac{\sin 5x}{5x}}{3\cdot\frac{\sin 3x}{3x}}=\frac{5}{3}\cdot\frac{1}{1}=\frac{5}{3}.$$

Другі грунтоўны ліміт выкарыстоўваецца для раскрыцця нявызначанасці віду (1^{∞}). Яго можна запісаць так

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=e\approx 2,71828\ldots$$

або

$$\lim_{\alpha(x)\to 0}\left(1+\alpha(x)\right)^{\frac{1}{\alpha(x)}}=e.$$

<u>Прыклад</u>.

$$\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{x}=(1^{\infty})=\lim_{x\to\infty}\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}\cdot(-2)}=\lim_{x\to\infty}\left(\left(1-\frac{2}{x}\right)^{-\frac{x}{2}}\right)^{-2}=e^{-2}.$$

<u>Адзначым некаторыя важныя ліміты</u>.

$$1.\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1;\qquad 2.\ \lim_{x\to 0}\frac{a^{x}-1}{x}=\ln a;$$

$$3.\ \lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\alpha}-1}{x}=\alpha.$$

4. ПАРАЎНАННЕ БЯСКОНЦА МАЛЫХ ФУНКЦЫЙ. НЕПАРЫЎНАСЦЬ ФУНКЦЫІ. ПУНКТЫ РАЗРЫВУ.

4.1. ПАРАЎНАННЕ БЯСКОНЦА МАЛЫХ ФУНКЦЫЙ.

Няхай $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ – б.м.ф. у ваколлі пункта $x=a$, $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x)=0$, $\lim\limits_{x\to a}\beta(x)=0$. Параўнаць такія функцыі – значыць знайсці ліміт іх адносіны пры $x\to a$.

Азначэнне I. Бясконца малыя функцыі $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ называюцца б.м.ф. аднаго парадку ў ваколлі пункта $x=a$, калі ліміт іх адносіны пры $x\to a$ роўны ліку, няроўнаму 0.

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=A\neq 0.$$

Тады пішуць: $\alpha(x)=O(\beta(x))$ пры $x\to a$, ці

$\beta(x)=O(\alpha(x))$ пры $x\to a$, таму што $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{\beta(x)}{\alpha(x)}=\dfrac{1}{A}\neq 0.$

Азначэнне 2. Функцыя $\alpha(x)$ называецца б.м.ф. больш высокага парадку, чым $\beta(x)$ у ваколлі пункта $x=a$, калі ліміт адносіны $\alpha(x)$ да $\beta(x)$ пры $x\to a$ роўны нулю.

$$\left(\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=0\right)\Longleftrightarrow\left(\alpha(x)\overset{x\to a}{=}o(\beta(x))\right).$$

Азначэнне 3. Дзве б.м.ф. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ называюцца эквівалентнымі ў ваколлі пункта $x=a$, калі ліміт іх адносіны пры $x\to a$ роўны I.

$$\left(\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1\right)\Longleftrightarrow\left(\alpha(x)\overset{x\to a}{\sim}\beta(x)\right).$$

Справядліва наступная тэарэма:

Для таго, каб дзве б.м.ф. $\alpha(x)$ і $\beta(x)$ у ваколлі пункта $x=a$ былі эквівалентнымі, неабходна і дастаткова, каб іх розніца была б.м.ф. больш высокага парадку, чым $\alpha(x)$ ці $\beta(x)$

<u>Доказ</u>. Няхай, напрыклад, $\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x)) \Leftrightarrow$

$$\alpha(x)=\beta(x)+o(\beta(x)) \quad \text{пры} \quad x\to a. \qquad (*).$$

I. <u>Неабходнасць</u>. Вядома, што $\alpha(x) \overset{x\to a}{\sim} \beta(x) \Longleftrightarrow$

$$\lim_{\forall x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1.$$

Разглядзім

$$\lim_{\forall x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=\lim_{x\to a}\left(\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1\right)=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1=1-1=0 \Longrightarrow \alpha(x)-\beta(x)\overset{x\to a}{=}o(\beta(x))$$

2. <u>Дастатковасць</u>. Вядома, што $\alpha(x)-\beta(x)\overset{x\to a}{=}o(\beta(x))$. Адсюль вынікае, што

$$\lim_{\forall x\to a}\frac{\alpha(x)-\beta(x)}{\beta(x)}=0 \Longrightarrow \lim_{\forall x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}-1=0 \Longrightarrow$$

$$\lim_{x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=1 \Longrightarrow \alpha(x)\overset{x\to a}{\sim}\beta(x).$$

<u>Заўвага</u>. З роўнасці (*) вынікае, што функцыя $\beta(x)$ з'яўляецца галоўнай часткай функцыі $\alpha(x)$ у ваколлі пункта $x=a$.

<u>Вынік</u>. Пры вылічэнні лімітаў бясконца малой функцыі можна замяняць на эквівалентныя б.м.ф., якія больш простыя.

Няхай

$$\alpha(x)\overset{x\to a}{\sim}\alpha_1(x), \quad \beta(x)\overset{x\to a}{\sim}\beta_1(x),$$

тады

$$\lim_{\forall x\to a}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\lim_{\forall x\to a}\frac{\alpha(x)}{\alpha_1(x)}\cdot\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot\frac{\beta_1(x)}{\beta(x)}=1\cdot\lim_{x\to a}\frac{\alpha_1(x)}{\beta_1(x)}\cdot 1.$$

Зазначым наступныя віды эквівалентных б.м.ф. пры $x\to 0$:

$\sin x \sim x$; $\sin 5x \sim 5x$; $tg\, x \sim x$; $\arcsin x \sim x$;

$arctg\, x \sim x$; $\ln(1+x) \sim x$; $1 - \cos x \sim x^2/2$.

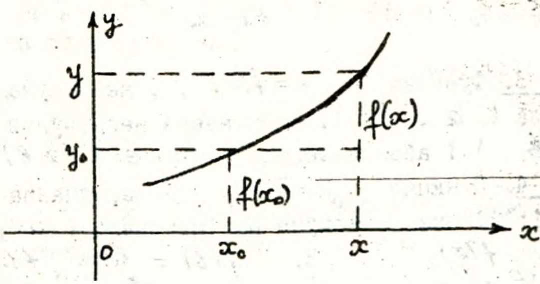
Прыклады. Вылічыць ліміты:

$$1.\ \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{\sin 5x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{3x}{5x} = \frac{3}{5} = 0,6.$$

$$2.\ \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x + arctg\, 3x} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0} \frac{x}{x+3x} = \frac{1}{4} = 0,25.$$

4.2. НЕПАРЫЎНАСЦЬ ФУНКЦЫІ.

Будзем лічыць, што функцыя $y = f(x)$ вызначана ў пункце $x = x_0$ і ў некаторым ваколлі гэтага пункта (рыс. 4.І).



Рыс. 4.І

$\Delta x = x - x_0$ - прырост аргумента, $\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f(x) - f(x_0)$ - прырост функцыі.

Азначэнне І. Функцыя $y = f(x)$ называецца непарыўнай у пункце $x = x_0$, калі бясконца малому прыросту аргумента адпавядае бясконца малы прырост функцыі.

$$\lim_{\forall \Delta x \to 0} \Delta y = 0. \qquad (I)$$

Запішам роўнасць (I) больш падрабязна:

$$\lim_{\Delta x \to 0} (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) = 0,$$

$$\lim_{\forall \Delta x \to 0} f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) \quad \text{або} \quad \lim_{\forall x \to x_0} f(x) = f(x_0). \qquad (2)$$

Азначэнне 2. Функцыя $y = f(x)$ называецца непарыўнай у пункце $x = x_0$, калі:

I. яна вызначана ў пункце $x = x_0$;

2. існуе лiмiт $\lim f(x) = b$, $x \to x_0$;

3. $f(x_0) = b = \lim_{x \to x_0} f(x)$.

З роўнасці (2) вынікае: Каб знайсці лiмiт непарыўнай функцыі пры $x \to x_0$, дастаткова ў выраз для функцыі замест x падставiць яго лiмiтнае значэнне x_0

$$\lim_{\forall x \to x_0} f(x) = f(\lim_{\forall x \to x_0} x).$$

Азначэнне 3. Функцыя $y = f(x)$, непарыўная ў кожным пункце iнтэрвала (a , b), называецца непарыўнай на iнтэрвале (a , b) i абазначаецца $f(x) \in C(a,b)$.

Азначэнне 4. Функцыя $y = f(x)$ непарыўна на адрэзку $[a,b]$, калi: I. яна непарыўна на iнтэрвале (a , b), 2. $f(a) = \lim_{x \to a+0} f(x)$ 3. $f(b) = \lim_{x \to b-0} f(x)$.

Адзначым, што ўсе асноўныя элементарныя функцыi непарыўны ў абсягу свайго вызначэння.

З азначэння непарыўнай функцыi i адпаведных уласцiвасцей лiмiтаў вынiкае, што:

I. сума, рознасць, здабытак канцоўнага лiку непарыўных функцый ёсць функцыя непарыўная;

2. дзель двух непарыўных функцый ёсць функцыя непарыўная там, дзе назоўнiк няроўны нулю;

3. складаная функцыя, якая складзена з канцоўнага ліку непарыўных функцый, есць функцыя непарыўная.

4.3. ПУНКТЫ РАЗРЫВУ.

З азначэнняў І - 2 вынікае сцвярджэнне:

Для таго, каб функцыя $y = f(x)$ была непарыўнай у пункце $x = x_0$, неабходна і дастаткова, каб выконваліся роўнасці:

$$f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = f(x_0), \qquad (2)$$

дзе

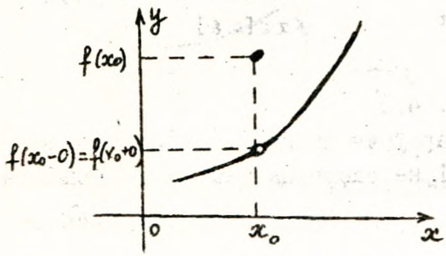
$$f(x_0 - 0) = \lim_{x \to x_0 - 0} f(x) \quad \text{- ліміт злева,} \qquad (3)$$

$$f(x_0 + 0) = \lim_{x \to x_0 + 0} f(x) \quad \text{- ліміт справа.}$$

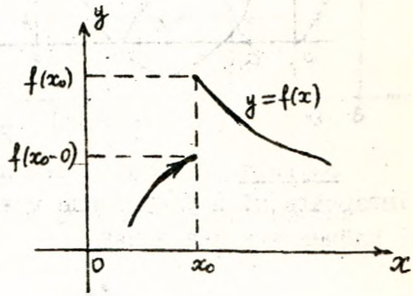
I. Дапусцім, што існуюць канцоўныя аднабаковыя ліміты (3), аднак парушана адна з роўнасцей (2)

1. Калі $f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) \neq f(x_0)$, то ў пункце $x = x_0$ разрыў скасавальны (рыс. 4.2).

2. Калі $f(x_0 - 0) \neq f(x_0 + 0) = f(x_0)$, то ў пункце разрыў першага роду (рыс. 4.3).



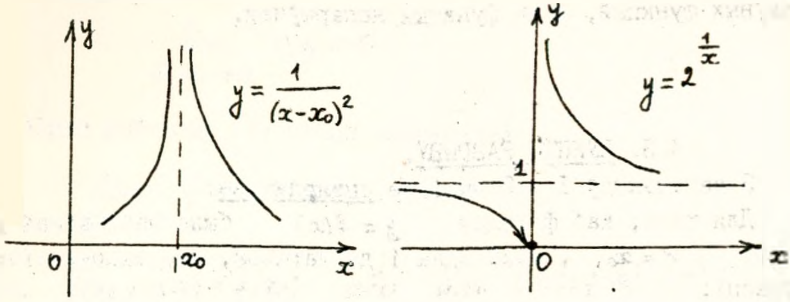
Рыс. 4.2



Рыс. 4.3

У абодвух выпадках кажуць, што функцыя мае ў пункце $x = x_0$ разрыў першага роду.

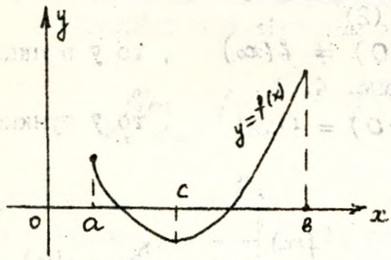
II. Калі хаця б адзін з аднабаковых лімітаў (3) ператвараецца ў бясконцасць, то кажуць, што ў пункце $x = x_0$ функцыя мае разрыў другога роду (рыс. 4.4).



Рыс. 4.4

4.4. УЛАСЦІВАСЦІ ФУНКЦЫЙ, НЕПАРЫЎНЫХ НА АДРЭЗКУ.

I. Усякая функцыя $y=f(x)\in C[a,b]$ дасягае на адрэзку $[a,b]$ свайго найбольшага і найменшага значэння (рыс. 4.5).

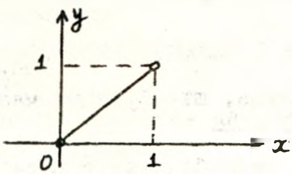


$$m=\min_{\forall x\in[a,b]} f(x)=f(c),$$

$$M=\max_{\forall x\in[a,b]} f(x)=f(b).$$

Рыс. 4.5

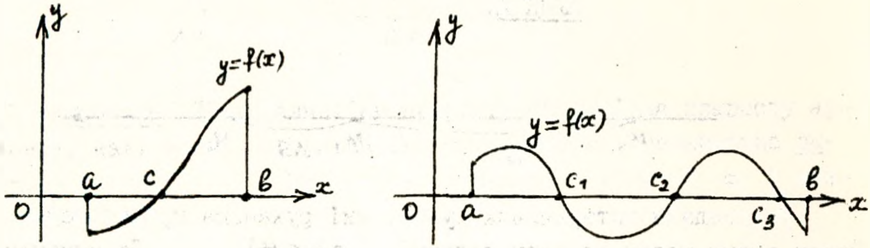
Заўвага. Адзначым, што непарыўная функцыя, зададзеная на інтэрвале ці паўінтэрвале можа і не дасягаць свайго найбольшага і найменшага значэнняў.



Рыс. 4.6

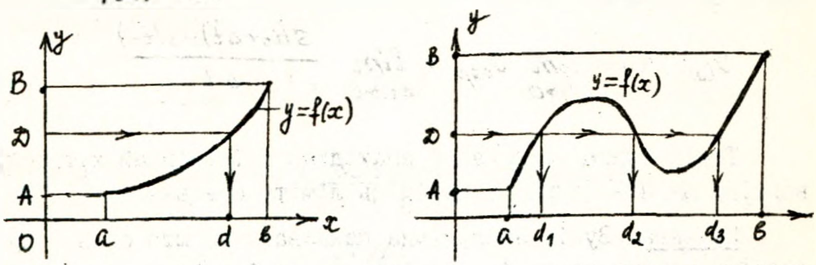
Напрыклад, функцыя $y=x$ на інтэрвале (0, I) не дасягае свайго найбольшага і найменшага значэнняў (рыс. 4.6).

2. Калі функцыя $y=f(x)\in C[a,b]$, на канцах адрэзка $[a,b]$ прымае значэнні розных знакаў, г.зн. $f(a)\cdot f(b)<0$, то ўнутры адрэзка знойдзецца хаця б адзін пункт $x=c\in(a,b)$, у якім функцыя ператвараецца ў нуль (рыс. 4.7).



Рыс. 4.7

3. Няхай функцыя $y=f(x)\in C[a,b]$, на канцах адрэзка прымае няроўныя значэнні $f(a)=A$, $f(b)=B$, $A\neq B$. Тады для $\forall D\in(A,B)$ існуе хаця б адзін пункт $d\in(a,b)$ такі, што $f(d)=D$. (рыс. 4.8).



Рыс. 4.8

Гэта значыць, што непарыўная на адрэзку функцыя прымае ўсе свае значэнні запар.

ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАЕ ЗЛІЧЭННЕ ФУНКЦЫЙ АДНОЙ ПЕРАМЕННАЙ.

5. ВЫТВОРНАЯ ФУНКЦЫІ. АСНОЎНЫЯ ТЭАРЭМЫ АБ ВЫТВОРНЫХ.

5.I. ЗАДАЧА АБ ІМГНЕННАЙ ХУТКАСЦІ МАТЭРЫЯЛЬНАГА ПУНКТА.

Разгледзім матэрыяльны пункт, які рухаецца прамалінейна. Закон змены шляху ад часу вядомы $s = s(t)$. Да моманту часу t_0 адлегласць, якую пройдзе матэрыяльны пункт, будзе роўна $s_0 = s(t_0)$, а да моманту часу $t_1 = t_0 + \Delta t \to s_1 = s(t_1)$. Значыць за Δt будзе пройдзена $s_1 - s_0 = \Delta s = s(t_0+\Delta t) - s(t_0)$.

Сярэдняя хуткасць руху за час Δt $v_{сяр} = \Delta s / \Delta t$. Пераходзім да ліміту, калі $\Delta t \to 0$, атрымаем імгненную хуткасць у момант часу t_0:

$$v_{імг}(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} v_{сяр} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{s(t_0+\Delta t) - s(t_0)}{\Delta t}. \qquad (1)$$

Такім чынам, задача аб знаходжанні імгненнай хуткасці прыводзіць да неабходнасці вылічаць ліміты спецыяльнага віду (I).

Заўвага. Зусім аналагічна паказваецца, што сіла току J у дадзены момант часу t вылічаецца па формуле

$$J_{імг} = \lim_{\Delta t \to 0} J_{сяр} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{q(t+\Delta t) - q(t)}{\Delta t}, \qquad (2)$$

дзе $q = q(t)$ – колькасць электрычнасці, якая праходзіць праз папярочнае сячэнне праваднікa ў момант часу t.

5.2. <u>АЗНАЧЭННЕ ВЫТВОРНАЙ</u>.

Разглядзім адвольную непарыўную функцыю $y=f(x)$. Дадзім x прырост $x+\Delta x$ і знойдзем значэнне функцыі $f(x+\Delta x)$. Вылічым прырост функцыі $\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$. Возьмем адносіну прыросту функцыі да прыросту аргумента

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

<u>Азначэнне</u>. Ліміт адносіны прыросту функцыі да прыросту аргумента, калі апошні адвольна імкнецца да нуля, называецца <u>вытворнай</u> функцыі $y=f(x)$ у пункце з абцысай x і абазначаецца

$$y' = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} = f'(x).$$

Функцыя, якая мае вытворную ў пункце x, называецца <u>дыферэнцавальнай</u> у гэтым пункце. Значыць формулу (1) можна перапісаць наступным чынам

$$v_{імг}(t_0) = s'(t_0). \tag{3}$$

Формула (3) высвятляе <u>механічны сэнс вытворнай</u>.

Формулу (2) можна перапісаць наступным чынам

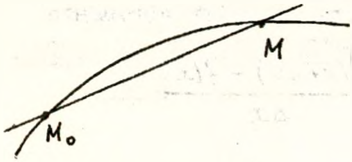
$$J_{імг} = q'(t). \tag{4}$$

Формула (4) высвятляе <u>фізічны сэнс вытворнай</u>.

У агульным выпадку <u>вытворная ёсць хуткасць змянення функцыі ў дадзеным пункце</u>.

5.3. ГЕАМЕТРЫЧНЫ СЭНС ВЫТВОРНАЙ.

Дадзена некаторая крывая. M_0 - фіксаваны пункт, M - зменлівы пункт. Прамая M_0M называецца сякучай (рыс. 5.I).

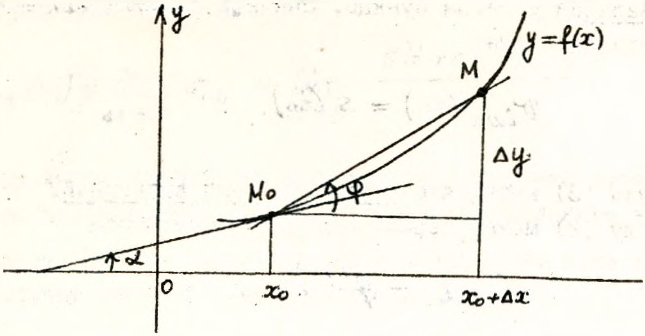


Рыс. 5.I

Няхай пункт M імкнецца да пункта M_0, застаючыся на крывой.

Азначэнне. Лімітнае становішча сякучай M_0M, калі $M \to M_0$ уздоўж крывой, называецца датычнай да крывой у пункце M_0.

Разгледзім у прамавугольнай сістэме каардынат лінію, зададзеную ураўненнем $y=f(x)$ (рыс. 5.2).



Рыс. 5.2

$$M_0\,(x_0, f(x_0)) \quad , \qquad M\,(x_0+\Delta x, f(x_0+\Delta x))$$

$$f(x_0+\Delta x)-f(x_0)=\Delta y,$$

$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=tg\varphi$ - тангенс вугла нахілу сякучай.

Няхай $\Delta x \to 0$, $M \to M_0$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{M \to M_0} tg\varphi \; ; \quad y' = f'(x_0) = tg\alpha = k_{дат.}$$

Такім чынам, вытворная у пункце есць тангенс вугла пахілу датычнай, г.зн. вуглавы каэфіцыент датычнай да лініі $y = f(x)$ у пункце $M_0(x_0, f(x_0))$.

Запішам ураўненне датычнай да лініі $y = f(x)$ у пункце M_0:

$$y - f(x_0) = f'(x_0) \cdot (x - x_0) \, ,$$

ураўненне нармалі да лініі $y = f(x)$ у пункце M_0 :

$$y - f(x_0) = - \frac{1}{f'(x_0)} (x - x_0) \, .$$

Заўвага. Эканамічны сэнс вытворнай.
У эканоміцы ўводзяць $\gamma = \gamma(t)$ - функцыю дыскантавання, якая улічвае паніжэнне $\gamma'(t) < 0$ (павелічэнне $\gamma'(t) > 0$) якасці прадукта па меры яго захоўвання.

5.4. СУВЯЗЬ ПАМІЖ ДЫФЕРЭНЦАВАЛЬНАСЦЮ І НЕПАРЫЎНАСЦЮ ФУНКЦЫЙ.

Калі існуе вытворная $f'(x_0)$, то функцыя $f(x)$ называецца дыферэнцавальнай у пункце x_0 ; калі функцыя дыферэнцавальная ў любым пункце інтэрвала, то яна дыферэнцавальная на інтэрвале.

Тэарэма. Калі функцыя дыферэнцавальная ў пункце x_0 , то яна непарыўна ў ім.

Доказ. Дадзена, што існуе $f'(x_0)$, г. зн.

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \iff \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x), \quad дзе \; \alpha(\Delta x) -$$

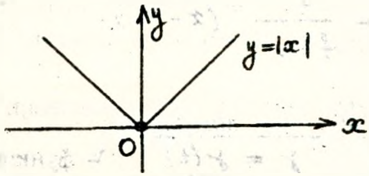
б.м.ф. пры $\Delta x \to 0$

$$\Delta y = f'(x_0)\cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x$$

$\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = f(x)$ - непарыўна пры $x = x_0$.

<u>Вынік</u>. Разрыўная ў пункце x_0 функцыя не мае вытворнай.

<u>Заўвага</u>. Адваротнае сцвярджэнне, што функцыя, непарыўная ў пункце, дыферэнцавальная ў ім, наогул кажучы, памылковае. Напрыклад, функцыя $y = |x|$ непарыўна ва ўсіх пунктах. У пункце $x_0 = 0$ існуюць левабаковая і правабаковая датычныя, а агульнай датычнай у пункце $x_0 = 0$ няма.



Адзначым, што існуюць усюды непарыўныя функцыі, нідзе не маючыя вытворнай.

5.5. <u>АСНОЎНЫЯ ТЭАРЭМЫ АБ ВЫТВОРНЫХ.</u>

<u>Тэарэма.1</u>. Вытворная ад пастаяннай функцыі роўна 0.

$$y = C = const \quad \Rightarrow \quad y' = 0.$$

<u>Тэарэма 2</u>. Пастаянны множнік можна выносіць за знак вытворнай.

$$y = C\cdot f(x),\ C = const \quad \Rightarrow \quad y' = C\cdot f'(x).$$

<u>Тэарэма 3</u>. Вытворная ад алгебраічнай сумы дыферэнцавальных функцый роўна алгебраічнай суме іх вытворных.

$$y = u(x) \pm v(x) \quad \Rightarrow \quad y' = u'(x) \pm v'(x).$$

Тэарэма 4. Вытворная ад здабытку двух дыферэнцавальных функцый роўна суме здабыткаў вытворнай ад першай функцыі на другую і першай функцыі на вытворную другой функцыі.

$$y = u(x)\cdot v(x) \quad \Longrightarrow \quad y' = u'(x)\cdot v(x) + u(x)\cdot v'(x).$$

Тэарэма 5. Вытворная ад адносіны двух дыферэнцавальных функцый роўна дробу, назоўнік якога роўны квадрату назоўніка дадзенага дробу, а лічнік роўны розніцы здабыткаў вытворнай лічніка на назоўнік і вытворнай назоўніка на лічнік.

$$y = \frac{u(x)}{v(x)} \Longrightarrow \quad y' = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)}, \; v(x) \neq 0.$$

Доказ гэтых тэарэм аснаваны на азначэнні вытворнай і адпаведных тэарэмах аб лімітах.

Доказ тэарэмы 5.

$$y = \frac{u(x)}{v(x)}, \quad u(x) \text{ і } v(x) \text{ - дыферэнцавальныя функцыі }, \; v(x) \neq 0.$$

$$\Delta y = y(x+\Delta x) - y(x) = \frac{u(x+\Delta x)}{v(x+\Delta x)} - \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)+\Delta u}{v(x)+\Delta v} -$$

$$- \frac{u(x)}{v(x)} = \frac{u(x)\cdot v(x) + v(x)\cdot \Delta u - u(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot \Delta v}{(v(x)+\Delta v)\cdot v(x)} =$$

$$= \frac{v(x)\cdot \Delta u - u(x)\cdot \Delta v}{(v(x)+\Delta v)\cdot v(x)}.$$

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{v(x)\cdot \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\cdot \frac{\Delta v}{\Delta x}}{(v(x)+\Delta v)\cdot v(x)} =$$

$$= \frac{v(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} - u(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta x}}{v(x)\cdot \lim\limits_{\Delta x \to 0} (v(x)+\Delta v)} = \frac{u'(x)\cdot v(x) - u(x)\cdot v'(x)}{v^2(x)},$$

$v(x)$ - дыферэнцавальная $\Rightarrow$ $v(x)$ - непарыўная функцыя

$$\Rightarrow \lim_{\Delta x \to 0} \left(v(x) + \Delta v \right) = v(x) + \lim_{\Delta x \to 0} \Delta v = v(x).$$

Заўвага. Пры знаходжанні вытворнай ад дробу віда $\dfrac{u(x)}{c}$ зручна карыстацца правілам:

$$\left(\frac{u(x)}{c} \right)' = \left(\frac{1}{c} u(x) \right)' = \frac{1}{c} u'(x), \quad 0 \neq c = const.$$

6. ВЫТВОРНЫЯ АД ЭЛЕМЕНТАРНЫХ СКЛАДАНЫХ І НЯЯЎНА ЗАДАДЗЕНЫХ ФУНКЦЫЙ.

6.І. ВЫТВОРНЫЯ НЕКАТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦЫЙ.

Справядлівы наступныя формулы:

1. $y = x^n$ $\quad y' = n x^{n-1}, \; n \in N.$

2. $y = \sin x$ $\quad y' = \cos x$

3. $y = \cos x$ $\quad y' = -\sin x$

4. $y = tg\, x$ $\quad y' = \dfrac{1}{\cos^2 x}, \quad x \neq \dfrac{\pi}{2} + k\pi, \; k \in Z$

5. $y = ctg\, x$ $\quad y' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}, \quad x \neq k\pi, \; k \in Z$

Дакажам адну з іх. Няхай $y = \sin x$. Дадзім аргументу x прырост Δx, тады функцыя y зменіцца на велічыню $\Delta y = \sin(x + \Delta x) - \sin x$. Па азначэнню

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin(x+\Delta x) - \sin x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{2\sin\frac{\Delta x}{2} \cdot \cos\frac{2x+\Delta x}{2}}{\Delta x} =$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\sin\frac{\Delta x}{2}}{\frac{\Delta x}{2}} \cdot \lim_{\Delta x \to 0} \cos\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right) = 1 \cdot \cos\left(\lim_{\Delta x \to 0}\left(x + \frac{\Delta x}{2}\right)\right) =$$

$$= 1 \cdot \cos x. \qquad (\sin x)' = \cos x.$$

Прыклад. Знайсцi вытворную функцыi

$$y = 4 + 2x^5 + \frac{\cos x}{3} - \frac{\operatorname{tg} x}{x^2}.$$

$$y' = 0 + 2\cdot 5x^4 + \frac{1}{3}\cdot(-\sin x) - \frac{\frac{1}{\cos^2 x}\cdot x^2 - 2x\cdot \operatorname{tg} x}{x^4} =$$

$$= 10x^4 - \frac{\sin x}{3} - \frac{1}{x^2\cos^2 x} + \frac{2\operatorname{tg} x}{x^3}.$$

6.2. ВЫТВОРНАЯ СКЛАДАНАЙ ФУНКЦЫI.

Няхай $y = f(u)$, дзе $u = \varphi(x)$, г.зн. $y = f(\varphi(x))$.

Аднос iна функцый $y = f(u)$ i $u = \varphi(x)$ будзем лiчыць, што яны дыферэнцавальныя ў разгледжаных абсягах. Пры гэтым функцыя $u = \varphi(x)$ называецца прамежкавым аргументам.

Сапраўдна наступная тэарэма:

Вытворная складанай функцыi роўна вытворнай гэтай функцыi па прамежкаваму аргументу, множанай на вытворную прамежкавага аргумента па незалежнай пераменнай.

$$y'_x = y'_u \cdot u'_x = f'_u(u) \cdot \varphi'_x(x). \qquad (1)$$

<u>Доказ</u>. Дадзім аргументу x прырост Δx, тады функцыя $u=\varphi(x)$ атрымае прырост Δu, што выкліча змяненне функцыі $y=f(u)$ на велічыню Δy. Па ўмове функцыі $u=\varphi(x)$ і $y=f(u)$ дыферэнцавальныя, значыць яны будуць непарыўнымі ў разгледжаных абсягах, а гэта значыць, што бясконца маламу прыросту іх аргументаў будуць адпавядаць бясконца малыя прыросты функцый: $(\Delta x \to 0) \Rightarrow (\Delta u \to 0) \Rightarrow (\Delta y \to 0)$.

Па азначэнню

$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=y'_u\cdot u'_x.$$

што і трэба было даказаць.

<u>Прыклад</u>.

$$y=\sin(3x^5),\quad y=\sin u,\ \text{дзе}\ u=3x^5.$$

$$y'_x=\cos u\cdot 15x^4=15x^4\cdot\cos(3x^5).$$

<u>Заўвага</u>. Аналагічна вылічаецца вытворная ад складаной функцыі, якая састаўлена з ланцужка ў тры і больш функцый.

Няхай $y=F(u)$, $u=f(v)$, $v=\varphi(x)$. Тады

$$y'_x=y'_u\cdot f'_v\cdot v'_x=F'_u\cdot f'_v\cdot\varphi'_x. \qquad (2)$$

<u>Прыклад</u>.

$$y=\operatorname{ctg}^3(2x^7)=\left(\operatorname{ctg}(2x^7)\right)^3$$

$$y'_x=3\operatorname{ctg}^2(2x^7)\cdot\frac{-1}{\sin^2(2x^7)}\cdot 14x^6=\frac{-42x^6\operatorname{ctg}^2(2x^7)}{\sin^2(2x^7)}.$$

6.3. <u>ВЫТВОРНАЯ ЛАГАРЫФМІЧНАЙ ФУНКЦЫІ</u>.

Няхай
$$y=\log_a x,\ x>0,\ 0<a\neq 1.$$
Пакажам, што
$$y'=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$
$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}.$$

<u>Доказ</u>. Дадзім аргументу x прырост Δx, тады функцыя y атрымае прырост
$$\Delta y=\log_a(x+\Delta x)-\log_a x=\log_a\frac{x+\Delta x}{x}=\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right).$$

$$y'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\Delta x}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\log_a\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=$$

$$=\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{1}{\Delta x}}=\log_a\lim_{\Delta x\to 0}\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^{\frac{x}{\Delta x}\cdot\frac{1}{x}}=$$

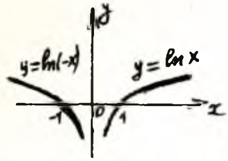
$$=\log_a e^{\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}\log_a e=\frac{1}{x\ln a}.$$

<u>Заўвага</u>. Адзначым, што пры доказе формулы для вытворнай мы акрамя другога грунтоўнага ліміта выкарысталі тый факт, што пры знаходжанні ліміта непарыўнай функцыі аперацыі знаходжання ліміта і функцыі можна мяняць месцамі.

<u>Вынік</u>. Няхай $a=e$,
$$y=\ln x \implies y'=\frac{1}{x}$$
$$(\ln x)'=\frac{1}{x}.$$

Сярод усіх лагарыфмічных функцый вытворная ад натуральнага лагарыфма найбольш простая.

6.4. <u>ВЫТВОРНАЯ ФУНКЦЫІ</u> $y=\ln|x|,\ x\neq 0.$



$$(\ln|x|)'=\frac{1}{x},\quad x\neq 0.$$

<u>Доказ</u>. I) Калі $x>0$, $|x|=x$, $y=\ln x \Rightarrow$

$y'=\frac{1}{x}$, гэта даказалі раней.

2) $x<0,\quad |x|=-x,\quad y=\ln(-x)\Rightarrow y=\ln u,\ u=-x.$

$$y'_x=y'_u\cdot u'_x=\frac{1}{u}\cdot(-1)=\frac{1}{-x}\cdot(-1)=\frac{1}{x}.$$

6.5. <u>ВЫТВОРНАЯ ПАКАЗНІКАВАЙ ФУНКЦЫІ</u>.

Няхай $y=a^x$, $0<a\neq 1$, , тады $y'_x=a^x\ln a.$

<u>Доказ</u>. $y=a^x \Rightarrow \ln y=x\cdot\ln a$

Прадыферэнцуем гэту роўнасць з улікам, што y есць функцыя ад x .

$$\frac{1}{y}\cdot y'_x=\ln a\cdot 1 \Rightarrow y'_x=y\cdot\ln a=a^x\ln a$$

$$(a^x)'=a^x\cdot\ln a.$$

<u>Вынік</u>. Пры $a=e$ $y=e^x \Rightarrow (e^x)'=e^x.$

6.6. <u>ВЫТВОРНАЯ СТУПЕНЕВАЙ ФУНКЦЫІ</u>.

Няхай $y=x^n,\ \forall n\in\mathbb{R} \Rightarrow y'=n\,x^{n-1}$

$$(x^n)'=n\cdot x^{n-1}.$$

Доказ. $$y = x^n \Rightarrow |y| = |x^n| = |x|^n \Rightarrow$$

$$\ln|y| = n \ln|x| \Rightarrow \frac{1}{y} \cdot y'_x = n \cdot \frac{1}{x} \Rightarrow$$

$$y'_x = \frac{n}{x} \cdot y = \frac{n}{x} \cdot x^n = n \cdot x^{n-1}.$$

Прыклад. $$y = \frac{1}{\sqrt[3]{x}} = x^{-\frac{1}{3}}$$

$$y' = -\frac{1}{3} x^{-\frac{4}{3}} = -\frac{1}{3x\sqrt[3]{x}}.$$

Заўвага. Калі патрабуецца знайсці вытворную ад ступенева-паказнікавай функцыі $y = u(x)^{v(x)}$, то спачатку гэту функцыю лагарыфмуюць, а потым дыферэнцуюць.

Прыклад. $$y = x^{\cos x}, \quad x > 0, \quad y' = ?$$

$$\ln y = \cos x \cdot \ln x \Leftrightarrow \frac{1}{y} \cdot y'_x = -\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}$$

$$y'_x = \left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right) \cdot y = x^{\cos x}\left(-\sin x \cdot \ln x + \frac{\cos x}{x}\right).$$

6.7. ВЫТВОРНАЯ АД ФУНКЦЫІ, ЗАДАДЗЕНАЙ НЯЯЎНА.

Няхай y як функцыя ад x зададзена няяўна ураўненнем $F(x,y) = 0$ (3). Для таго, каб знайсці вытворную y'_x, трэба прадыферэнцаваць абедзве часткі ураўнення (3), улічваючы пры гэтым, што y ёсць функцыя ад x.

Прыклад. Знайсці y'_x улічваючы, што y як функцыя ад x зададзена ў няяўным выглядзе ураўненнем

$$x^3 + \cos y + \sin x + e^y = 0, \quad y = f(x).$$

$$3x^2 - \sin y \cdot y'_x + \cos x + e^y \cdot y'_x = 0$$

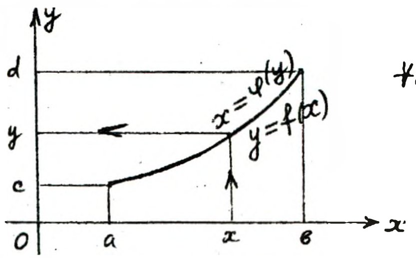
$$y'_x \cdot (e^y - \sin y) = -(3x^2 + \cos x)$$

$$y'_x = \frac{dy}{dx} = \frac{3x^2 + \cos x}{\sin y - e^y}.$$

7. АДВАРОТНЫЯ І ПАРАМЕТРЫЧНА ЗАДАДЗЕНЫЯ ФУНКЦЫІ І ІХ ДЫФЕРЭНЦАВАННЕ.

7.І. АСНОЎНЫЯ АЗНАЧЭННІ.

Няхай на адрэзку $[a, b]$ зададзена непарыўная манатонна нарастальная ці манатонна спадальная функцыя $y = f(x)$, пры гэтым $y = f(a) = c$, $y = f(b) = d$. Праз непарыўнасць і манатоннасць функцыі $y = f(x)$ кожнаму значэнню $x \in [a, b]$ адпавядае адно вызначанае значэнне $y \in [c, d]$ (рыс. 7.І).



$\forall x \in [a, b] \ \exists! \ y \in [c, d]$.

Рыс. 7.1

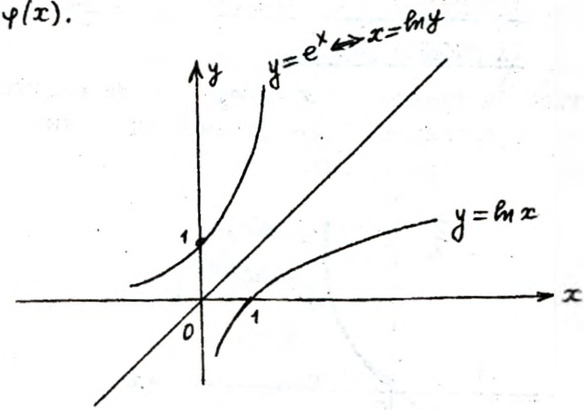
Праўдзіва таксама і адваротнае сцвярджэнне: кожнаму $y \in [c, d]$ адпавядае адно вызначанае значэнне $x \in [a, b]$. Калі лічыць y - незалежным аргументам, то x будзе функцыяй ад y.

$$x = \varphi(y), \quad y \in [c, d].$$

Функцыі $y=f(x)$ і $x=\varphi(y)$ называюцца <u>ўзаемна адваротнымі</u>. На плоскасці xOy узаемна адваротныя функцыі $y=f(x)$ і $x=\varphi(y)$ вызначаюць адну і тую крывую лінію (рыс. 7.1). Калі ўраўненне функцыянальнай залежнасці $y=f(x)$ можна вырашыць адносна x, то мы атрымаем выраз для ўзаемна адваротнай функцыі $x=\varphi(y)$

<u>Заўвага</u>. Калі ў роўнасці $x=\varphi(y)$ замяніць месцамі x і y, то функцыі $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ будуць вызначаць графікі розных ліній, сіметрычных адносна бісектрысы І і ІІІ каардынатных вуглоў (рыс. 7.2.).

Напрыклад,
$$y=e^x=f(x), \quad x=\ln y=\varphi(y),$$
$$y=\ln x=\varphi(x).$$



Рыс. 7.2

7.2. <u>ВЫТВОРНАЯ АДВАРОТНАЙ ФУНКЦЫІ</u>.

<u>Тэарэма</u>. Вытворныя ўзаема адваротных функцый адваротны па велічыні.

<u>Доказ</u>. Будзем лічыць, што ўзаемна адваротныя функцыі $y=f(x)$ і $x=\varphi(y)$ дыферэнцавальныя ў сваіх абсягах вызначэння. З дыферэнцавальнасці гэтых функцый вынікае іх непарыўнасць, г.зн.
$$(\Delta x \to 0) \Leftrightarrow ((\Delta y) \to 0).$$

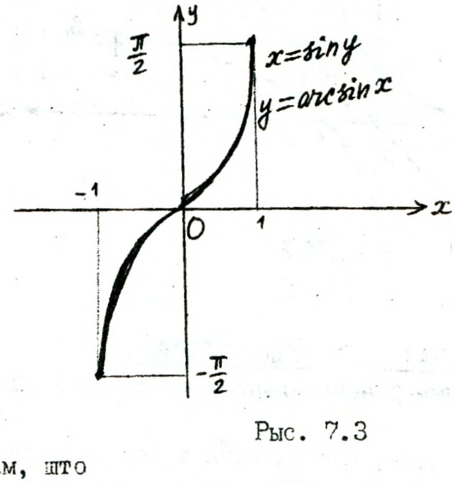
$$y'(x)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{1}{\frac{\Delta x}{\Delta y}}=\frac{1}{\lim\limits_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta x}{\Delta y}}=$$

$$=\frac{1}{x'(y)}\ ,\quad x'(y)\neq 0.$$

Такім чынам, $y'_x=\frac{1}{x'_y}$, $x'_y\neq 0$, што і трэба было даказаць.

7.3. АДВАРОТНЫЯ ТРЫГАНАМЕТРЫЧНЫЯ ФУНКЦЫІ І ІХ ДЫФЕРЭНЦАВАННЕ.

І. Разгледзім функцыю $x=\sin y$. На адрэзку $y\in\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ яна манатонна нарастальная і мае ўзаемна адваротную функцыю $y=\arcsin x$ (рыс. 7.3).



Рыс. 7.3

Дакажам, што

$$(\arcsin x)'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ ,\quad \forall x\in(-1,1).$$

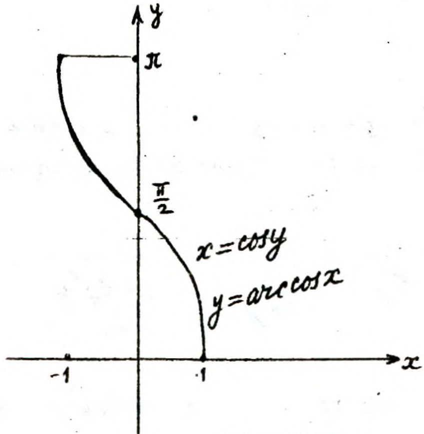
Доказ. Запішам дзве ўзаемна адваротныя функцыі $y = \arcsin x$ і $x = \sin y$

З тэарэмы аб дыферэнцаванні гэтых функцый вынікае, што

$$y'_x = (\arcsin x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1.$$

2. Функцыя $x = \cos y$ для $y \in [0, \pi]$ манатонна спадальная, таму мае ўзаемна адваротную функцыю $y = \arccos x$ (рыс. 7.4).

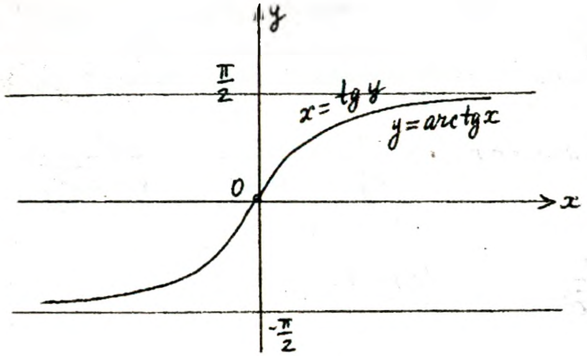


Рыс. 7.4

Тэарэтычнае практыкаванне. Даказаць самастойна, што

$$y'_x = (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad |x| < 1$$

3. Функцыя $x = \operatorname{tg} y$ манатонна нарастальная для $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ і мае ўзаемна адваротную функцыю $y = \operatorname{arctg} x$, якая азначана для ўсіх $x \in R$ (рыс. 7.5).



Рыс. 7.5

Дакажам, што

$$(arc\,tg\,x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

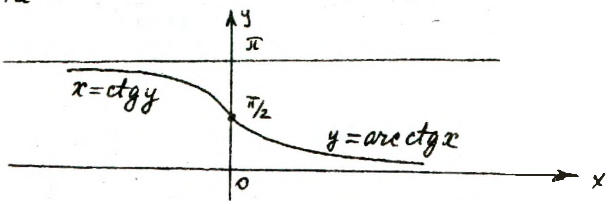
Доказ. Паколькі $y = arctg\,x$ і $x = tg\,y$ -узаемна адваротныя функцыі, то па тэарэме аб іх дыферэнцаванні маем

$$y'_x = (arctg\,x)' = \frac{1}{x'_y} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 y}} = \frac{1}{1+tg^2 y} = \frac{1}{1+x^2}, \forall x \in R.$$

4. Аналагічным чынам для $x = ctg\,y, \quad y \in (0, \pi)$ азначаецца узаемна адваротная функцыя $y = arc\,ctg\,x, \quad x \in R$ (рыс. 7.6).

Тэарэтычнае практыкаванне. Даказаць самастойна, што

$$(arcctg\,x)' = \frac{-1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$



Рыс. 7.6.

7.4. ТАБЛІЦА АСНОЎНЫХ ВЫТВОРНЫХ.

	$y=f(x)$	$y'=f'(x)$
1	$y=C$, C - $\forall$ const	$y'=0$
2	$y=x^{\alpha}$, $\alpha\in R$	$y'=\alpha\cdot x^{\alpha-1}$
3	$y=\sin x$	$y'=\cos x$
4	$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
5	$y=tg\,x$	$y'=\frac{1}{\cos^2 x}$, $x\neq\frac{\pi}{2}+k\pi, k\in Z$
6	$y=ctg\,x$	$y'=\frac{-1}{\sin^2 x}$, $x\neq k\pi$, $k\in Z$
7	$y=\arcsin x$	$y'=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$
8	$y=\arccos x$	$y'=\frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$, $\lvert x\rvert<1$
9	$y=arctg\,x$	$y'=\frac{1}{1+x^2}$
10	$y=arcctg\,x$	$y'=\frac{-1}{1+x^2}$
11	$y=a^x$	$y'=a^x\ln a$, $0<a\neq1$
12	$y=\log_a x$	$y'=\frac{1}{x\ln a}$, $x>0$; $0<a\neq1$
13	$y=sh\,x$	$y'=ch\,x$
14	$y=ch\,x$	$y'=sh\,x$
15	$y=th\,x$	$y'=\frac{1}{ch^2 x}$
16	$y=cth\,x$	$y'=-\frac{1}{sh^2 x}$

7.5. ПАРАМЕТРЫЧНА ЗАДАДЗЕНЫЯ ФУНКЦЫІ І ІХ ДЫФЕРЭНЦАВАННЕ.

Няхай y як функцыя ад x зададзена параметрычна роўнасцямі

$$\begin{cases} y=\psi(t), \\ x=\varphi(t) \end{cases} \qquad \alpha \le t \le \beta \qquad (1)$$

Калі параметр t будзе змяняцца на адрэзку $[\alpha,\beta]$, то ў адпаведнасці з роўнасцямі (1) будуць змяняцца x і y, і пункт з каардынатамі (x , y) акрэсліць на плоскасці некаторую лінію.

Ураўненні (1) называюцца <u>параметрычнымі</u> ураўненнямі гэтай лініі. Адносна функцый $\varphi(t)$ і $\psi(t)$ умовімся лічыць іх дыферэнцавальнымі на адрэзку $[\alpha,\beta]$, пры гэтым $\varphi'(t)\neq 0$ $t\in[\alpha,\beta]$.

Апошняя нароўнасць азначае, што на адрэзку $[\alpha,\beta]$ функцыя $x=\varphi(t)$ ці манатонна нарастае $(\varphi'(t)>0)$, ці манатонна спадае $(\varphi'(t)<0)$. У любым выпадку для манатоннай функцыі існуе ўзаемна адваротная функцыя $t=\Phi(x)$. Тады роўнасці (1) будуць раўназначны судачыненням

$$y=\psi(t),\quad t=\Phi(x) \qquad \Longleftrightarrow \qquad y=\psi(\Phi(x)).$$

Прадыферэнцуем апошнюю роўнасць як складаную функцыю:

$$y'_x=y'_t\cdot t'_x$$

Паколькі вытворныя ўзаемна адваротных функцый адваротны па велічыні, г. зн. $t'_x=\dfrac{1}{x'_t}$, то з папярэдняй роўнасці атрымаем

$$y'_x=\frac{y'_t}{x'_t}=\frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}. \qquad (2)$$

Запішам формулу (2) у выглядзе, які дазволіць высветліць прынцып дыферэнцавальнасці параметрычных функцый.

$$(y)'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(y)'_t}{x'_t} \qquad (2')$$

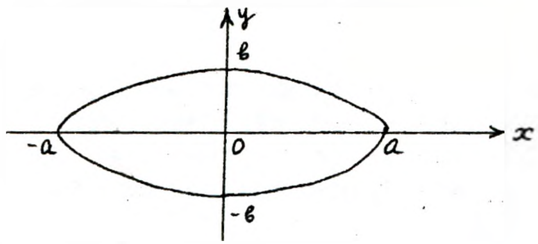
<u>Прыклад</u>. Знайсці вытворную, калі y як функцыя ад x зададзена параметрычна роўнасцямі

$$\begin{cases} x = a\cos t, \\ y = b\sin t. \end{cases} \quad 0 \le t \le 2\pi \qquad (3)$$

Відавочна, што гэтыя роўнасці на плоскасці xOy азначаюць эліпс (рыс. 7.7).

$$\cos t = \frac{x}{a}, \quad \sin t = \frac{y}{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{b\cos t}{-a\sin t} = -\frac{b}{a}\,\mathrm{ctg}\,t, \quad \forall t \in (0, 2\pi).$$



Рыс. 7.7

8. <u>ДЫФЕРЭНЦЫЯЛ ФУНКЦЫІ І ЯГО ПРЫМЯНЕННЕ. ВЫТВОРНЫЯ І ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЫ ВЫШЭЙШЫХ ПАРАДКАЎ</u>.

8.1. <u>ДЫФЕРЭНЦЫЯЛ ФУНКЦЫІ</u>.

Дапусцім, што функцыя $y=f(x)$ дыферэнцавальная на інтэрвале (a, b), гэта значыць, што для $\forall x \in (a,b)$

$$\exists \lim_{\forall \Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x). \qquad (1)$$

З існавання ліміта (1) вынікае, што сама адносіна $\Delta y / \Delta x$ адрозніваецца ад свайго ліміта $f'(x)$ на бясконца малую функцыю адносна Δx :

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) + \alpha(\Delta x), \quad \text{дзе} \quad \lim_{\forall \Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0 \qquad (2)$$

$$\text{З (2)} \implies \Delta y = f'(x)\cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\cdot \Delta x \qquad (3)$$

З роўнасці (3) відавочна, што прырост дыферэнцавальнай функцыі мае выгляд двух складнікаў, з якіх першы з'яўляецца лінейным адносна прыросту Δx аргумента x , а другі складнік есць бясконца малая функцыя адносна Δx больш высокага парадку, чым першы.
Сапраўдны

$$\lim_{\forall \Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)\cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\forall \Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 0.$$

<u>Азначэнне</u>. Галоўная лінейная частка прырроста функцыі, роўная здабытку вытворнай гэтай функцыі на прырост аргумента, называецца <u>дыферэнцыялам</u> функцыі і абазначаецца

$$dy \equiv df(x) = f'(x)\cdot \Delta x. \qquad (4)$$

Знойдзем дыферэнцыял функцыі $y = x$. З формулы (4) вынікае $dy = dx = 1 \cdot \Delta x \Rightarrow dx = \Delta x$, г. зн. дыферэнцыял незалежнай пераменнай супадае з яе прыростам.

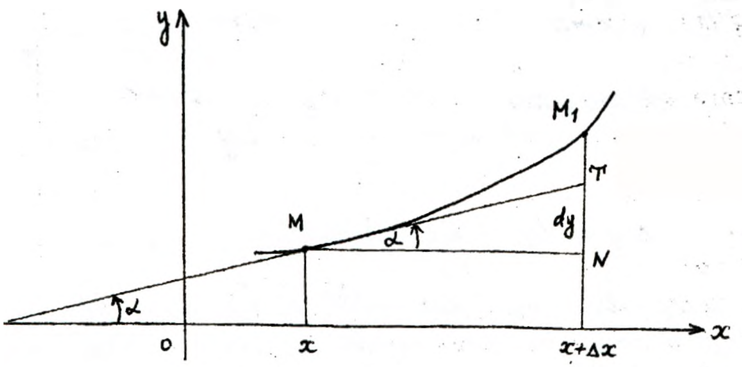
З улікам гэтага роўнасць (4) запішацца ў выглядзе

$$dy \equiv df(x) = f'(x)\, dx = y'_x\, dx \qquad (5)$$

З (5) $\Rightarrow$ $y'_x = \dfrac{dy}{dx}$.

Такім чынам, вытворная функцыі роўна адносіне дыферэнцыяла функцыі да дыферэнцыяла аргумента.

8.2. ГЕАМЕТРЫЧНЫ СЭНС ДЫФЕРЭНЦЫЯЛА.



Рыс. 8.I

$y = f(x)$ $\quad M(x, f(x))$, $\quad M_1(x+\Delta x, f(x+\Delta x))$

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

$M_1N = \Delta y$. $\quad$ З $\Delta MNT \Rightarrow \dfrac{TN}{MN} = \dfrac{TN}{\Delta x} = tg\alpha = f'(x)$.

$$TN = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Такім чынам, пры выбраных x і Δx дыферэнцыял функцыі роўны прыросту ардынаты датычнай (рыс. 8.1). Гэта і ёсць геаметрычны сэнс дыферэнцыяла.

8.3. ПРЫМЯНЕННЕ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛА Ў НАБЛІЖАНЫХ ВЫЛІЧЭННЯХ.

Дакажам цяпер, што калі $f'(x) \neq 0$, то Δy і dy пры $\Delta x \to 0$ эквівалентны. Сапраўды,

$$\lim_{\forall \Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{dy} = \lim_{\forall \Delta x \to 0} \left(1 + \frac{\alpha(\Delta x) \cdot \Delta x}{f'(x) \cdot \Delta x}\right) = 1 + \lim_{\forall \Delta x \to 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{f'(x)} =$$

$$= 1 + \frac{1}{f'(x)} \cdot \lim_{\forall \Delta x \to 0} \alpha(\Delta x) = 1 + \frac{1}{f'(x)} \cdot 0 = 1.$$

З гэтага вынікае, што $\Delta y \sim dy$, $\Delta x \to 0$.
Улічваючы формулу (4), судачыненне (3) для Δy запішам у выглядзе:

$$\Delta y = dy + \alpha(\Delta x) \cdot \Delta x. \qquad (6)$$

Т. я. $\Delta y \sim dy$ пры $\Delta x \to 0$, то пры малых Δx другі складнік у роўнасці (6) будзе малым. Адкінем яго, тады замест дакладнай роўнасці (6) атрымаем набліжаную роўнасць

$$\Delta y \approx dy \qquad (7)$$

Заменім Δy і dy іх поўнымі выразамі

$$f(x+\Delta x) - f(x) \approx f'(x) \cdot \Delta x \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x) \cdot \Delta x. \qquad (8)$$

Формула (8) шырока выкарыстаўваецца для набліжанага вылічэння функцый і дае здавальняючую дакладнасць пры малых Δx .

Прыклад. Няхай

$$f(x)=\sqrt{x}\ , \quad f(x+\Delta x)=\sqrt{x+\Delta x}.$$

$$f'(x)=(\sqrt{x})'=\frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

$$3\ (8)\Longrightarrow \qquad \sqrt{x+\Delta x}\approx\sqrt{x}+\frac{1}{2\sqrt{x}}\cdot\Delta x.$$

$$x=1 \qquad \sqrt{1+\Delta x}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot\Delta x.$$

$$\sqrt{1{,}08}=\sqrt{1+0{,}08}\approx 1+\frac{1}{2}\cdot 0{,}08=1{,}04.$$

Заўвага. Паколькі дыферэнцыял функцыі роўны здабытку вытворнай функцыі на дыферэнцыял аргумента, то ўсе асноўныя формулы для вытворных будуць аналагічны і для дыферэнцыялау.

1. $d(u\pm v)=du\pm dv.$

2. $d(u\cdot v)=(du)\cdot v+u\cdot dv.$

3. $d\left(\frac{u}{v}\right)=\dfrac{(du)\cdot v-u\,dv}{v^2}.$

Доказ формулы (3)

$$d\left(\frac{u}{v}\right)=\left(\frac{u}{v}\right)'dx=\frac{u'v-uv'}{v^2}dx=\frac{(u'dx)\cdot v-u\cdot(v'dx)}{v^2}=$$

$$=\frac{(du)\cdot v-u\cdot dv}{v^2},$$

што і трэба было даказаць.

8.4. ДЫФЕРЭНЦЫЯЛ СКЛАДАНАЙ ФУНКЦЫІ.

Няхай $y=\mathcal{F}(u)$, дзе $u=\varphi(x)$. Адносна функцый $\mathcal{F}(u)$ і $\varphi(x)$ дапускаем, што яны дыферэнцавальныя ў абсягах, у якіх яны разглядаюцца.

Нагадаем выраз для дыферэнцыяла:

$$y=f(x) \Rightarrow dy=y'_x\,dx = f'(x)\,dx. \qquad (5)$$

Знойдзем цяпер вытворную складанай функцыі, а потым яе дыферэнцыял

$$y'_x = \mathcal{F}'(u)\cdot u'_x$$

$$dy = y'_x\,dx = \mathcal{F}'(u)\cdot u'_x\,dx = \mathcal{F}'(u)\,du.$$

$$y=\mathcal{F}(u),\ u=\varphi(x) \Rightarrow dy=\mathcal{F}'(u)\,du. \qquad (9)$$

Параўноўваючы выразы для дыферэнцыялаў, атрыманыя па формулах (5) і (9), бачым, што яны фармальна супадаюць, г. зн. маюць аднолькавы від незалежна ад таго, ці з'яўляецца аргумент незалежнай пераменнай, ці некаторай функцыяй ад яе. Гэта ўласцівасць першага дыферэнцыяла называецца інварыянтнасцю ці ўласцівасцю захавання формы.

8.5. ВЫТВОРНЫЯ ВЫШЭЙШЫХ ПАРАДКАЎ.

Няхай на інтэрвале (a, b) зададзена дастаткова гладкая функцыя $y=f(x)$. Знойдзем яе вытворную $y'=f'(x)$. Паколькі гэта вытворная з'яўляецца некаторай функцыяй ад x, то ад яе ў сваю чаргу можна знайсці вытворную.

Азначэнне. Вытворная ад вытворнай першага парадку называецца вытворнай другога парадку ці другой вытворнай і абазначаецца

$$y''=(y')'=f''(x).$$

У агульным выпадку вытворная n -га парадку азначаецца як вытворная ад вытворнай (n - I) -га парадку.

$$y^{(n)} = \left(y^{(n-1)}\right)' = f^{(n)}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

<u>Прыклад I.</u> $y = x^4 - 3x^2 + 5, \quad y''' = ?$

$$y' = 4x^3 - 6x, \quad y'' = 12x^2 - 6, \quad y''' = 24x.$$

<u>Прыклад 2.</u> $y = e^{kx}, \quad k - \forall const, \quad y^{(100)} = ?$

$$y' = e^{kx} \cdot k, \quad y'' = k e^{kx} \cdot k = k^2 e^{kx}, \quad y''' = k^3 e^{kx}, \ldots,$$

$$y^{(100)} = k^{100} e^{kx}, \ldots, \quad y^{(n)} = k^n e^{kx}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Няхай $u = u(x)$ і $v = v(x)$ - дзве дыферэнцавальныя функцыі. З дапамогай метада матэматычнай індукцыі можна даказаць <u>формулу Лейбніца</u>.

$$\left(u(x) \cdot v(x)\right)^{(n)} = u^{(n)}(x) \cdot v(x) + n \cdot u^{(n-1)}(x) \cdot v'(x) + \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} u^{(n-2)}(x) \cdot v''(x) +$$

$$+ \frac{n(n-1)(n-2)}{3!} u^{(n-3)}(x) \cdot v'''(x) + \ldots + u(x) \cdot v^{(n)}(x), \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

8.6. <u>ВЫТВОРНЫЯ ВЫШЭЙШЫХ ПАРАДКАЎ АД НЯЯЎНЫХ І ПАРАМЕТРЫЧНА ЗАДАДЗЕНЫХ ФУНКЦЫЙ</u>.

Гэтае пытанне разгледзім на прыкладах.

I. Няхай y як функцыя ад x зададзена няяўна ўраўненням $x^2 + y^2 = a^2$. Знайсці y''_{xx}.

$$y = f(x) \qquad 2x + 2y \cdot y'_x = 0 \quad \Rightarrow \quad y'_x = -\frac{x}{y}.$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \left(-\frac{x}{y}\right)'_x = -\frac{1\cdot y - xy'}{y^2} = -\frac{y + x\cdot\frac{x}{y}}{y^2} =$$

$$= -\frac{y^2+x^2}{y^3} = -\frac{a^2}{y^3}.$$

2. Няхай y як функцыя ад x зададзена параметрычна

$$\begin{cases} x = t^2, \\ y = \ln t. \end{cases} \qquad 1 \le t \le 2, \quad y = f(x), \quad y''_{xx} = ?$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{1/t}{2t} = \frac{1}{2t^2} = \frac{1}{2}t^{-2}.$$

$$y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} = \frac{\frac{1}{2}(-2)t^{-3}}{2t} = -\frac{1}{2t^4}.$$

<u>Заўвага</u>. <u>Механічны сэнс другой вытворнай</u>.

Другая вытворная ад шляху па часу роўна <u>паскарэнню</u> рухомага цела ў дадзены момант часу

$$s = f(t), \quad v = s'_t = f'(t), \qquad a = v'_t = s''_{tt} = f''(t).$$

8.7. ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЫ ВЫШЭЙШЫХ ПАРАДКАЎ.

Разгледзім дыферэнцавальную функцыю $y = f(x)$. Мы паказалі, што дыферэнцыял знаходзіцца па формуле

$$dy = f'(x)\,dx, \qquad dx = \Delta x \tag{I}$$

З роўнасці (I) відаць, што дыферэнцыял функцыі есць некаторая функцыя ад x, ад якой у сваю чаргу можна знаходзіць дыференцыял.

Азначэнне. Дыференцыял ад дыферэнцыяла першага парадку называецца дыферэнцыялам другога парадку ці другім дыферэнцыялам і абазначаецца

$$d^2y = d(dy) = d(f'(x)\,dx) = f''(x)\cdot(dx)^2,$$

$$d^2y = f''(x)\cdot(dx)^2. \tag{2}$$

Дыферэнцыялы больш высокага парадку азначаюцца аналагічна.

У агульным выпадку дыферэнцыял n-га парадку роўны дыферэнцыялу ад дыферэнцыяла (n - I) - га парадку

$$d^n y = d(d^{n-1}y) \tag{3}$$

Разважаючы аналагічна, як і пры доказе формулы (2), пакажам, што

$$d^n y = f^{(n)}(x)\cdot(dx)^n, \ \forall n \in N \tag{4}$$

З (4) вынікае, што $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n y}{dx^n}, \ \forall n \in N$ (5)

Гэта значыць, што вытворная n-ага парадку можа разглядацца як адносіна адпаведных дыферэнцыялаў.

Разгледзім цяпер складаную функцыю $y = f(u), \quad u = \varphi(x)$, дзе $f(u)$ і $\varphi(x)$ - функцыі дыферэнцавальныя ў абсягах, у якіх яны разглядаюцца. Раней мы паказалі, што дыферэнцыял першага парадку ад складанай функцыі валодае ўласцівасцю інварыянтнасці і знаходзіцца па формуле

$$dy = f'_u(u)\,du. \qquad (6)$$

Знойдзем цяпер дыферэнцыял другога парадку ад складанай функцыі

$$d^2y = d(dy) = d\left(f'_u(u)\,du\right) = f''_{uu}(u)\cdot(du)^2 + f'_u(u)\cdot d^2u. \qquad (7)$$

Пры параўнанні роўнасцей (7) і (2) відавочна, што дыферэнцыял другога парадку, а значыць і дыферэнцыялы больш высокіх парадкаў не валодаюць уласцівасцю інварыянтнасці формы.

Прыклад. Знайсці d^2y, калі $y = \sin(x^3)$.

$$d^2y = y''\cdot dx^2\,, \quad y' = \cos(x^3)\cdot 3x^2 = 3x^2\cdot\cos(x^3),$$

$$y'' = 6x\cos(x^3) - 9x^4\sin(x^3) = 3x\cdot\left(2\cos(x^3) - 3x^3\sin(x^3)\right).$$

$$d^2y = 3x\left(2\cos(x^3) - 3x^3\sin(x^3)\right)(dx)^2.$$

9. Уласцівасці дыферэнцавальных функцый. АСНОЎНЫЯ ТЭАРЭМЫ.

9.1. ТЭАРЭМА РОЛЯ (ТЭАРЭМА АБ НУЛЯХ ВЫТВОРНАЙ).

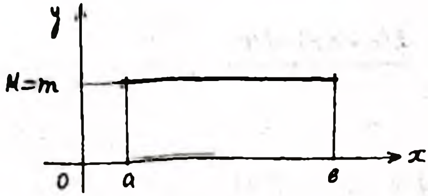
Роль Мішэль (1652-1719) - французскі матэматык.

Тэарэма. Няхай функцыя $y=f(x)$ непарыўна на адрэзку $[a, b]$, дыферэнцавальна ва ўсіх унутраных пунктах гэтага адрэзка і на канцах адрэзка прымае роўныя значэнні $f(a) = f(b)$. Тады унутры адрэзка знойдзецца хаця б адзін пункт $x = c$, у якім вытворная ператвараецца ў нуль.

Доказ. З умовы непарыўнасці функцыі $y=f(x)$ на адрэзку $[a, b]$ па ўласцівасці непарыўных функцый яна дасягае на гэтым адрэзку свайго найбольшага і найменшага значэнняў.

$$\exists\ M = \max f(x),\ \forall x \in [a, b];\quad \exists\ m = \min f(x),\ \forall x \in [a, b].$$

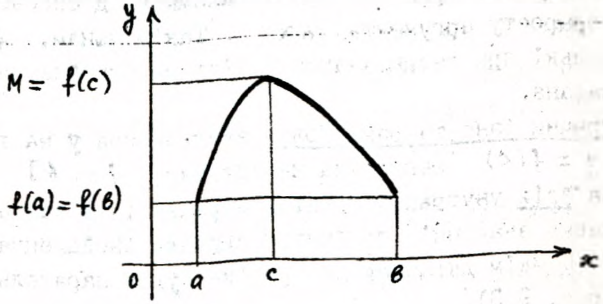
1. Няхай $M = m$, такім чынам $f(x) = const$ (рыс. 9.1) і тады $f'(x) \equiv 0$ для $\forall x \in (a, b)$.



Рыс. 9.1

У гэтым выпадку c - любы пункт інтэрвала (a , b).

2. Няхай $M \neq m$; т.я. $f(a) = f(b)$, то хаця б адно са значэнняў M ці m дасягаецца ўнутры адрэзка. Будзем лічыць, што гэта $M = f(c)$, дзе $a < c < b$.



Рыс. 9.2

Відавочна, што

$$f(c + \Delta x) - f(c) \le 0 \quad \text{для} \quad \forall\ \Delta x;$$

$$\frac{f(c + \Delta x) - f(c)}{\Delta x} \ge 0 \quad \text{для} \quad \Delta x < 0\ ; \qquad (1)$$

$$\frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0 \quad \text{для} \quad \Delta x > 0. \qquad (2)$$

Пяройдзем ў няроўнасцях (I), (2) да ліміту пры $\Delta x \to 0$.

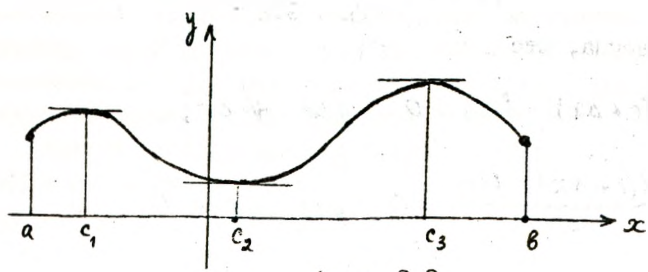
$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \geq 0, \quad \Delta x < 0 \qquad (\mathrm{I}')$$

$$f'(c) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(c+\Delta x)-f(c)}{\Delta x} \leq 0, \quad \Delta x > 0 \qquad (2')$$

$$f'(c) \geq 0, \quad \Delta x < 0 \quad ; \quad f'(c) \leq 0, \quad \Delta x > 0.$$

Па ўмовах тэарэмы функцыя $f(x)$ дыферэнцавальная ва <u>ўсіх</u> унутраных пунктах адрэзка $[a, b]$ і ў тым ліку ў пункце $x = c$; значыць значэнне вытворнай не будзе залежыць ад способа імкнення да нуля прыросту аргумента Δx . Такім чынам, $f'(c) = 0$, таму, што толькі пры гэтым значэнні сістэма няроўнасцяў сумесна. Тэарэма даказана.

<u>Геаметрычны сэнс тэарэмы Роля</u> заключаецца ў наступным: Калі функцыя $y = f(x)$ непарыўна на адрэзку $[a, b]$, дыферэнцавальная ва <u>ўсіх</u> унутраных пунктах адрэзка і на канцах яго прымае аднолькавыя значэнні, то ўнутры адрэзка знойдзецца хаця б адзін пункт, у якім датычная да графіка будзе паралельна восі Ox (рыс. 9.3).

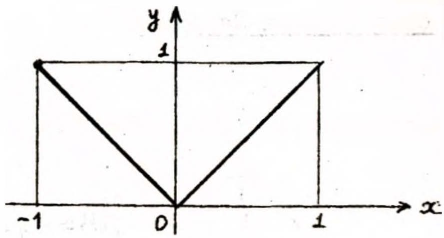


(рыс. 9.3

Заўвага. Усе патрабаванні тэарэмы Роля з'яўляюцца істотнымі. Напрыклад, калі ўмова дыферэнцавальнасці функцыі ва ўсіх унутраных пунктах парушана хаця б у адным пункце, то тэарэма Роля можа і не выконвацца.

Напрыклад, для функцыі $y=|x|$, $|x|\le 1$, патрабаванне дыферэнцавальнасці не выконваецца толькі пры $x=0$ (рыс.9.4).

Тым не менш, гэтага дастаткова, каб тэарэма Роля не выконвалась.



Рыс. 9.4

9.3. ТЭАРЭМА ЛАГРАНЖА (ТЭАРЭМА АБ КАНЕЧНЫХ ПРЫРОСТАХ).

Лагранж Жазэф (1736 - 1813) - французскі матэматык.

Тэарэма. Няхай функцыя $y=f(x)$ непарыўна на адрэзку $[a,b]$ і дыферэнцавальная ва ўсіх унутраных пунктах гэтага адрэзка, тады справядліва наступная роўнасць:

$$f(b)-f(a)=f'(c)\cdot(b-a), \quad c\in(a,b). \qquad (1)$$

Саставім дапаможную функцыю $F(x)$, для якой будуць выконвацца ўсе ўмовы тэарэмы Роля.

$$F(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot(x-a) \qquad (2)$$

Відавочна, што $F(a)=0$, $F(b)=0$; $F(x)$ - непарыўна на адрэзку $[a,b]$ і дыферэнцавальная для $\forall x\in(a,b)$.

Значыць, існуе пункт $x=c\in(a,b)$ такі, што

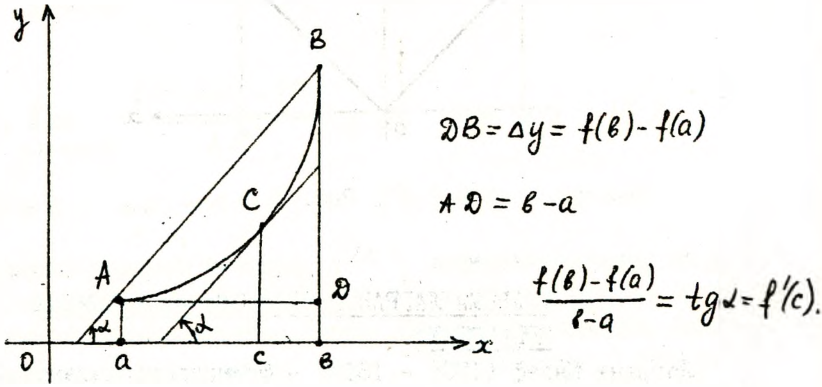
$F'(c)=0$.
$$F'(x)=f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\cdot 1, \quad \forall x\in(a,b).$$

$$\mathcal{F}'(c) = f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Rightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \quad (3)$$

$$f(b) - f(a) = f'(c)\cdot(b-a),$$

што трэба было даказаць.

<u>Геаметрычны сэнс тэарэмы Лагранжа.</u>



Рыс. 9.4

г. зн. на графіку функцыі $y = f(x)$ знойдзецца пункт C, у якім датычная да графіка паралельна хордзе AB. (рыс. 9.4).

9.4. <u>ТЭАРЭМА КАШЫ (ТЭАРЭМА АБ АДНОСІНЕ ПРЫРОСТАЎ ДВУХ ФУНКЦЫЙ)</u>.

Кашы Агюстэн (1789 - 1857) - французскі матэматык.

<u>Тэарэма</u>. Няхай функцыі $y = f(x)$, $y = \varphi(x)$ непарыўны на адрэзку $[a, b]$ і дыферэнцавальныя ва <u>усіх</u> унутраных пунктах гэтага адрэзка, пры гэтым $\varphi'(x) \neq 0$, $\forall x \in (a, b)$, тады

$$\frac{f(b) - f(a)}{\varphi(b) - \varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad a < c < b. \quad (4)$$

Тэарэма Лагранжа з'яўляецца прыватным выпадкам тэарэмы Кашы пры $\varphi(x)=x$. Тэарэма Кашы даказываецца аналагічна тэарэме Лагранжа ўвядзеннем дапаможнай функцыі $\mathcal{F}(x)$, для якой выконваюцца ўсе умовы тэарэмы Роля:

$$\mathcal{F}(x)=f(x)-f(a)-\frac{f(b)-f(a)}{\varphi(b)-\varphi(a)}\left[\varphi(x)-\varphi(a)\right].$$

Відавочна, што $\mathcal{F}(a)=\mathcal{F}(b)=0$.

Далейшыя разважанні правесці самастойна.

10. РАСКРЫЦЦЕ НЯВЫЗНАЧАНАСЦЕЙ. ПРАВІЛА ЛАПІТАЛЯ.

Лапіталь Гійом (1661 - 1704) - французскі матэматык.

Няхай $\lim f(x)=0$, $\lim \varphi(x)=0$, $x\to a$.

Патрабуецца знайсці $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$, г. зн. раскрыць нявызначанасць віду $\left(\frac{0}{0}\right)$.

Тэарэма 1. (Правіла Лапіталя).

1) няхай функцыі $y=f(x)$ і $y=\varphi(x)$ азначаны і дыферэнцавальныя ў некаторым ваколлі пункта $x=a$, за выключэннем, можа быць, самаго пункта $x=a$;

2) $f(a)=\varphi(a)=0$;

3) $\varphi'(x)\neq 0$, $\forall x\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon)$, $\varepsilon>0$ за выключэннем, можа быць, пункта $x=a$;

4) $\exists \lim\limits_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ канечны ці бясконцы,

Тады існуе ліміт адносіны саміх функцый і яны роўныя паміж сабою, г. зн.

$$\exists \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказ. Функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ адпавядаюць усім умовам тэарэмы Кашы, на аснове якой

$$\frac{f(x)-f(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad c \in (a, x).$$

Т.я. $f(a)=\varphi(a)=0 \Longrightarrow$

$$\frac{f(x)}{\varphi(x)} = \frac{f'(c)}{\varphi'(c)}, \quad c \in (a, x).$$

Пераходзім у гэтай роўнасці да ліміту пры $x \to a$.

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{c\to a} \frac{f'(c)}{\varphi'(c)} = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

што трэба было даказаць.

Адзначым, што калі $f(a)$ і $\varphi(a)$ нявызначаны, то дапусціўшы, што

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x) = 0, \quad \varphi(a) = \lim_{x\to a} \varphi(x) = 0,$$

зводзім гэты выпадак да разгледжанага вышэй, таму што пры такім давызначэнні $f(x)$ і $\varphi(x)$ будуць непарыўнымі і адпавядаюць усім патрабаванням тэарэмы Кашы.

Тэарэма 2. (Правіла Лапіталя).

1) Няхай функцыі $f(x)$ і $\varphi(x)$ азначаны і дыферэнцавальныя ў некаторым наваколлі пункта $x=a$, за выключэннем, можа быць, самага пункта $x=a$.

2) $\lim f(x) = \lim \varphi(x) = \infty, \; x \to a.$

3) $\varphi'(x) \neq \infty, \; \forall x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon), \; \varepsilon > 0,$

акрамя, можа быць, самого пункта $x=a$.

4) $\exists \lim\limits_{x\to a} \dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}$ канечны ці бясконцы.

Тады з (1) - (4) $\longrightarrow$

$$\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x\to a} \frac{f'(x)}{\varphi'(x)}.$$

Доказ. I) Няхай
$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}\neq 0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to a} f'(x)\neq 0$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\frac{1}{\varphi(x)}}{\frac{1}{f(x)}}=\left(\frac{0}{0}\right)=\left|\begin{array}{l}\text{прыменім пра-}\\ \text{віла Лапіталя}\\ \text{(тэарэму I)}\end{array}\right|=$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{-\frac{\varphi'(x)}{\varphi^2(x)}}{-\frac{f'(x)}{f^2(x)}}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)\cdot f^2(x)}{f'(x)\cdot\varphi^2(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\cdot$$

$$\cdot\lim_{x\to a}\frac{f^2(x)}{\varphi^2(x)}\,.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{\varphi'(x)}{f'(x)}\cdot\left(\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}\right)^2.$$

Пасля скарачэння на $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f(x)}{\varphi(x)}$ атрымліваем

$$\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}$$, што і трэба было даказаць.

2) Няхай $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{\varphi'(x)}=0.$

Тады $$\lim_{x\to a}\frac{(f(x)+\varphi(x))'}{\varphi'(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)}+1=1\neq 0.$$

Такім чынам, да функцый $f(x)+\varphi(x)$ і $\varphi(x)$ можна прымяніць першую частку тэарэмы 2

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)+\varphi(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)+\varphi'(x)}{\varphi'(x)}=1.$$

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}+1=1 \qquad \Rightarrow \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=0.$$

Заўвага I. Калі $a=\infty$, то замена $x=\frac{1}{t}$ зводзіць вылічэнне ліміту да выпадку $a=0$.

Няхай мае месца нявызначанасць віду ($\frac{0}{0}$) ці ($\frac{\infty}{\infty}$)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{\varphi(x)}=\lim_{t\to 0}\frac{f(\frac{1}{t})}{\varphi(\frac{1}{t})}=\lim_{t\to 0}\frac{f'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}{\varphi'(\frac{1}{t})\cdot(-\frac{1}{t^2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{\varphi'(x)},$$

г. зн. калі $x\to\infty$ правіла Лапіталя таксама мае месца.

Прыклады:

1. $$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x^2-3x+2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{2x}{2x-3}=\frac{2}{-1}=-2.$$

2. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{2x}}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2e^{2x}}=0.$$

Заўвага 2. Адзначым, што існаванне ліміту адносіны вытворных функцый з'яўляецца толькі дастатковай умовай для існавання ліміту адносіны саміх функцый. Таму, калі ліміт адносіны вытворных не існуе, то аб ліміту ~~адносіны саміх~~ функцый у агульным выпадку нічога сказаць нельга. Ен можа як існаваць, так і не. Гэта будзе толькі азначаць, што да вылічэння гэтага ліміту правіла Лапіталя нельга ўжываць і гэты ліміт трэба шукаць іншым спосабам.

Прыклады:

1. $$\lim_{x\to\infty}\frac{x+\cos x}{x}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{\cos x}{x}\right)=1+0=1.$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(x+\cos x)'}{x'}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-\sin x}{1}=1-\lim_{x\to\infty}\sin x=\nexists.$$

Правіла Лапіталя нельга ўжываць.

$$2.\ \lim_{x\to 0}\frac{x^2\sin\frac{1}{x}}{\sin x}=\lim_{x\to 0}\frac{x}{\sin x}\cdot\lim_{x\to 0}x\cdot\sin\frac{1}{x}=1\cdot 0=0.$$

Тэарэтычнае практыкаванне. Пераканаецца ў тым, што правіла Лапіталя тут нельга выкарыстаць.

Заўвага 3. Калі акрамя функцый $f(x)$ і $\varphi(x)$ іх вытворныя $f'(x)$ і $\varphi'(x)$ будуць здавальняць умовам тэарэм I ці 2, то да іх можна прысяняць правіла Лапіталя яшчэ раз. Іншымі словамі, пры вылічэнні лімітаў, правіла Лапіталя можна выкарыстоўваць некалькі разоў.

Прыклад.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 3x}{x^2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\sin 3x}{2x}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{3\cdot 3\cos 3x}{2}=\frac{9}{2}.$$

Заўвага 4. Правіла Лапіталя выкарыстоўваюць таксама для раскрыцця невызначанасцей віду ($0\cdot\infty$), ($\infty-\infty$), 1^{∞}, ∞^{0}, 0^{0}. Для гэтага кожную з нявызначанасцей трэба пераўтварыць к нявызначанасці віду ($\frac{0}{0}$) ці ($\frac{\infty}{\infty}$) і толькі тады ўжываць правіла Лапіталя.

Разгледзім, як раскрываецца нявызначанасць віду ($0\cdot\infty$)

$$\lim_{x\to a}f(x)\cdot\varphi(x)=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{1/\varphi(x)}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim_{x\to a}\frac{\varphi(x)}{1/f(x)}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right).$$

Адзначым пры гэтым, што калі ў нявызначанасці ($0\cdot\infty$) есць лагарыфмічныя ці адваротныя трыганаметрычныя функцыі, то іх, як правіла, трэба аставіць у лічніку.

Прыклад.

$$\lim_{x\to 0}x^2\cdot\ln x=(0\cdot\infty)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln x}{1/x^2}=\left(\frac{\infty}{\infty}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1/x}{-2/x^3}=$$

$$=-\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{2}=0.$$

Заўвага 5. Нявызначанасць віду ($\infty - \infty$) можа быць ператорана наступным чынам.

Няхай $f \to \infty$ і $\varphi \to \infty$, тады $f - \varphi = (\infty - \infty) =$

$$= \frac{1}{1/f} - \frac{1}{1/\varphi} = \frac{1/\varphi - 1/f}{1/f \cdot 1/\varphi} = \left(\frac{0}{0}\right).$$

Прыклад.

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{\sin^2 x} - \frac{1}{x^2}\right) = (\infty - \infty) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^2 \cdot \sin^2 x} = \left(\frac{0}{0}\right) =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{x^2 - \sin^2 x}{x^4} = \left(\frac{0}{0}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)(x+\sin x)}{x^4} = \lim_{x\to 0}\frac{(x-\sin x)\cdot 2x}{x^4} =$$

$$= 2\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{x^3} = 2\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{3x^2} = \frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{2x} = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2} = \frac{1}{3}.$$

I

II. ФОРМУЛЫ ТЭЙЛАРА I МАКЛАРЭНА I IX ПРЫМЯНЕННЕ.

II.I. ФОРМУЛА ТЭЙЛАРА.

Тэйлар Брук (I685-I73I) - англійскі матэматык.

Няхай функцыя $y = f(x)$ ($n+$ I)раз непарыўна дыферэнцавальная ў некаторым ваколлі пункта $x=a$ і ў самім пункце $x=a$.

Паставім наступную задачу. Патрабуецца знайсці мнагасклад $P_n(x)$ ступені не больш чым n , які задавальняе ўмовам:

$$\begin{cases} P_n(a) = f(a), \\ P_n'(a) = f'(a), \\ P_n''(a) = f''(a), \\ \quad . \quad . \quad . \quad . \\ P_n^{(n)}(a) = f^{(n)}(a). \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Натуральна лічыць, што ў заколлі пункта $x=a$ мнагасклад $P_n(x)$ будзе мала адрознівацца ад функцыі $f(x)$.

Мнагасклад $P_n(x)$ будзем шукаць у выглядзе

$$P_n(x)=c_0+c_1(x-a)+c_2(x-a)^2+c_3(x-a)^3+\dots+c_n(x-a)^n. \qquad (2)$$

Тут $c_0, c_1, c_2, \dots, c_n$ – пакуль нявызначаныя каэфіцыенты, якія трэба падабраць так, каб выконваліся усе умовы (I).

Прадыферэнцуем роўнасць (2) n разоў:

$$\begin{cases} P_n'(x)=c_1\cdot 1+2\cdot c_2(x-a)+3c_3(x-a)^2+\dots+nc_n(x-a)^{n-1}, \\ P_n''(x)=2\cdot 1c_2+3\cdot 2c_3(x-a)+\dots+n(n-1)c_n(x-a)^{n-2}, \\ P_n'''(x)=3\cdot 2\cdot 1\cdot c_3+\dots+n(n-1)(n-2)c_n(x-a)^{n-3}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \\ P_n^{(n)}(x)=n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\cdot c_n. \end{cases} \qquad (3)$$

Падставім у роўнасці (2), (3), $x=a$, ўлічым умовы (I) і атрымаем:

$$f(a)=c_0,\ f'(a)=1\cdot c_1,\ f''(a)=2\cdot 1\cdot c_2,\ f'''(a)=3\cdot 2\cdot 1\cdot c_3, \\ \dots,\ f^{(n)}(a)=n(n-1)(n-2)\dots 2\cdot 1\cdot c_n. \qquad (4)$$

Нагадаем, што $1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot k=k! \quad \forall k\in N$

$$0!=1,\quad 1!=1,\quad 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4=4!=24.$$

З роўнасцей (4) вынікае, што усе каэфіцыенты мнагасклада (2) знаходзяцца па формулах

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}\ , \quad k=0,1,2,\ldots,n \qquad (4')$$

Падставім знойдзеныя значэнні каэфіцыентаў c_k у роўнасць (2), атрымаем

$$P_n(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (5)$$

Мнагасклад (5) называецца мнагаскладам Тэйлара для функцыі $f(x)$ у пункце $x=a$

У ваколлі пункта $x=a$ разгледзім рознасць паміж функцыяй $f(x)$ і яе мнагаскладам Тэйлара $P_n(x)$

$$f(x) - P_n(x) = R_n(x),$$

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)\ , \quad x \in (a-\varepsilon, a+\varepsilon)\ , \ \varepsilon > 0 \qquad (6)$$

Падставім у роўнасць (6) замест $P_n(x)$ яго выраз (5), атрымаем

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x) \qquad (6')$$

Формула (6$'$) называецца <u>формулай Тэйлара</u> для функцыі $f(x)$ у пункце $x=a$, дзе астаткавы член $R_n(x)$ можа быць узяты ў форме Лагранжа

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1}\ , \quad c \in (a, x),$$

ці ў форме Пеана

$$R_n(x) \overset{x\to a}{=\!=} o\left((x-a)^n\right).$$

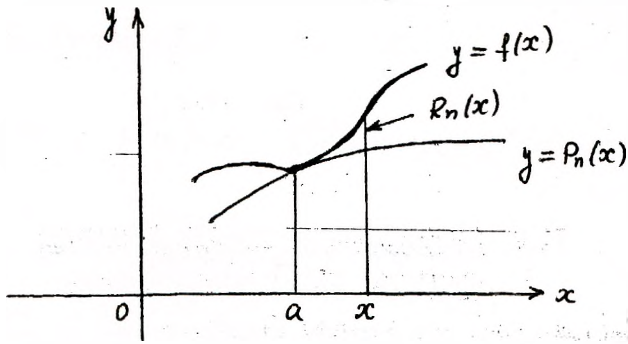
Асобны выпадак формулы Тэйлара ($6'$) пры $a=0$ называецца <u>формулай Макларэна</u>.

Маклорэн Колін (1698-1746) - шатландскі матэматык.

$$f(x)=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}x+\frac{f''(0)}{2!}x^2+\dots+\frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n+\frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1} \qquad (7)$$

$$c\in(0,x)$$

Для $|x-a|<\varepsilon$, г.зн. для х дастаткова блізкіх да пункта $x=a$ астатак $R_n(x)$ будзе малы (рыс. II.1).



Рыс. II.1

Калі адкінуць астатак $R_n(x)$, то замест дакладнай формулы ($6'$), ці (7) атрымаем набліжаную формулу.

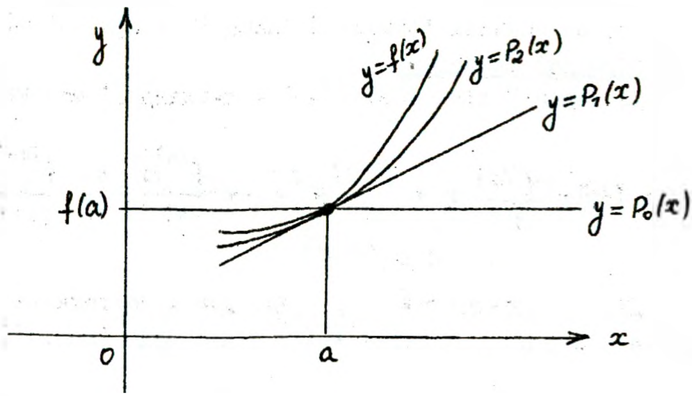
$$f(x)\approx P_n(x) \qquad x\in(a-\varepsilon,\ a+\varepsilon),\ \varepsilon>0. \qquad (8)$$

Роўнасць (8) будзе тым дакладней, чым вышэй ступень мнагаскладa Тэйлара $P_n(x)$

Пераканаемся ў гэтым з геаметрычных меркаванняў (рыс. II.2).

1. $n=0$ $\quad f(x)\approx P_0(x)=f(a)$
2. $n=1$ $\quad f(x)\approx P_1(x)=f(a)+f'(a)\cdot(x-a)$.

3. $n=2$ $\quad f(x) \approx P_2(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2}(x-a)^2.$



Рыс. II.2

II.2. РАСКЛАДАННЕ ПА ФОРМУЛЕ МАКЛАРЭНА НЕКАТОРЫХ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ФУНКЦЫЙ.

Запішам яшчэ раз формулу Макларэна

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n +$$

$$+ \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0,x), \quad R_n(x) = o(x^n) \qquad (1)$$

1. Няхай $\quad f(x) = e^x.$

$$f'(x) = e^x, \quad f''(x) = e^x, \quad \dots, \quad f^{(n)}(x) = e^x$$

$$f(0) = 1, \quad f'(0) = 1, \quad \dots, \quad f^{(n)}(0) = 1, \quad \forall n \in N$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \frac{e^c}{(n+1)!}x^{n+1}, \quad c \in (0,x). \qquad (2)$$

Можна паказаць, што

$$\lim_{n\to\infty} R_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{e^c}{(n+1)!} x^{n+1} = 0 \quad \forall x \in R.$$

2.

$$f(x) = \sin x.$$

$$f'(x) = \cos x = \sin\left(x + 1\cdot\frac{\pi}{2}\right).$$

$$f''(x) = -\sin x = \sin\left(x + 2\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f'''(x) = -\cos x = \sin\left(x + 3\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

$$f^{IV}(x) = \sin x = \sin\left(x + 4\cdot\frac{\pi}{2}\right)$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + n\cdot\frac{\pi}{2}\right), \quad \forall n \in N.$$

$$f(0)=0,\ f'(0)=1,\ f''(0)=0,\ f'''(0)=-1,\ f^{IV}(0)=0, \ldots,$$

$$f^{(n)}(0) = \begin{cases} 0, & n = 2k \\ (-1)^k, & n = 2k+1, \quad k \in N \end{cases}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + R_{2n+1}(x), \quad (3)$$

Можна паказаць, што

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n+1}(x) = 0 \qquad \forall x \in R.$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f^{(2n+2)}(c)}{(2n+2)!} x^{2n+2} = 0.$$

3.

$$f(x) = \cos x.$$

Доказ формулы зусім аналагічны доказу формулы (3)

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + R_{2n}(x), \qquad (4)$$

$$\lim_{n\to\infty} R_{2n}(x) = 0 \quad \forall x \in R, \qquad R_{2n}(x) = o(x^{2n}), \ x \to 0.$$

4. $f(x) = (1+x^n) \quad n \in N$

$$f'(x) = n(1+x)^{n-1}$$

$$f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$$

$$f'''(x) = n(n-1)(n-2)(1+x)^{n-3}$$

. . . .

$$f^{(n)}(x) = n(n-1)(n-2)\cdot\ldots\cdot 2\cdot 1 = n!$$

$$f^{(n+1)}(x) = 0.$$

$$f(0) = 1, \ f'(0) = n, \ f''(0) = n(n-1), \ f'''(0) = n(n-1)(n-2), \dots,$$

$$f^{(n)}(0) = n!$$

$$(1+x)^n = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}x^3 + \dots + x^n \qquad (5)$$

Формула (5) - гэта формула бінома Ньютана.

Прыклады:

I.

$$(1+x)^5 = 1 + 5x + \frac{5\cdot 4}{1\cdot 2}x^2 + \frac{5\cdot 4\cdot 3}{1\cdot 2\cdot 3}x^3 + \frac{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^4 +$$

$$+\frac{5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1}{1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5}x^5 = 1+5x+10x^2+10x^3+5x^4+x^5.$$

2. $(a+b)^n = a^n\left(1+\frac{b}{a}\right)^n, \quad \forall n\in N, \quad x=\frac{b}{a}.$

<u>Тэарэтычнае практыкаванне</u>. Даказаць, што

$$\ln(1+x) = x-\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}-\frac{x^4}{4}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}+R_n(x),$$

$$x>-1.$$

12. <u>ДАСЛЕДАВАННЕ ФУНКЦЫЙ НА ЭКСТРЭМУМ. ЛАКАЛЬНЫЯ І ТАТАЛЬНЫЯ ЭКСТРЭМУМЫ.</u>

12.1. <u>НАРАСТАННЕ І СПАДАННЕ ФУНКЦЫІ.</u>

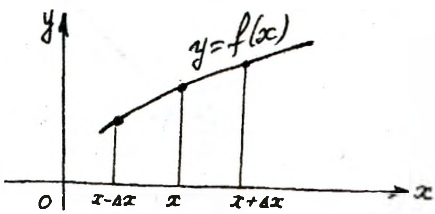
<u>Тэарэма I</u>. Для таго, каб дыферэнцавальная на інтэрвале (a,b) функцыі $y=f(x)$ была неспадальнай, неабходна і дастаткова, каб яе вытворная была неадмоўнай.

$$y=f(x)\ \uparrow\ x\in(a,b) \iff f'(x)\geq 0 \quad \forall x\in(a,b)$$

<u>Доказ</u>. I. <u>Неабходнасць</u>. Дадзена: $y=f(x)$ - неспадальная функцыя на інтэрвале (a , b) (рыс. 12.1).

Разгледзім адносіну

$$\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}\geq 0 \quad \forall \Delta x, \quad \forall (x+\Delta x)\in(a,b).$$



Рыс. 12.1

Пераходзім да ліміту, атрымліваем

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \geq 0 \quad , \quad \forall x \in (a, b).$$

2. Дастатковасць. Дадзена: $f'(x) \geq 0 \quad \forall x \in (a,b)$.
На інтэрвале (a , b) возьмем 2 пункты x_1 і x_2 ,

$$a < x_1 < x_2 < b.$$

Для функцыі $y = f(x)$ на адрэзку $[x_1, x_2]$ прыменім тэарэму Лагранжа пра канечныя прыросты

$$f(x_2) - f(x_1) = f'(c)\,(x_2 - x_1) \quad , \quad x_1 < c < x_2 ,$$

таму што $f'(c) \geq 0$, $x_2 > x_1$, то $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$

для $x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2) \Rightarrow y = f(x) \uparrow \; x \in (a, b)$

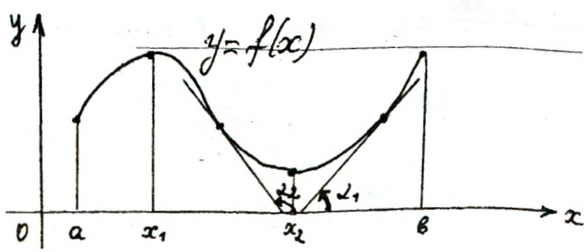
Тэарэма даказана цалкам.

Тэарэма 2. Для таго, каб дыферэнцавальная на інтэрвале (a , b) функцыя $y=f(x)$ была ненарастальнай, неабходна і дастаткова, каб яе вытворная была недадатнай.

$$y = f(x) \downarrow \quad x \in (a, b) \iff f'(x) \leq 0 \quad \forall x \in (a, b)$$

Доказ тэарэмы 2 аналагічны доказу тэарэмы I.

У праўдзівасці тэарэм I і 2 можна пераканацца з геаметрычнага сэнсу вытворнай (рыс. I2.2).



Рыс. I2.2

$$f'(x) = tg\,\alpha_1 \geq 0 \iff \left(0 \leq \alpha_1 < \frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \uparrow \quad x \in (a, x_1) \cup (x_2, b).$$

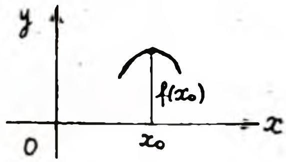
$$f'(x) = tg\,\alpha_2 \leq 0 \iff \left(\frac{\pi}{2} < \alpha_2 \leq \pi\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(x) \downarrow \quad x \in (x_1, x_2)$$

I2.2. ЛАКАЛЬНЫ ЭКСТРЭМУМ ФУНКЦЫІ.

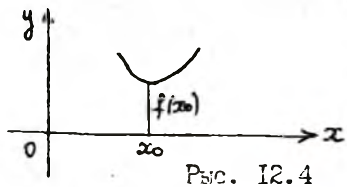
Азначэнне. Пункт x_0 называецца пунктам лакальнага максімуму (мінімуму), калі ў некаторым ваколлі гэтага пункта выконваецца няроўнасць:

$f(x_0) - f(x) > 0 \Rightarrow x_0 - (\cdot)$ $loc\ max$ (рыс. I2.3)



Рыс. I2.3

$f(x_0) - f(x) < 0 \Rightarrow x_0 - (\cdot)$ $loc\ min$ (рыс. I2.4).

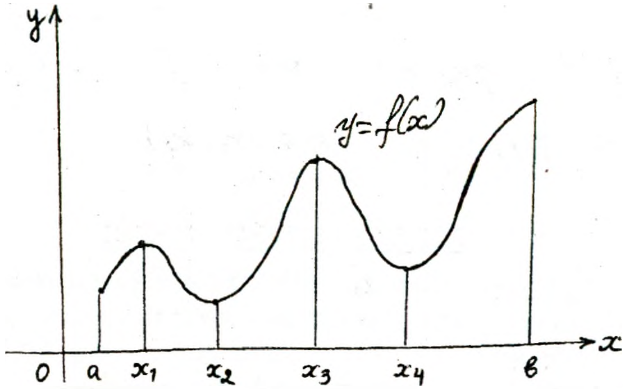


Рыс. I2.4

для $\forall x \in (x_0 - \varepsilon,\ x_0 + \varepsilon),\quad \varepsilon > 0.$

Пункты лакальнага максімуму і мінімуму называюцца пунктамі лакальнага экстрэмуму функцыі.

Падкрэслім яшчэ раз, што значэнні функцыі ў экстрэмальным пункце параўноўваюцца толькі з яе бліжэйшымі значэннямі з некаторага ваколля дадзенага пункта, таму лакальны максімум ці мінімум функцыі ў асобным пункце можа не супадаць з яе найбольшым і найменшым значэннямі на ўсім адрэзку (рыс. I2.5).



Рыс. I2.5

I2.3. НЕАБХОДНАЯ ЎМОВА ІСНАВАННЯ ЛАКАЛЬНАГА ЭКСТРЭМУМА.

Справядліва наступная тэарэма.

Калі дыферэнцавальная на інтэрвале (a, b) функцыя $y=f(x)$ мае ў пункце $x_0 \in (a, b)$ лакальны экстрэмум, то яе вытворная ў гэтым пункце роўна нулю.

Доказ. Для пэўнасці дапусцім, што x_0 - пункт лакальнага максімуму. Разгледзім адносіны

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} > 0 \quad \text{для} \quad \Delta x < 0 \qquad (1)$$

$$\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} < 0 \quad \text{для} \quad \Delta x > 0 \qquad (2)$$

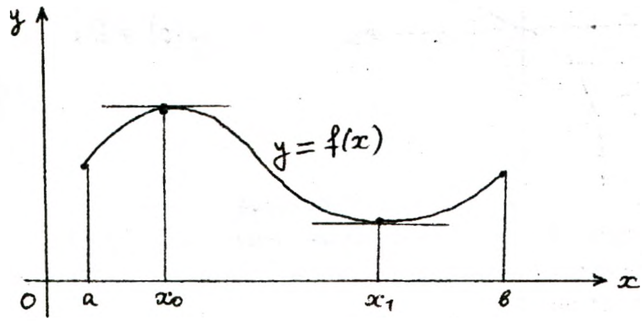
Пераходзім у няроўнасцях (I) і (2) да ліміту пры $\Delta x \to 0$, атрымаем

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \geq 0 , \quad \Delta x < 0 \qquad (1')$$

$$f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \leq 0 , \quad \Delta x > 0 \qquad (2')$$

Па ўмовах тэарэмы функцыя $y = f(x)$ дыферэнцавальная ва ўсіх пунктах інтэрвала (a, b), у тым ліку і ў пункце x_0, то яе вытворная ў пункце x_0 не будзе залежаць ад спосаба імкнення прыросту аргумента Δx да нуля. Значыць $f'(x_0) = 0$, таму што толькі пры гэтым значэнні сістэма няроўнасцяў (I′) і (2′) сумесна.

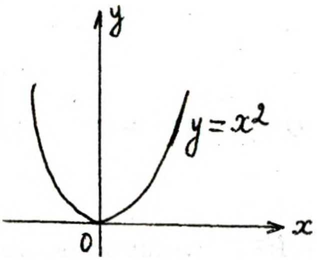
<u>Геаметрычны сэнс</u>: У пунктах лакальнага экстрэмуму датычная да графіка <u>дыферэнцавальнай</u> функцыі паралельна восі Ox. (Рыс. I2.6).



Рыс. I2.6

Заўвага І. Адзначым, што адваротнае сцвярджэнне тэарэмы, наогул кажучы, няправільна. З таго, што вытворная функцыі ў некаторым пункце роўна 0, яшчэ не вынікае, што ў гэтым пункце абавязкова будзе экстрэмум. Ён можа быць, а можа і не быць.

Прыклад. І.



$$y=x^2 \qquad y'=2x$$

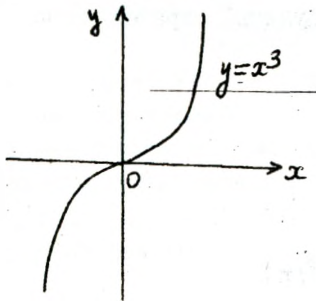
$$y'=0 \Rightarrow x=0$$

$$y(0)=0=min$$

(рыс. І2.7)

Рыс. І2.7

Прыклад 2.



$$y=x^3 \qquad y'=3x^2$$

$$y'=0 \Rightarrow x=0$$

$$y(0)=0$$

Рыс. І2.8

У пункце $x=0$ экстрэмума няма (рыс. І2.8).

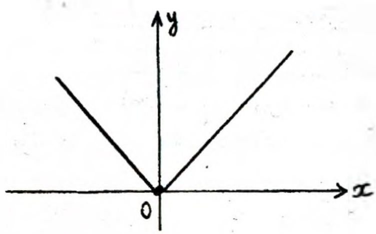
Такім чынам, неабходная ўмова існавання экстрэмума не з'яўляецца дастатковай.

Заўвага 2. Дагэтуль мы лічылі, што функцыя $y=f(x)$ дыферэнцавальная ва ўсіх пунктах інтэрвала (a , b). Калі гэта ўмова парушаецца хаця б у адным пункце, то ў дадзеным пункце экстрэмум можа быць, а можа і не быць.

Прыклады:

I. $y=|x|$

У пункце $x=0$ не існуе вытворная y'. $x=0$ – пункт min (рыс. I2.9).

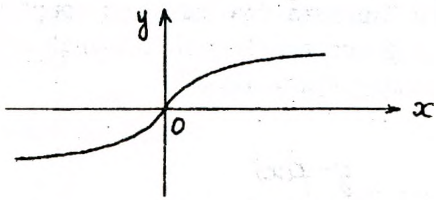


Рыс. I2.9

2. $y=\sqrt[3]{x}$

У пункце $x=0$ экстрэмуму няма (рыс. I2.I0).

$$y'=\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}, \qquad y'(0)=\infty$$

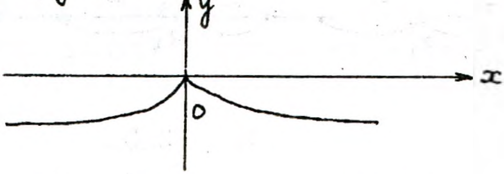


Рыс. I2.I0

3. $y=-\sqrt[3]{x^2}$

У пункце $x=0$ максімум (рыс. I2.II).

$$y'=-\frac{2}{3\sqrt[3]{x}}, \quad y'(0)=\infty$$



Рыс. I2.II

Азначэнне. Пункты, у якіх вытворная $f'(x)$ роўна нулю, бясконцасці ці не існуе, называюцца крытычнымі для функцыі $f(x)$.

Крытычныя пункты з'яўляюцца падазронымі на лакальны экстрэмум для функцыі $y=f(x)$.

I2.4. ДАСТАТКОВЫЯ ЎМОВЫ ІСНАВАННЯ ЛАКАЛЬНАГА ЭКСТРЭМУМУ.

Тэарэма I. Няхай функцыя $y=f(x)$ дыферэнцавальная ў некаторым ваколлі крытычнага пункта x_0, за выключэннем можа быць самога пункта x_0.

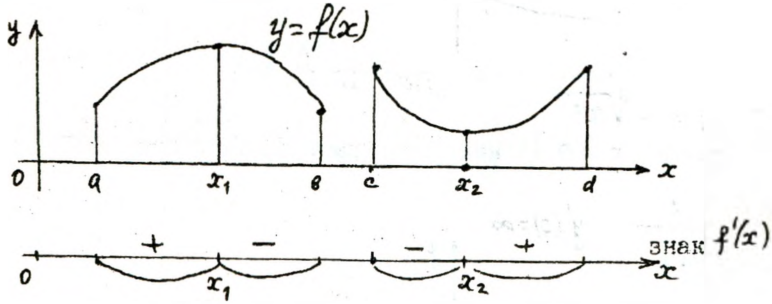
Тады:

I. Калі пры пераходзе злева цераз крытычны пункт x_0 вытворная $f'(x)$ змяняе знак з плюса на мінус, то x_0 – пункт лакальнага максімуму функцыі $f(x)$.

2. Калі вытворная змяняе знак з мінуса на плюс, то x_0 – пункт лакальнага мінімуму для $f(x)$.

Тэарэтычнае практыкаванне. Доказ гэтай тэарэмы атрымаць з дапамогай тэарэмы Лагранжа пра канечныя прырэсты.

Пераканаемся ў справядлівасці дадзенай тэарэмы I з геаметрычных меркаванняў (рыс. I2.I2).



Рыс. I2.I2.

Тэарэма 2. Няхай функцыя $y=f(x)$ двойчы непарыўна дыферэнцавальная ў некаторым ваколлі крытычнага пункта x_0, уключаючы і сам пункт x_0. ($f'(x_0)=0$, $f''(x_0)\neq 0$). Тады пункт x_0 з'яўляецца пунктам лакальнага экстрэмуму функцыі $f(x)$, пры гэтым:

калі $f''(x_0) < 0$, то x_0 - пункт $loc\ max\ f(x)$,
калі $f''(x_0) > 0$, то x_0 - пункт $loc\ min\ f(x)$.

Доказ. I. Няхай $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)<0$. Па ўмовах тэарэмы $f''(x)$ непарыўна ў некаторым ваколлі пункта x_0, значыць, знойдзецца такое ваколле пункта x_0, што $f''(x)<0$, $f''(x)=(f'(x))'<0 \Rightarrow f'(x)$ - спадае для $x \in (x_0-\varepsilon, x_0+\varepsilon), \varepsilon>0 \Rightarrow$ $f'(x_0)=0$, $f'(x)>0$ для $x<x_0$ і $f'(x)<0$ для $x>x_0$. Такім чынам, пры пераходзе цераз крытычны пункт x_0 першая вытворная змяняе знак з " $+$ " на " $-$ ". Гэта значыць, што x_0 - пункт максімуму для $f(x)$.

Другая частка тэарэмы даказваецца аналагічна.

Заўвага. Калі $f'(x_0)=0$, $f''(x_0)=0$, то пункт x_0 можа і не быць экстрэмальным. У гэтым выпадку трэба карыстацца дастатковымі ўмовамі, якія змяшчаюць вышэйшыя вытворныя $f^{(n)}(x_0)$, дзе $n \geq 3$.

Няхай $f'(x_0)=f''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$, тады:

I. пры $n=2k$, x_0 - пункт loc экстрэмуму, дакладней:
  а) пры $f^{(n)}(x_0)<0$, $x_0 - (\cdot)\ loc\ max$;
  б) пры $f^{(n)}(x_0)>0$, $x_0 - (\cdot)\ loc\ min$;

2. пры $n=2k+1$, г. зн. $f^{(2k+1)}(x_0)\neq 0$ экстрэмуму ў пункце x_0 для $f(x)$ не існуе.

12.5. НАЙБОЛЬШАЕ І НАЙМЕНШАЕ ЗНАЧЭННІ ФУНКЦЫЙ. ГЛАБАЛЬНЫЯ (ТАТАЛЬНЫЯ) ЭКСТРЭМУМЫ.

Няхай на адрэзку $[a,b]$ зададзена непарыўная функцыя $y=f(x) \Leftrightarrow f(x)\in C[a,b]$. Вядома, што ўсякая непарыўная на адрэзку функцыя $y=f(x)$ дасягае на ім свайго найменшага і найбольшага значэнняў, якія называюцца глабальнымі экстрэмумамі і абазначаюцца

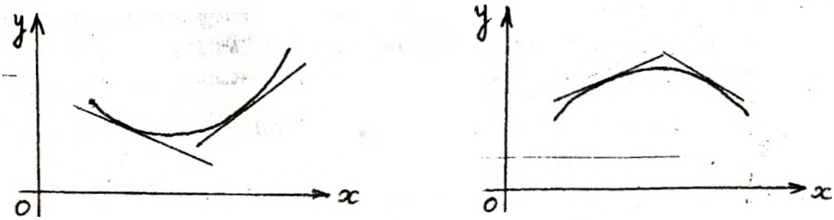
$$M=\max_{a\le x\le b} f(x), \qquad m=\min_{a\le x\le b} f(x).$$

Каб знайсці глабальныя экстрэмумы функцыі трэба вылічыць значэнні функцыі ва усіх крытычных пунктах адрэзка $[a, b]$, на канцах адрэзка і параунаць іх паміж сабой. Такім чынам, пунктамі глабальнага экстрэмума непарыунай функцыі, зададзенай на адрэзку, могуць быць пункты яе лакальных экстрэмумау ці канцы адрэзка.

13. ВЫГНУТАСЦЬ І АСІМПТОТЫ КРЫВОЙ.

13.1. ВЫПУКЛАСЦЬ І УВАГНУТАСЦЬ КРЫВОЙ. ПУНКТЫ ПЕРАГІНУ.

Азначэнне 1. Крывая $y = f(x)$, зададзеная на інтэрвале (a, b), называецца выпуклай (увагнутай), калі на дадзеным інтэрвале усе пункты крывой ніжэй (вышэй) адпаведных пунктау усякай праведзенай датычнай (рыс. 13.1).



Рыс. 13.1

Тэарэма 1. (Дастатковая умова выпукласці (увагнутасці)). Няхай функцыя $y = f(x)$ двойчы непарыуна дыферэнцавальная на інтэрвале (a, b), тады: 1. Калі $f''(x) < 0$ $\forall x \in (a, b)$, то $y = f(x)$ - выпуклая $\frown$ $x \in (a, b)$.
2. Калі $f''(x) > 0$ $\forall x \in (a, b)$, то $y = f(x)$ - увагнутая, $\smile$ $x \in (a, b)$.

Доказ. Выберам $\forall$ пункт $x_0 \in (a, b)$ і запішам ураўненне датычнай да графіка функцыі $y = f(x)$ у пункце з каардынатамі $(x_0, f(x_0))$.

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0) \iff y_{дат.} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Выпішам расклад функцыі $f(x)$ у пункце $x = x_0$ па формуле Тэйлара з астатковым членам у форме Лагранжа

$$f(x) = \underbrace{f(x_0) + f'(x_0)\cdot(x - x_0)}_{y_{дат.}} + \frac{f''(c)}{2!}(x - x_0)^2, \quad c \in (x, x_0)$$

$$f(x) - y_{дат} = \frac{f''(c)}{2}(x - x_0)^2, \quad c \in (x, x_0) \qquad (I)$$

Т.я. $(x - x_0)^2 > 0$, то:

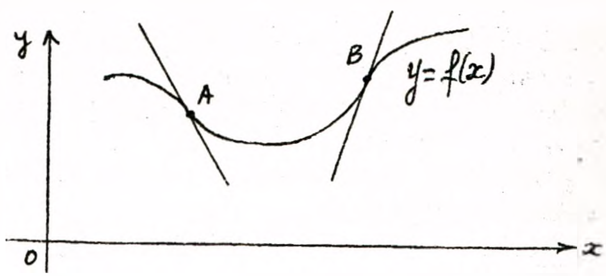
I. Калі $f''(x) < 0$ для $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f''(c) < 0 \Rightarrow$ $f(x) - y_{дат.} < 0 \Rightarrow f(x) < y_{дат.} \Rightarrow f(x)$ - выпуклая, $\frown$ для $x \in (a, b)$.

2. Калі $f''(x) > 0$ для $\forall x \in (a, b) \Rightarrow f''(c) > 0 \Rightarrow$ $f(x) - y_{дат.} > 0 \Rightarrow f(x) > y_{дат.} \Rightarrow y = f(x)$ - увагнутая, $\smile$ для $x \in (a, b)$.

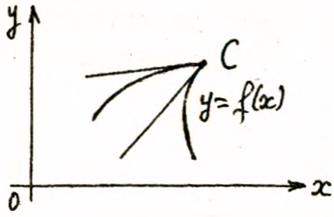
Такім чынам, знак другой вытворнай $f''(x)$ дае магчымасць вызначыць выпукласць (увагнутасць) крывой $y = f(x)$.

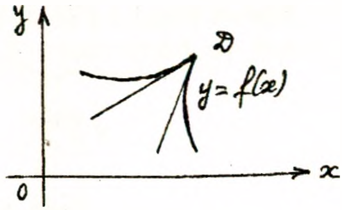
Азначэнне 2. Пункт, які аддзяляе выпуклую частку крывой ад яе ўвагнутай часткі, называецца пунктам перагіну дадзенай крывой.

Адзначым, што калі ў пункце перагіну існуе датычная, то яна перасякае графік дадзенай крывой (рыс. 13.2).



Рыс. 13.2





Рыс. 13.3

У пунктах C і D - датычная не існуе (рыс. 13.3).

Тэарэма 2. (Дастатковая ўмова існавання пункта перагіну).

Няхай функцыя $y=f(x)$ у ваколлі пункта $x=x_0$ двойчы непарыўна дыферэнцавальная. Калі $f''(x_0)$ ці $f''(x_0)$ - не існуе і пры пераходзе цераз пункт $x=x_0$ $f''(x)$ змяняе знак, то пункт з абцысай $x=x_0$ з'яўляецца пунктам перагіну графіка функцыі $y=f(x)$.

Тэарэма 2 вынікае з тэарэмы 1. Справядліва ~~наступная тэарэма~~, якую мы сфармулюем без доказу.

~~Тэарэма 3.~~ (Агульная дастатковая ўмова існавання пункта перагіну).

Няхай $y=f(x)$ n раз непарыўна дыферэнцавальная ў некаторым ваколлі пункта $x=x_0$, пры гэтым $f''(x_0)=f'''(x_0)=\dots=f^{(n-1)}(x_0)=0$, $f^{(n)}(x_0)\neq 0$. Калі $n=2k+1$ $k\in N$, то $x=x_0$ - пункт перагіну графіка функцыі $y=f(x)$.

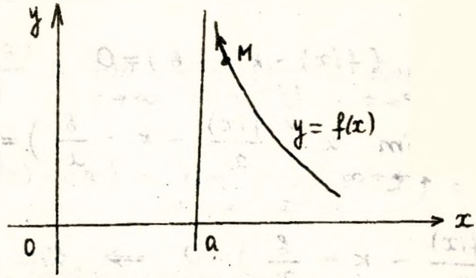
13.2. АСІМПТОТЫ КРЫВОЙ.

Азначэнне. Прамая лінія называецца асімптотай крывой, калі адлегласць ад пункта крывой $M(x,y)$ да дадзенай прамой імкнецца да нуля пры ўмове, што пункт $M(x,y)$ уздоўж крывой імкнецца да бясконцасці.

Будзем адрозніваць вертыкальныя і пахілыя асімптоты.

1. Вертыкальныя асімптоты.

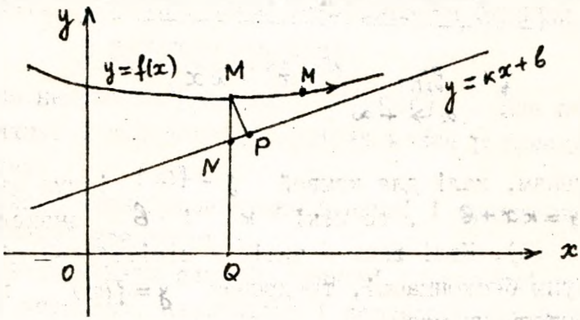
Калі $x=a$ - вертыкальная асімптота для $y=f(x)$, то (рыс. 13.4) $\lim\limits_{x\to a} f(x)=\infty$.



Рыс. 13.4

2. <u>Пахілыя асімптоты</u>.

Ураўненне пахілай асімптоты да графіка $y = f(x)$ будзем шукаць у выглядзе $y = kx + b$ (рыс. 13.5).



Рыс. 13.5

$$\lim_{x\to\infty} |MP| = 0 \tag{1}$$

$$MP/MN = \cos\alpha \quad \Rightarrow \quad MN = MP/\cos\alpha .$$

З (1) $\Rightarrow$ $\lim\limits_{x\to\infty} |MN| = 0$ (1'), $MN = MQ - NQ$.

З (1') $\Rightarrow$

$$\lim_{x\to\infty} |MQ - NQ| = 0 , \tag{2}$$

$$\lim_{x\to\infty} |f(x) - kx - b| = 0 .$$

З судачынення (2) вынікае, што

$$\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx-b)=0. \qquad (3)$$

З (3) $\Rightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0 \Rightarrow$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{f(x)}{x}-k-\frac{b}{x}\right)=0 \Rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}-k-0=0$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=k \qquad (4)$$

Падставім знойдзенае значэнне k у роўнасць (3) і вызначым лік b

$$b=\lim_{x\to+\infty}(f(x)-kx) \qquad (5)$$

Такім чынам, калі для крывой $y=f(x)$ існуе пахілая асімптота $y=kx+b$, то лікі k і b знаходзяцца з формулы (4) і (5). Калі хаця б адзін з лімітаў (4) ці (5) не існуе, ці роўны бясконцасці, то крывая $y=f(x)$ пры $x\to+\infty$ пахілай асімптоты не мае.

Заўвага. Такім жа чынам шукаем пахілыя асімптоты да графіка функцыі $y=f(x)$ пры $x\to-\infty$.

Адзначым, што адна і тая ж функцыя $y=f(x)$ пры $x\to+\infty$ і $x\to-\infty$ можа мець розныя пахілыя асімптоты.

Прыклад. Знайсці пахілыя асімптоты крывой

$$y=\frac{x^3}{x^2-4}.$$

1) $x=\pm 2$ - вертыкальныя асімптоты, таму што

$$\lim_{x\to\pm 2}\frac{x^3}{x^2-4}=\infty.$$

2)

$$y = kx + b$$

$$k = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^3}{x(x^2-4)} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{x^2-4} = 1.$$

$$b = \lim_{x\to\infty} (f(x) - kx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{x^3}{x^2-4} - x\right) = \lim_{x\to\infty} \frac{4x}{x^2-4} = 0$$

$y = x$ - пахілая асімптота.

I4. ПРЫМЯНЕННЕ ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАГА ЗЛІЧЭННЯ ДА ПАБУДОВЫ ГРАФІКАЎ ФУНКЦЫЙ І РАШЭННЯ ПРАКТЫЧНЫХ ЗАДАЧ.

I4.I. АГУЛЬНАЯ СХЕМА ДАСЛЕДАВАННЯ ФУНКЦЫЙ І ПАБУДОВЫ ГРАФІКАЎ.

Дадзена некаторая функцыя $y = f(x)$. Для поўнага даследавання функцыі і пабудовы яе графіка можна рэкамендаваць наступную схему:

I. Знайсці абсяг вызначэння функцыі і пункты перасячэння яе графіка з восямі каардынат.

2. Знайсці пункты разрыву функцыі і высветліць іх характар. Разгледзець цотнасць, няцотнасць і перыядычнасць функцыі.

3. Знайсці асімптоты да графіка функцыі.

4. Знайсці першую вытворную і высветліць інтэрвалы нарастання і спадання функцыі, пункты лакальных экстрэмумаў і экстрэмальныя значэнні.

5. Знайсці другую вытворную і па ей высветліць інтэрвалы выпукласці і ўвагнутасці крывой, пункты перагіну.

6. Па інфармацыі, атрыманай у пунктах I-5, пабудаваць графік крывой.

<u>Прыклад I</u>. Правесці поўнае даследванне і пабудаваць графік функцыі

$$y = \frac{x^3}{x^2-4}.$$

I. $\mathcal{D} = (-\infty, -2) \cup (-2, 2) \cup (2, +\infty)$

$$y = 0 \rightleftarrows x = 0 \qquad (0,0).$$

2. $f(-x) = \dfrac{(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = -\dfrac{x^3}{x^2-4} = -f(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ –

– няцотная функцыя. Значыць, яе графік сіметрычны адносна пачатку каардынатаў.

3. Раней мы знайшлі вертыкальныя асімптоты $x = \pm 2$ дадзенай крывой і пахілую асімптоту $y = x$

$x = \pm 2$ – пункты разрыву другога роду.

$$\lim_{x \to 2-0} f(x) = \lim_{x \to 2-0} \frac{x^3}{x^2-4} = -\infty,$$

$$\lim_{x \to 2+0} f(x) = \lim_{x \to 2+0} \frac{x^3}{x^2-4} = \infty.$$

4. $$y' = \left(\frac{x^3}{x^2-4}\right)' = \frac{3x^2(x^2-4) - x^3 \cdot 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{x^4 - 12x^2}{(x^2-4)^2} =$$

$$= \frac{x^2(x^2-12)}{(x^2-4)^2}.$$

$$y' = 0 \Rightarrow x^2(x^2-12) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad x_{2,3} = \pm 2\sqrt{3} \approx$$

$$\approx \pm 2 \cdot 1{,}74 = \pm 3{,}48 \approx \pm 3{,}5.$$

$$y'(-1) < 0, \; y'(1) < 0.$$

$+ \quad - \quad - \quad +$ Знак y'

$-2\sqrt{3} \quad 0 \quad 2\sqrt{3} \quad 4 \quad x$

Паколькі пры пераходзе цераз крытычны пункт $x = 0$ вытворная не змяняе знак, то ў пункце $x = 0$ функцыя экстрэмума не мае.

$y'(3) < 0, \; y'(4) > 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2\sqrt{3} \approx 3{,}5$ – пункт $loc\ min$.

$$y(2\sqrt{3}) = \frac{24\sqrt{3}}{12-4} = 3\sqrt{3} = 3\cdot 1{,}74 = 5{,}22 \approx 5{,}2.$$

$y'(0<x<2)<0 \rightarrow y(0<x<2)$ - спадае $\searrow$

$y'(2<x<2\sqrt{3})<0 \Rightarrow y(2<x<2\sqrt{3})$ - спадае $\searrow$

$y'(2\sqrt{3}<x<+\infty)>0 \Rightarrow y(2\sqrt{3}<x<\infty)$ - нарастае $\nearrow$.

5. $$y'' = \left(\frac{x^4-12x^2}{(x^2-4)^2}\right)' = \frac{(4x^3-12x)(x^2-4)^2 - 2(x^2-4)\cdot 2x\,(x^4-12x^2)}{(x^2-4)^4} =$$

$$= \frac{4x^5-16x^3-24x^3+96x-4x^5+48x^3}{(x^2-4)^3} = \frac{8x(x^2+12)}{(x^2-4)^3}$$

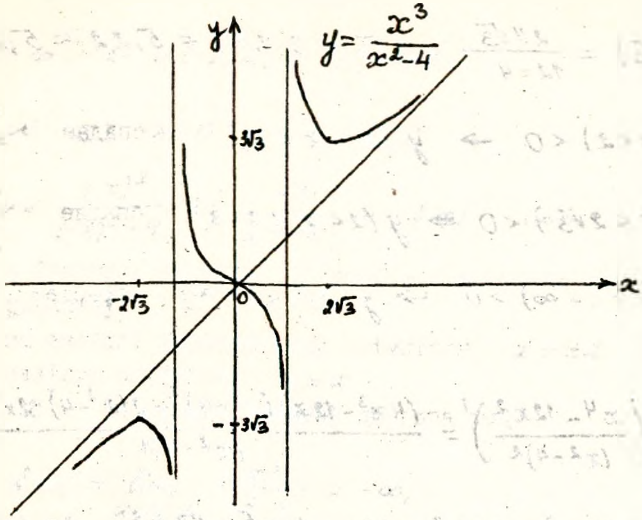
$y''=0 \rightarrow x=0 \qquad y''(-1)>0 \quad y''(1)<0 \Rightarrow$

$x=0$ - пункт перагіну графіка функцыі $y=f(x)$.

$y''(0<x<2)<0 \rightarrow y\ (0<x<2)$ - выпуклая.

$y''(2<x<+\infty)>0 \Rightarrow y(2<x<+\infty)$ - увагнутая.

6. Будуем графік (рыс. I4.I), улічваючы усю інфармацыю пп. I - 5.



Рыс. І4.І

Прыклад 2. Правесці самастойна поўнае даследаванне і пабудаваць графік функцыі Гаўса:

$$y=\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

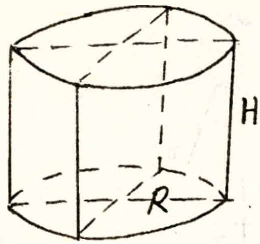
І4.2. ВЫКАРЫСТАННЕ ТЭОРЫІ ЭКСТРЭМУМАЎ ДА РАШЭННЯ ПРАКТЫЧНЫХ ЗАДАЧ.

Задача І. Патрабуецца зрабіць закрытую цыліндрычную ёмістасць аб'ему V з мінімальным расходам матэрыялу (рыс. І4.2).

$$S_n = 2\cdot S_{асн.} + S_{бак.}$$

$$S = 2\pi R^2 + 2\pi R H \qquad (1)$$

$$V=\pi R^2 H \Rightarrow H=\frac{V}{\pi R^2} \qquad (2)$$



Рыс. I4.2

$$S=2\pi R^2+2\pi R\cdot\frac{V}{\pi R^2}=2\pi R^2+\frac{2V}{R}=S(R)$$

$$S'(R)=4\pi R-\frac{2V}{R^2}\ ,\quad S'(R)=0\ \Rightarrow\ 4\pi R-\frac{2V}{R^2}=0$$

$$4\pi R^3-2V=0\qquad V=2\pi R^3\qquad R_1=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}\ .$$

$$S''(R)=4\pi+\frac{4}{R^3}\ ,\quad S''(R_1)=4\pi+\frac{4\cdot 2\pi}{V}=4\pi+\frac{8\pi}{V}>0\Rightarrow$$

$R_1=\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ - пункт мінімуму для $S_{поўн.}=S(R)$.

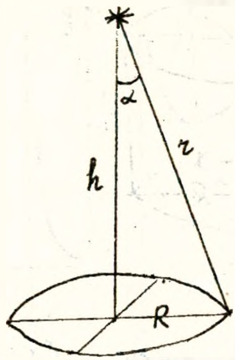
$$H=\frac{V}{\pi R^2}=\frac{V}{\pi R^3}\cdot R=\frac{V\cdot 2\pi}{\pi\ V}\cdot\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}=2R_1.$$

Такім чынам, каб на выраб закрытай цыліндрычнай емістасці зададзенага аб'ему пайшла мінімальная колькасць матэрыялу, трэба каб вышыня цыліндра была роўна яго дыяметру.

Задача 2. На якой вышыні над цэнтрам круглай пляцоўкі радыуса R трэба павесіць ліхтар, каб край пляцоўкі быў максімальна асветлены (рыс. I4.3).

З фізікі вядома, што

$$E=k\cdot\frac{\cos\alpha}{r^2}\ ,\ k=const>0\ ,\ \cos\alpha=\frac{h}{r}\ ,\quad r=\sqrt{h^2+R^2}.$$



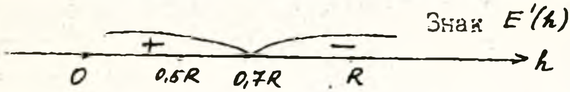
Рыс. 14.3.

$$E(h)=\frac{kh}{\sqrt{(R^2+h^2)^3}}\ ,\qquad E'(h)=k\,\frac{\sqrt{(R^2+h^2)^3}-h\cdot\frac{3}{2}\sqrt{R^2+h^2}\cdot 2h}{(R^2+h^2)^3}$$

$$=k\,\frac{R^2+h^2-3h^2}{\sqrt{(R^2+h^2)^5}}=k\,\frac{R^2-2h^2}{\sqrt{(R^2+h^2)^5}}$$

$$E'(h)=0\quad\Longrightarrow\quad R^2-2h^2=0\quad\longrightarrow\quad h=\frac{R}{\sqrt{2}}=\frac{R\sqrt{2}}{2}$$

$$h\approx 0{,}7R$$



$$E'\left(\tfrac{1}{2}R\right)=k\,\frac{R^2-\frac{1}{2}R^2}{\sqrt{\left(\frac{5R^2}{4}\right)^5}}>0\ ,\qquad E'(R)<0\quad\Longrightarrow$$

$h=\dfrac{R\sqrt{2}}{2}$ – пункт максімуму функцыі $E(h)$.

$$E_{max}\left(\frac{\sqrt{2}\,R}{2}\right)=\frac{k\sqrt{2}\;R}{2\sqrt{\left(R^2+\frac{R^2}{2}\right)^3}}=\frac{k\sqrt{2}\;R}{2\sqrt{\frac{27}{8}}\;R^3}=$$

$$=\frac{k\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{2}}{2\cdot 3\sqrt{3}\;R^2}=\frac{2k}{3\sqrt{3}\;R^2}.$$

15. ВЕКТАРНЫЯ ФУНКЦЫІ СКАЛЯРНАГА АРГУМЕНТА І ІХ ДЫФЕРЭНЦАВАННЕ.

15.1. АСНОЎНЫЯ ПАНЯЦЦІ.

Няхай нам дадзен вектар $\vec{r}=\vec{r}(t), \quad \alpha\le t\le\beta$ (1)

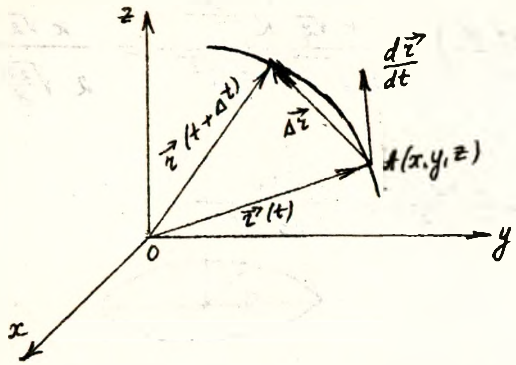
Будзем лічыць, што праекцыі гэтага вектара на каардынатныя восі нам вядомы, г. зн.

$$\begin{cases} x=x(t),\\ y=y(t), \qquad \alpha\le t\le\beta \\ z=z(t). \end{cases} \qquad (2)$$

Так як каардынаты вектара $\vec{r}(t)$ вядомы, то яго можна запісаць у выглядзе раскладу па каардынатнаму базісу

$$\vec{r}(t)=x(t)\cdot\vec{i}+y(t)\cdot\vec{j}+z(t)\cdot\vec{k}, \quad \alpha\le t\le\beta \qquad (1')$$

Пачатак вектара $\vec{r}(t)$ змесцім у пачатак каардынат. Тады вектар $\vec{r}(t)$ будзе радыусам-вектарам пункта $A(x,y,z)$, дзе x, y, z знаходзяцца з роўнасцей (2) (рыс. 15.1).



Рыс. 15.1.

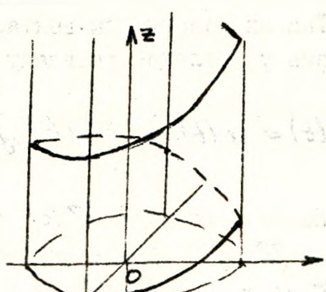
У роўнасцях (1), (2) лікавая велічыня t звычайна называецца <u>параметрам</u>.

Пры змене параметра ад α да β змяняецца вектар $\vec{r}(t)$ у адпаведнасці з роўнасцю (1′)., пры гэтым змена можа адбывацца як па велічыні, так і па напрамку. У адпаведнасці з гэтым пункт $A(x,y,z)$ акрэсліць у прасторы некаторую крывую лінію L, якая называецца <u>гадографам</u> вектара $\vec{r}(t)$.

Функцыі, зададзеныя роўнасцямі (1) ці (1′), называюцца <u>вектарнымі функцыямі скалярнага аргумента</u>. Ураўненні (2) называюцца <u>параметрычнымі</u> ураўненнямі гадографа вектара $\vec{r}(t)$ ці параметрычнымі ураўненнямі крывой L.

<u>Прыклад</u>. Запішам у трохмернай прасторы параметрычныя ураўненні шрубавай лініі, якая у R_3 мае выгляд (рыс. 15.2).

$$\begin{cases} x = a\cos t \\ y = a\sin t, \quad a, b = const > 0 \\ z = bt \end{cases}$$



Рыс. 15.2

15.2. ПАНЯЦЦІ ЛІМІТУ І ВЫТВОРНАЙ ДЛЯ ВЕКТАРНЫХ ФУНКЦЫЙ СКАЛЯРНАГА АРГУМЕНТА.

Асноўныя аперацыі (ліміт, непарыўнасць, вытворная) для вектарных функцый скалярнага аргумента ўводзяцца аналагічна, як і для скалярных функцый скалярнага аргумента.

Няхай $\vec{r}_0 = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k}$, дзе

$$x_0 = \lim_{t \to t_0} x(t), \quad y_0 = \lim_{t \to t_0} y(t), \quad z_0 = \lim_{t \to t_0} z(t), \quad \alpha \le t_0 \le \beta.$$

<u>Азначэнне I</u>. Вектар $\vec{r}_0$ называецца лімітам вектарнай функцыі $\vec{r}(t)$ пры $t \to t_0$, калі для малых $|t - t_0|$ адпаведная розніца $|\vec{r}(t) - \vec{r}_0|$ таксама малая.

З азначэння вынікае, што

$$\vec{r}_0 = \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) \iff \lim_{t \to t_0} |\vec{r}(t) - \vec{r}_0| = 0 \qquad (3)$$

З роўнасці (3) $\Rightarrow$

$$\vec{r}_0 = \lim_{t \to t_0} \vec{r}(t) = \lim_{t \to t_0} x(t) \cdot \vec{i} + \lim_{t \to t_0} y(t) \cdot \vec{j} +$$

$$+ \lim_{t \to t_0} z(t) \cdot \vec{k} = x_0 \cdot \vec{i} + y_0 \cdot \vec{j} + z_0 \cdot \vec{k} \qquad (4)$$

Вызначым цяпер вытворную ад вектарнай функцыі. Дадзім скалярнаму аргументу t прырост Δt, тады вектарная функцыя зменіцца на велічыню $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$.

Адзначым, што адносіна $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \parallel \Delta \vec{r}$ пры $\forall \Delta t \ne 0$.

<u>Запішам выраженне для</u> $\dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$

$$\frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{x(t+\Delta t) - x(t)}{\Delta t} \cdot \vec{i} + \frac{y(t+\Delta t) - y(t)}{\Delta t} \vec{j} + \frac{z(t+\Delta t) - z(t)}{\Delta t} \cdot \vec{k}. \qquad (5)$$

Азначэнне 2. Лiмiт адносiны прыроста вектарнай функцыi $\Delta\vec{r}$ да прыроста скалярнага аргумента Δt пры ўмове, што $\Delta t \to 0$ адвольным чынам, называецца вытворнай вектарнай функцыi $\vec{r}(t)$ i абазначаецца

$$\frac{d\vec{r}(t)}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\vec{r}}{\Delta t}. \tag{6}$$

Пераходзiм у роўнасцi (5) да лiмiта пры $\Delta t \to 0$, з улiкам судачынення (4) атрымаем

$$\vec{r}'(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = x'(t)\cdot\vec{i} + y'(t)\cdot\vec{j} + z'(t)\cdot\vec{k}. \tag{7}$$

Тэарэтычнае практыкаванне. Пераканацца, што вектар $\frac{d\vec{r}(t)}{dt}$ накiраваны па датычнай да гадографа вектара $\vec{r}(t)$ у пункце $A(x,y,z)$ у бок, якi адпавядае нарастанню парамента t.

У гэтым заключаецца геаметрычны сэнс вытворнай $\vec{r}'(t)$.

15.3. УРАЎНЕННI ДАТЫЧНАЙ ДА КРЫВОЙ I НАРМАЛЬНАЙ ПЛОСКАСЦI.

Улiчваючы геаметрычны сэнс вытворнай $\vec{r}'(t)$, напiшам ураўненне датычнай да прасторавай крывой L, якая з'яўляецца гадографам вектара $\vec{r}(t)$ у пункце $A_0(x_0, y_0, z_0)$.

Ураўненне датычнай да лiнii L у пункце $A(x_0, y_0, z_0)$ мае выгляд

$$\frac{x - x(t_0)}{x'(t_0)} = \frac{y - y(t_0)}{y'(t_0)} = \frac{z - z(t_0)}{z'(t_0)}. \tag{8}$$

Ураўненне нармальнай плоскасці, якая праходзіць праз пункт A_0, мае выгляд:

$$x'(t_0)\cdot(x-x(t_0))+y'(t_0)\cdot(y-y(t_0))+z'(t_0)(z-z(t_0))=0 \tag{9}$$

Калі параметр t - час, то $\dfrac{d\vec{r}(t)}{dt}=\vec{v}(t)$,
дзе $\vec{v}(t)$ - вектар хуткасці пункта $A(x,y,z)$, г. зн. канца вектара накіраванага ўздоўж крывой L. У гэтым змяшчаецца механічны сэнс вытворнай вектарнай функцыі скалярнага аргумента.

15.4. АСНОЎНЫЯ ПРАВІЛЫ ДЫФЕРЭНЦАВАННЯ ВЕКТАРНЫХ ФУНКЦЫЙ СКАЛЯРНАГА АРГУМЕНТА.

Справядлівы наступныя формулы дыферэнцавання:

1. Вытворная ад алгебраічнай сумы вектарных функцый роўна алгебраічнай суме іх вытворных

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t)\pm\vec{r}_2(t)\right]=\frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\pm\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}.$$

2. Вытворная ад здабытка скалярнай функцыі на вектарную роўна суме здабыткаў вытворнай ад скалярнай функцыі на вектарную і скалярнай функцыі на вытворную вектарнай.

$$\frac{d}{dt}\left[f(t)\cdot\vec{r}(t)\right]=\frac{df(t)}{dt}\cdot\vec{r}(t)+f(t)\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

Вынік. Калі $f(t)=const$, тады

$$\frac{d}{dt}\left[c\cdot\vec{r}(t)\right]=c\cdot\frac{d\vec{r}(t)}{dt}.$$

3. Вытворная ад скалярнага здабытка вектарных функцый роўна суме скалярных здабыткаў вытворнай першай вектарнай функцыі на другую і першай функцыі на вытворную другой вектарнай функцыі

$$\frac{d}{dt}\left(\vec{r}_1(t)\cdot\vec{r}_2(t)\right) = \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\cdot\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\cdot\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}$$

4. Вытворная ад вектарнага здабытка вектарных функцый знаходзіцца па формуле

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right] = \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\times\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\times\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}.$$

Прывядзем доказ адной з формул, напрыклад, формулы (4).

$$\frac{d}{dt}\left[\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)\right] = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}_1(t+\Delta t)\times\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)}{\Delta t} =$$

$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}_1(t+\Delta t)\times\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t+\Delta t)}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\times\vec{r}_2(t)}{\Delta t} =$$

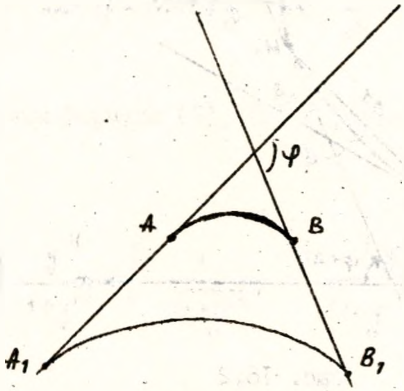
$$= \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\left(\vec{r}_1(t+\Delta t) - \vec{r}_1(t)\right)\times\vec{r}_2(t+\Delta t)}{\Delta t} +$$

$$+ \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\vec{r}_1(t)\times\left(\vec{r}_2(t+\Delta t) - \vec{r}_2(t)\right)}{\Delta t} =$$

$$= \frac{d\vec{r}_1(t)}{dt}\times\vec{r}_2(t) + \vec{r}_1(t)\times\frac{d\vec{r}_2(t)}{dt}.$$

16. КРЫВІНЯ ПЛОСКАЙ І ПРАСТОРАВАЙ КРЫВОЙ.

16.1. КРЫВІНЯ ПЛОСКАЙ КРЫВОЙ.



Рыс. 16.1.

Вугал φ паміж датычнымі, якія праведзены ў канцовых пунктах крывой, называецца яе вуглом суменнасці (рыс. 16.1).

Вугал суменнасці з'яўляецца адной з характарыстык выгнутасці лініі.

Калі разглядаць лініі рознай даўжыні, то аднаму і таму ж вуглу суменнасці будуць адпавядаць лініі рознай выгнутасці.

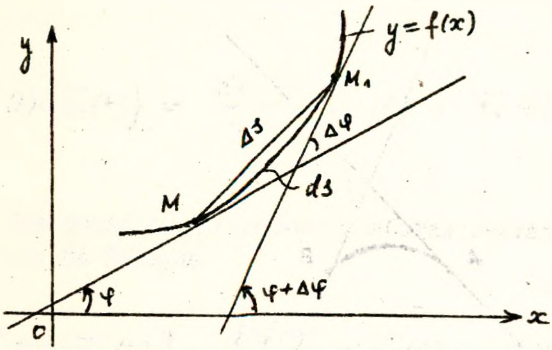
Калі разглядаць лініі аднолькавай даўжыні, то больш выгнутай лініі, будзе адпавядаць большы вугал суменнасці і наадварот.

<u>Азначэнне 1</u>. Сярэдняй крывіней лініі называецца адносіна вугла суменнасці да яе даўжыні.

$$k_{ср} = \frac{|\varphi|}{|\breve{AB}|} \qquad (1)$$

Будзем лічыць, што крывая лінія зададзена ураўненнем $y=f(x)$, дзе $x \in [a,b]$, $f(x)$ – функцыя двойчы непарыўна дыферэнцавальная на адрэзку $[a,b]$.

<u>Азначэнне 2</u>. Крывізнёй лініі $y=f(x)$ у пункце $M(x,y)$ называецца ліміт сярэдняй крывізні дугі $\breve{M}M_1$ пры ўмове, што пункт M_1 уздоўж лініі імкнецца да пункта M (рыс. 16.2).



Рыс. 16.2

$$k = \lim_{M_1 \to M} k_{cp} = \lim_{M_1 \to M} \left|\frac{\Delta\varphi}{\Delta s}\right| = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right|. \qquad (2)$$

Δs - даўжыня хорды MM_1

ds - даўжыня дугі MM_1, $ds = |\breve{M}M_1|$

Пры $M_1 \to M \Rightarrow \Delta s \to 0$, $ds \to 0$, $ds \approx \Delta s$.

$$dy \approx \Delta y, \quad dx = \Delta x, \quad \Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 \Rightarrow$$

$$ds^2 = (dx)^2 + (dy)^2 \Rightarrow \left(\frac{ds}{dx}\right)^2 = 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \Rightarrow$$

$$\left|\frac{ds}{dx}\right| = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Leftrightarrow$$

$$\left|\frac{ds}{dx}\right| = \sqrt{1+y'^2}. \qquad (3)$$

З (2) $\Rightarrow$

$$k = \left|\frac{d\varphi}{ds}\right| = \left|\frac{d\varphi}{dx}\right| \Big/ \left|\frac{ds}{dx}\right|. \qquad (4)$$

Каб знайсці $\frac{d\varphi}{dx}$, скарыстаем геаметрычны сэнс вытворнай

$$tg\,\varphi = y' \Rightarrow \varphi = arctg\,y' \Rightarrow \frac{d\varphi}{dx} = \frac{1}{1+y'^2}\cdot y''. \qquad (5)$$

Улічым формулы (3), (5) і роўнасць (4) пераўтворыцца так

$$k = \left|\frac{y''}{1+y'^2}\right|\cdot\frac{1}{\sqrt{1+y'^2}} = \frac{|y''|}{(1+y'^2)^{3/2}}, \quad a \le x \le b. \qquad (6)$$

$$k = \frac{|f''(x)|}{(1+f'^2(x))^{3/2}}. \qquad (6')$$

Такім чынам, мы паказалі, што крывіня лініі, зададзенай ураўненнем $y=f(x)$ у любым пункце з абцысай x вылічваецца па формуле (6).

16.2. КРЫВІНЯ ПЛОСКАЙ ЛІНІІ. ЗАДАДЗЕНАЙ ПАРАМЕТРЫЧНА.

Няхай плоская крывая зададзена параметрычна ураўненнямі

$$\begin{cases} x=\varphi(t), \\ y=\psi(t). \end{cases} \quad \alpha \le t \le \beta.$$

Будзем лічыць, што у з'яўляецца функцыяй ад x і знойдзем першую і другую вытворныя.

$$(y)'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{(y)'_t}{x'_t}, \quad y''_{xx} = (y'_x)'_x = \frac{(y'_x)'_t}{x'_t} =$$

$$= \frac{\left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)'_t}{x'_t} = \frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^2 \cdot x'_t}.$$

Падставім у роўнасць (6) y'_x і y''_{xx}

$$k = \frac{\left|\frac{y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}}{(x'_t)^3}\right|}{\sqrt{\left(1 + \left(\frac{y'_t}{x'_t}\right)^2\right)^3}} = \frac{|y''_{tt} \cdot x'_t - y'_t \cdot x''_{tt}|}{((x'_t)^2 + (y'_t)^2)^{3/2}}, \qquad (7)$$

$$\alpha \le t \le \beta.$$

Прыклад. Вылічыць крывіню акружнасці, зададзенай параметрычна.

$$\begin{cases} x = R\cos t, \\ y = R\sin t \end{cases} \qquad 0 \le t \le 2\pi.$$

Тэарэтычнае практыкаванне. Пераканацца выкарыстаўшы формулу (7), што крывіня акружнасці нязменна ў любым пункце і адваротна прапарцыйна яе радыусу $k = 1/R$. Таму ў якасці характэрыстыкі выгнутасці лініі часам выкарыстоўваць радыус крывіні

$$R = \frac{1}{k} = \frac{[1 + (f'(x))^2]^{3/2}}{|f''(x)|}.$$

16.3. КРЫВІНЯ ПРАСТОРАВАЙ КРЫВОЙ.

Няхай прасторавая лінія $\mathcal{L}$ ёсць гадограф вектарнай функцыі $\vec{r}(t) = x(t)\cdot\vec{i} + y(t)\cdot\vec{j} + z(t)\cdot\vec{k}$.

Можна даказаць, што крывіня прасторавай крывой $\mathcal{L}$ вылічваецца па формуле:

$$k = \frac{|[\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)]|}{|\vec{r}\,'(t)|^3}, \quad \alpha \le t \le \beta.$$

дзе

$$\vec{r}\,'(t) = x'(t)\cdot\vec{i} + y'(t)\cdot\vec{j} + z'(t)\,\vec{k}.$$

$$\vec{r}\,''(t) = x''(t)\cdot\vec{i} + y''(t)\cdot\vec{j} + z''(t)\cdot\vec{k}.$$

$$[\vec{r}\,'(t) \times \vec{r}\,''(t)] = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x'(t) & y'(t) & z'(t) \\ x''(t) & y''(t) & z''(t) \end{vmatrix}$$

17. КАМПЛЕКСНЫЯ ЛІКІ І ДЗЕЯННІ НАД ІМІ. ФОРМУЛА ЭЙЛЕРА.

17.1. КАМПЛЕКСНЫЯ ЛІКІ.

Азначэнне. Камплексным называецца лік віду $z = a + ib$ (1), дзе $\forall a, b \in R$, г. зн. з'яўляюцца рэчаіснымі лікамі, i - "уяўная" адзінка, г. зн. $i = \sqrt{-1} \Leftrightarrow i^2 = -1$.

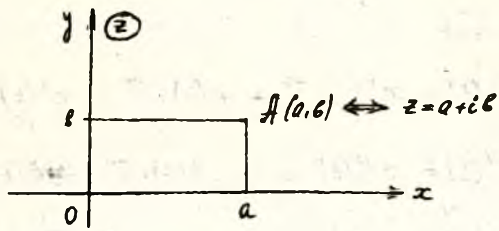
Калі $b = 0 \Rightarrow z = a$, $\forall a \in R$, г. зн. мноства рэчаісных лікаў з'яўляецца падмноствам мноства камплексных лікаў.

Калі $a=0 \Rightarrow z=ib$, $\forall b \in R$, г. зн. мноства цалкам уяўных лікаў таксама з'яўляецца падмноствам мностваў камплексных лікаў.

Выраз камплекснага ліку ў выглядзе роўнасці (I) называецца яго выяўленнем у алгебраічнай форме.

17.2. ГЕАМЕТРЫЧНЫ СЭНС КАМПЛЕКСНАГА ЛІКУ.

Камплексную плоскасць будзем абазначаць (z)

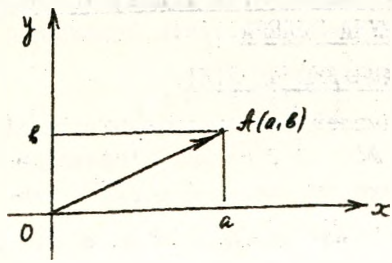


Рыс. 17.1

Кожнаму камплекснаму ліку $z=a+ib$ можна паставіць у адпаведнасць пункт $A(a,b)$ на камплекснай плоскасці (z) і наадварот, кожнаму пункту камплекснай плоскасці $A(a,b)$ паставіць у адпаведнасць камплексны лік $z=a+ib$ (рыс. 17.1).

Такім чынам, паміж мноствам камплексных лікаў і мноствам пунктаў камплекснай плоскасці вызначаецца ўзаемна адназначная адпаведнасць ці ізамарфізм.

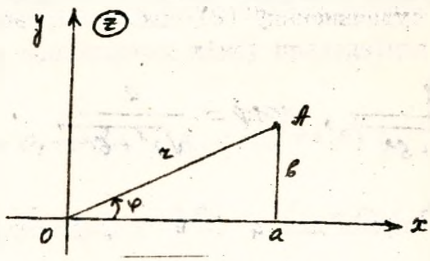
Часам камплекснаму ліку $z=a+ib$ зручна ставіць у адпаведнасць радыус-вектар $\overline{OA}=(a,b)$. (рыс. 17.2).



Рыс. 17.2

Для камплекснага ліку $z=a+ib$ лік a называецца <u>рэчаіснай часткай</u> і абазначаецца $a=Re\,z$, лік b называецца <u>уяўнай часткай</u> і абазначаецца $b=Im\,z$.

Уводзім на камплекснай плоскасці (z) палярную сістэму каардынат. Змесцім полюс у пачатак каардынат і накіруем палярную вось уздоўж восі Ox (рыс. 17.3).



Рыс. 17.3.

Тады прамавугольныя каардынаты пункта A будуць звязаны з яе палярнымі каардынатамі роўнасцямі

$$\begin{cases} a = r\cos\varphi, \\ b = r\sin\varphi. \end{cases} \quad (2)$$

$A(a,b) \longleftrightarrow a+ib \longleftrightarrow A(r,\varphi)$, г. зн. камплекснаму ліку $z=a+ib$ могуць адпавядаць ці прамавугольныя каардынаты пункта $A(a,b)$, ці яе палярныя каардынаты $A(r,\varphi)$.

Пры гэтым r называецца <u>модулем</u> камплекснага ліку і абазначаецца

$$r = |z| = |a+ib| = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Вугал φ называецца <u>аргументам</u> камплекснага ліку і абазначаецца

$$\varphi = Arg\,z,$$

пры чым $Arg\,z = arg\,z + 2k\pi, \quad k \in N$,дзе $arg\,z$

называецца галоўным значэннем аргумента камплекснага ліку і змяняецца у межах

$$0 \le \arg z < 2\pi \qquad \text{ці} \qquad -\pi < \arg z \le \pi .$$

Для вызначэння аргумента камплекснага ліку, г. зн. вугла φ , акрамя судачыненняў (2) выкарыстоўваюць таксама, што

$$\sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}, \quad \operatorname{tg}\varphi = \frac{b}{a}.$$

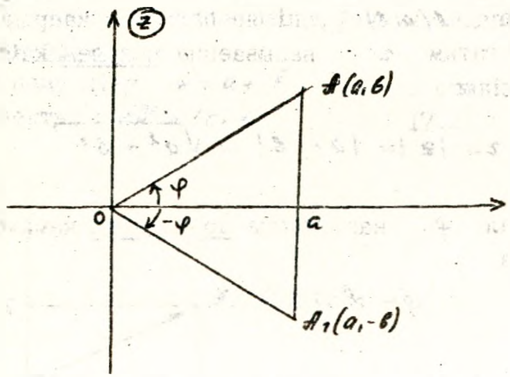
Падставім выразы для a і b з роўнасцяў (2) у формулу (I), атрымаем

$$z = r\cos\varphi + i\,r\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \qquad (3)$$

Выраз (3) называецца выяўленнем камплекснага ліку у трыганаметрычнай форме.

Лік $\bar{z} = a - ib$ называецца спалучаным у адносінах да ліку $z = a + ib$

Відавочна, што $\bar{\bar{z}} = a + ib = z$, г. зн. камплексныя лікі z і $\bar{z}$ узаемна спалучаны (рыс. I7.4).



Рыс. I7.4

Відавочна, што $|\bar{z}| = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$, $\arg \bar{z} = -\arg z$.

Для ліку $z = 0 + i0 = 0$, $|z| = 0$, а $\arg 0$ - нявызначаны.

17.3. ДЗЕЯННІ НАД КАМПЛЕКСНЫМІ ЛІКАМІ.

1. Складанне камплексных лікаў праводзіцца па наступнаму правілу

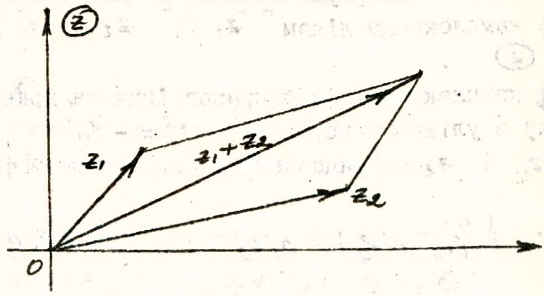
Няхай $z_1 = a_1 + i b_1$, $z_2 = a_2 + i b_2$, $i = \sqrt{-1}$.

$$z_1 + z_2 = a_1 + i b_1 + a_2 + i b_2 = (a_1 + a_2) + i(b_1 + b_2)$$

$$Re(z_1 + z_2) = a_1 + a_2 = Re z_1 + Re z_2.$$

$$Im(z_1 + z_2) = b_1 + b_2 = Im z_1 + Im z_2.$$

Адзначым, што калі кожнаму камплекснаму ліку паставіць у адпаведнасць вектар, то правіла складання камплексных лікаў раўназначна правілу складання адпаведных ім вектараў (рыс.17.5).



Рыс. 17.5

2. Адніманне.

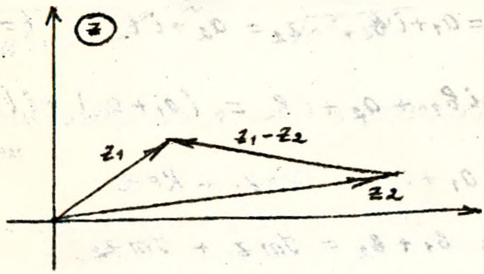
Аналагічна складанню праводзіцца адніманне камплексных лікаў (рыс. 17.6).

$$z_1 - z_2 = (a_1 + i b_1) - (a_2 + i b_2) = a_1 + i b_1 - a_2 - i b_2 =$$

$$= (a_1 - a_2) + i\,(b_1 - b_2).$$

$$Re\,(z_1 - z_2) = a_1 - a_2 = Re\,z_1 - Re\,z_2.$$

$$Im\,(z_1 - z_2) = b_1 - b_2 = Im\,z_1 - Im\,z_2.$$



Рыс. 17.6

$$|z_1 - z_2| = \sqrt{(a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2}.$$

Геаметрычна $|z_1 - z_2|$ роўны адлегласці паміж пунктамі, якія адпавядаюць камплексным лікам z_1 і z_2 на камплекснай плоскасці z.

3. Множанне камплексных лікаў праводзіцца па правілу множання двухскладнікаў з улікам таго, што $i^2 = -1$.

а) Няхай z_1 і z_2 зададзены ў алгебраічнай форме

$$z_1 \cdot z_2 = (a_1 + i b_1) \cdot (a_2 + i b_2) = a_1 a_2 + i a_1 b_2 + i b_1 a_2 - b_1 b_2 =$$

$$= (a_1 a_2 - b_1 b_2) + i\,(a_1 b_2 - a_2 b_1). \qquad (1)$$

$$Re\,z_1 \cdot z_2 = a_1 a_2 - b_1 b_2, \qquad Im\,z_1 \cdot z_2 = a_1 b_2 + a_2 b_1.$$

б) Камплексныя лікі z_1 і z_2 зададзены ў трыганаметрычнай форме

$$z_1 \cdot z_2 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)\cdot r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2) = r_1 r_2\big((\cos\varphi_1\cdot\cos\varphi_2 -$$

$$-\sin\varphi_1\cdot\sin\varphi_2) + i(\sin\varphi_1\cos\varphi_2 + \cos\varphi_1\cdot\sin\varphi_2)\big) = \qquad (2)$$

$$= r_1 r_2\big(\cos(\varphi_1+\varphi_2) + i\sin(\varphi_1+\varphi_2)\big).$$

Такім чынам,

$$|z_1\cdot z_2| = r_1\cdot r_2 = |z_1|\cdot|z_2|.$$

$$\arg z_1\cdot z_2 = \varphi_1+\varphi_2 = \arg z_1 + \arg z_2.$$

Разгледзім здабытак камплексна спалучаных лікаў

$$z\cdot\bar{z} = (a+ib)\cdot(a-ib) = a^2 - i^2 b^2 = a^2+b^2$$

$$|z|^2 = |\bar{z}|^2 = a^2+b^2,$$

$z\cdot\bar{z}\in R$, г. зн. з'яўляецца рэчаісным лікам.

4. Адносіна камплексных лікаў

а) Лікі дадзены ў алгебраічнай форме

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1+ib_1}{a_2+ib_2} = \frac{(a_1+ib_1)(a_2-ib_2)}{(a_2+ib_2)(a_2-ib_2)} =$$

$$= \frac{(a_1a_2+b_1b_2)+i(b_1a_2-a_1b_2)}{a_2^2+b_2^2},$$

$$Re\,\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1a_2+b_1b_2}{a_2^2+b_2^2};\quad Im\,\frac{z_1}{z_2} = \frac{b_1a_2-a_1b_2}{a_2^2+b_2^2}. \qquad (3)$$

б) Лікі дадзены ў трыганаметрычнай форме.

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} \qquad (4)$$

З улікам роўнасці (3) і разважанняў, аналагічных разважанням пры множанні камплексных лікаў у гэтым выпадку, атрымаем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left(\cos(\varphi_1-\varphi_2) + i\sin(\varphi_1-\varphi_2)\right),$$

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{r_1}{r_2} = \frac{|z_1|}{|z_2|}\ ; \quad \arg\frac{z_1}{z_2} = \varphi_1-\varphi_2 = \arg z_1 - \arg z_2 .$$

5. <u>Падвышэнне да ступені і здабыванне кораня</u> з камплекснага ліку.

З роўнасці (2) вынікае <u>формула Муаўра</u>.

Муаўр Абрахам дэ (1667 - 1754) - англійскі матэматык.

$$z^n = \left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi), \quad n\in N. \qquad (5)$$

<u>Азначэнне</u>. Каранем n -ай ступені з камплекснага ліку называецца такі камплексны лік, які пры падвышэнні яго ў n -ную ступень, роўны падкараневаму выразу.

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \rho(\cos\psi + i\sin\psi) \qquad (6)$$

З азначэння і роўнасці (5) вынікае, што

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \rho^n(\cos n\psi + i\sin n\psi) \Rightarrow$$

$$r = \rho^n, \quad \varphi + 2k\pi = n\psi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

$$\rho = \sqrt[n]{r}, \quad \psi = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}, \quad k \in \mathbb{Z}. \qquad (6')$$

Улічваючы (6′), роўнасць (6) перапішам у выглядзе

$$\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\varphi+2k\pi}{n}\right),$$

$$k = 0, 1, 2, \ldots, n-1. \qquad (7)$$

Адзначым, што пры іншых значэннях k значэнні каранеў пачнуць паўтарацца.

Такім чынам, $\sqrt[n]{z}$ мае n розных значэнняў. З роўнасці (7) вынікае, што ў камплекснай плоскасці ўраўненне віду $z^n - a = 0$, дзе $a - \forall const$ мае n каранеў. Больш таго, справядліва асноўная тэарэма алгебры:

Над полем камплексных лікаў усякае алгебраічнае ўраўненне n - най ступені

$$z^n + a_1 z^{n-1} + a_2 z^{n-2} + \ldots + a_n = 0, \quad a_k = \forall const, \quad k = \overline{1,n},$$

$n \in \mathbb{N}$ мае n каранеў ці рэчаісных, ці камплексных.

Прыклады: Знайсці:

1. $\sqrt{i}$, $|i| = 1$, $\arg i = \frac{\pi}{2}$ (рыс. 17.7)

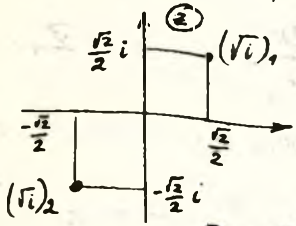
$$i = 1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\sqrt{i} = \sqrt{1\left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right)} = 1\cdot\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right),$$

$$k = 0, 1.$$

$$k = 0 \quad \left(\sqrt{i}\right)_1 = \cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

$$k=1 \quad (\sqrt{i})_2 = \cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

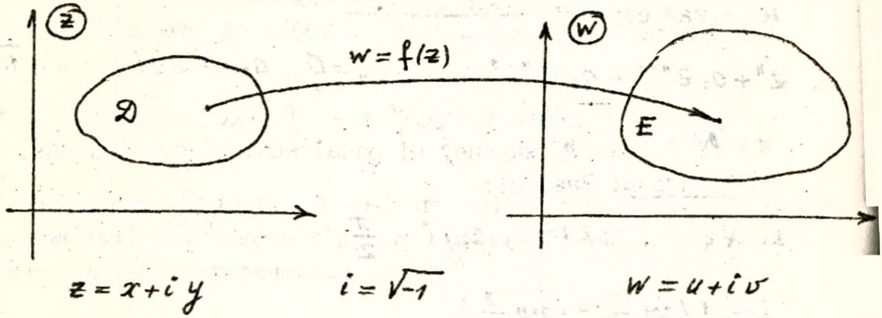


Рыс. 17.7

2) Знайсці самастойна усе значэнні $\sqrt[3]{1}$.
Падкрэслім, што у R быў вядомы $z_1=1$ і невядомыя $z_{2,3} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}}{2}i$.

17.4. ФУНКЦЫІ КАМПЛЕКСНАЙ ПЕРАМЕННАЙ.

Разгледзім дзве камплексныя плоскасці (z) і (w) (рыс. 17.8).



Рыс. 17.8

Азначэнне. Калі кожнаму значэнню пераменнай z з некатарага абсягу $\mathcal{D}$ камплекснай плоскасці (z) ставіцца у адпаведнасць адно вызначанае значэнне $w \in E$ з камплекснай плоскасці (w), то кажуць, што у абсягу $\mathcal{D}$ зададзена адназначная функцыя камплекснай пераменнай і пішуць $w=f(z)$.

I7.5. ПАКАЗНІКАВАЯ ФУНКЦЫЯ КАМПЛЕКСНАЙ ПЕРАМЕННАЙ.

Гэта функцыя азначаецца наступным чынам

$$W = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y) \qquad (I)$$

Калі ў роўнасці (I) палажыць $x=0$, то атрымаем формулу Эйлера

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y \qquad (2)$$

Улічваючы выяўленне камплекснага ліку ў трыганаметрычнай форме і формулу Эйлера (2) атрымаем выяўленне камплекснага ліку ў паказнікавай форме

$$z = r e^{i\varphi}, \quad r = |z|, \quad \varphi = \arg z . \qquad (3)$$

Тэарэтычнае практыкаванне. На аснове роўнасці (I) паказаць, што для паказнікавай функцыі камплекснай пераменнай справядлівы уласцівасці такія самыя, як і для паказнікавай функцыі рэчаіснай пераменнай:

1. $e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{z_1 + z_2}$.

2. $\dfrac{e^{z_1}}{e^{z_2}} = e^{z_1 - z_2}$.

3. $(e^{z})^{n} = e^{nz}$.

Заменім у роўнасці (2) y на $-y$

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y \qquad (4)$$

Складаючы і аднімаючы паміж сабой роўнасці (2) і (4), знойдзем, што

$$\frac{e^{iy}+e^{-iy}}{2} = \cos y = ch\,(iy)$$

$$\frac{e^{iy}-e^{-iy}}{2i} = \sin y = \frac{1}{i}\, sh(iy) = -i\, sh(iy)$$

З роўнасці (I) вынікае, што

$$e^{z+2\pi i} = e^{z}, \quad e^{z+T} = e^{z}, \quad T = 2\pi i,$$

г. зн. $T=2\pi i$ есць перыяд для функцыі $W=e^{z}$.

Разгледзім функцыю $W(x) = u(x) + i\, v(x)$, дзе $u(x)$ і $v(x)$ - дыферэнцавальныя функцыі на некаторым інтэрвале $(a,b) \in R$. Такая функцыя $W(x)$ называецца <u>камплекснай функцыяй рэчаіснага аргумента x</u>.

Можна паказаць, што

$$\lim_{x\to x_0} W(x) = \lim_{x\to x_0} u(x) + i \lim_{x\to x_0} v(x), \quad x_0 \in (a,b).$$

$$W'_x(x) = u'_x(x) + i\, v'_x(x).$$

На заканчэнне прывядзем спіс літаратуры для паглыбленай самастойнай прапрацоўкі матэрыяла па гэтай тэме.

Л І Т А Р А Т У Р А

1. Баврин И.Н. Курс высшей математики. - М.:Просвещение,1992
2. Бугров Я.С., Никольский С.М. Дифференциальное и интегральное исчисление. М. Наука, 1988.
3. Гурский Е.И., Домашов В.П. и др. Руководство к решению задач по высшей математике. Ч.I.-Мн.:ВШ, 1989.
4. Гусак А.А., Гусак Г.М. Справочник по высшей математике. - Мн.: Навука і тэхніка, 1991.
5. Жевняк Р.М., Карпук А.А. Высшая математика: Основы аналитической геометрии и линейной алгебры. Введение в анализ. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. - Мн.: ВШ, 1992.
6. Кудрявцев В.А., Демидович Б.П. Краткий курс высшей математики. - М.: Наука, 1986.
7. Пискунов Н.С. Дифференциальное и интегральное исчисления. Т. I. М.: Наука, 1985.
8. Радыно Я.В., Шуба П.П. и др. Русско-белорусский математический словарь. - Мн.: ВШ, 1993.
9. Рябушко А.П., Бархатов В.В. и др. Сборник индивидуальных заданий по высшей математике. Ч.I. - Мн.: ВШ, 1990.
10. Сухая Т., Еудакіменка Р. і др. Тэрміналагічны слоўнік па вышэйшай матэматыцы для ВНУ. - Мн.: Навука і тэхніка, 1993.

З М Е С Т

УВОДЗІНЫ У МАТЭМАТЫЧНЫ АНАЛІЗ.

ДЫФЕРЭНЦЫЯЛЬНАЕ ЗЛІЧЭННЕ ФУНКЦЫЙ АДНОЙ ПЕРАМЕННАЙ.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Авторы: Тузик Альфред Иванович
Тузик Татьяна Александровна

ВВЕДЕНИЕ В МАТЕМАТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ. ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Учебное пособие
по высшей математике для студентов
электронно-механических специальностей
технических высших учебных заведений
(на белорусском языке)

Ответственный за выпуск Тузик А.И.
Редактор Строкач Т.В.

Подписано к печати 10.01.96 г. Формат 60x84/16.
Бумага офсетная. Усл. п.л. 6,7. Уч. изд. л. 7,25.
Тираж 200 экз. Заказ № 170. Цена договорная.
Отпечатано на ризографе Брестского политехнического
института. 224017. Брест, ул. Московская, 267.