

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»
Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

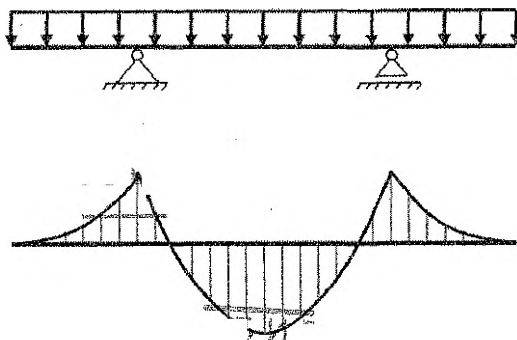
ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения расчетно-проектировочной работы №1
по механике материалов
«ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ»
для студентов специальностей

1-36 01 01 – “Технология машиностроения”

1-36 01 03 – “Технология и оборудование машиностроительного производства”

1-37 01 06 – “Техническая эксплуатация автомобилей”



УДК 539.3/8

Составители: В.М. Хвисевич, доцент, к.т.н.,
С. С. Даркович, ст. препод.,
С. Р. Онысько, ассистент,
И.С. Сырица, доцент, к.т.н..

Рецензент: директор филиала УП "Институт БелНИИС" – "Научно-технический центр", к.т.н. А. Я. Найчук.

СОДЕРЖАНИЕ

	Стр.
Введение.....	4
Указания по выполнению и оформлению расчетно-проектировочных работ по механике материалов.....	4
1 Силы внешние и внутренние.....	4
2 Определение внутренних сил методом сечений.....	5
3 Эпюры внутренних силовых факторов.....	6
4 Примеры построения эпюр внутренних силовых факторов.....	8
4.1 Растяжение-сжатие.....	8
4.2 Кручение.....	9
4.3 Плоский поперечный изгиб.....	11
4.3.1 Основные определения.....	11
4.3.2 Построение эпюр Q и M по аналитическим выражениям функций.....	11
4.3.3 Дифференциальные зависимости между q, Q, M и вытекающие из них общие правила к построению эпюр Q и M.....	13
4.4 Построение эпюр для рам.....	16
5 Задание на выполнение расчетно-проектировочной работы.....	19
Список литературы.....	27

ВВЕДЕНИЕ

Механика материалов изучает поведение материалов под нагрузкой и обеспечивает в процессе проектирования необходимые прочность, жесткость и устойчивость частей машин и сооружений при наименьшем расходе материала.

Разрушение изделия означает преодоление внутренних сил связи между его частями. Для суждения о возможности разрушения необходимо знать эти силы.

Данные методические указания содержат краткий теоретический материал и примеры расчетов по теме «Построение эпюр внутренних силовых факторов», а также схемы и числовые данные для выполнения расчетно-проектировочной работы №1 студентами специальностей 1-36 01 01, 1-36 01 03, 1-37 01 06.

УКАЗАНИЯ ПО ВЫПОЛНЕНИЮ И ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ

- 1 Расчетно-проектировочная работа выполняется на отдельных листах формата А4.
- 2 Порядок оформления: титульный лист; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; выводы; перечень литературы.
- 3 Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов, стандарта УО «БрГТУ».
- 4 Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до трех - четырех значащих цифр, считая от левой руки к правой.
- 5 Эпюры усилий, напряжений, перемещений необходимо строить на одном листе с расчетной схемой, при этом на эпюрах указывать числовые значения характерных ординат и единицы расчетных величин.
- 6 Все рисунки (схемы, эпюры, сечения и т.д.) должны быть пронумерованы, обозначены, упомянуты в тексте и приведены после соответствующей ссылки в самом тексте или на отдельном листе.

1 СИЛЫ ВНЕШНИЕ И ВНУТРЕННИЕ

Механика материалов рассматривает отдельные конструкционные элементы сооружений, машин и механизмов, представляющие собой пространственные трехмерные тела, по большей части, в виде бруса.

Внешние силовые воздействия на элемент конструкции обычно называют **нагрузками**. Нагрузки могут быть поверхностными и объемными.

Поверхностные нагрузки, передающиеся через малые участки по сравнению с размерами элемента (тела), называют **сосредоточенными силами**. Принятое обозначение сосредоточенных сил – F , размерность – H (Ньютон).

Поверхностные силы, передающиеся на значительные участки поверхности, соизмеримые с размерами тела, называются **распределенными нагрузками**. Распределенные нагрузки характеризуются **интенсивностью** (принятое обозначение – q) их распределения по площади ($H / м^2$) или по длине ($H / м$).

Объемные силы распределены по объему элемента конструкции. К ним относятся силы тяжести, силы инерции и др. (размерность – H/m^3).

Примечание. В механике материалов к числу внешних сил относятся не только заданные нагрузки, но также и реакции связей. При этом, полагая, что реактивные силы передаются на малые участки поверхности бруса, обычно их относят к сосредоточенным силам. Для нахождения реакций рассматриваемое упругое тело представляют “абсолютно твердым” (принцип отвердения из курса “Теоретическая механика”). По условиям равновесия, известным из теоретической механики, находятся неизвестные реакции. Если число реакций больше количества возможных уравнений равновесия, задача относится к статически неопределимым и решается методами, которые будут рассмотрены позже.

Внутри тела, между соседними частицами, можно предположить определенные силы взаимодействия. Эти силы стремятся сохранить тело как единое целое и противодействуют попыткам изменить взаимное расположение частиц, т.е. деформировать тело. Отметим, что внешние силы, наоборот, всегда вызывают деформацию тела, т.е. стремятся изменить взаимное расположение частиц.

В механике материалов не рассматриваются и не учитываются внутренние силы, действующие внутри ненагруженного тела, а вычисляются только те дополнительные величины внутренних сил, которые появляются в результате нагружения тела. Внутренние силы (усилия) – это силы внутреннего противодействия попыткам деформировать тело.

2 ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВНУТРЕННИХ СИЛ МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ

Причиной разрушения тела принято считать превышение внутренними силами некоторого предельного значения для материала данного тела. Поэтому, чтобы рассчитать конструкцию на прочность, необходимо уметь определять внутренние силы, для выявления которых в механике материалов применяется метод сечений. Суть его в следующем.

Рассечем *мысленно* брус, нагруженный уравновешенной системой внешних сил, произвольным сечением I (рис. 2.1а) на две части и отбросим одну из них. Чтобы сохранить равновесие оставшейся части бруса, заменим действие отброшенной части системой внутренних сил (рис. 2.1б). Приводя эту систему сил к центру тяжести сечения, получим главный вектор и главный момент, которые можно разложить на составляющие по выбранным осям (z – перпендикулярно сечению, x , y – в плоскости сечения). Получаем три силы N , Q_x , Q_y и три момента M_x , M_y , T (рис. 2.1в), которые в совокупности называются внутренними силовыми факторами.

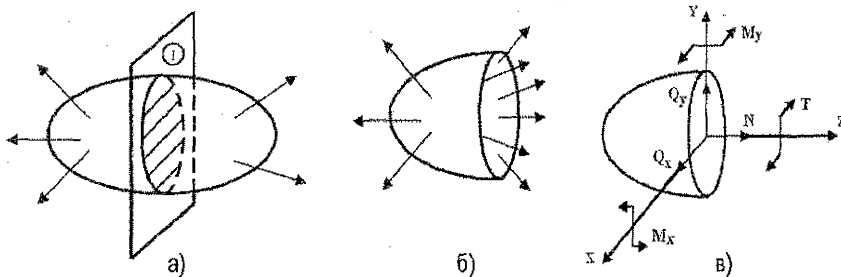


Рис. 2.1

Так как рассматриваемая часть бруса, нагруженная заданными внешними силами и шестью внутренними силовыми факторами, является уравновешенной системой, то для

нее можно составить шесть уравнений равновесия и получить:

$$\begin{aligned} N &= \sum F_n, & T &= \sum M_z(F_i), \\ Q_y &= \sum F_y, & M_y &= \sum M_y(F_i), \\ Q_x &= \sum F_x, & M_x &= \sum M_x(F_i). \end{aligned}$$

В механике материалов принято следующее название внутренних силовых факторов: N – нормальная (продольная) сила, которая растягивает брус, если сила N направлена от сечения или сжимает, если сила N направлена к сечению;

Q_x, Q_y – поперечные силы, срезают (сдвигают) одну часть бруса относительно другой;

T – крутящий момент, поворачивает поперечные сечения вокруг оси, т.е. скручивает брус без искривления оси;

M_x, M_y – изгибающие моменты, вызывают изгиб бруса (в соответствующих плоскостях), сопровождающийся искривлением оси.

Такая классификация внутренних сил позволяет выделить четыре вида простых деформаций: растяжение (сжатие), сдвиг, кручение, изгиб.

Примечание. Так как внутренние силы определяют взаимодействие между частями бруса, т.е. являются силами действия и противодействия, то они равны и противоположно направлены. Поэтому внутренние силовые факторы можно определять отбрасыванием как левой, так и правой части.

3 ЭПЮРЫ ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

Метод сечений позволяет найти все усилия и моменты в любом сечении бруса при действии любой нагрузки. В расчетах на прочность требуется знать положение опасных сечений, т.е. сечений, где действуют максимальные по величине внутренние силы или их неблагоприятные сочетания. Поэтому удобно графическое представление закона распределения силовых факторов по длине бруса.

Графическое изображение величины внутреннего силового фактора в зависимости от положения поперечного сечения на оси бруса называется эпюрой этого силового фактора. Ось эпюры параллельна оси бруса, каждая ордината показывает величину (в масштабе) и знак усилия или момента в том сечении, где расположена эта ордината. Рядом с эпюрой указывается название и размерность.

Усилия N, Q_y, Q_x и моменты T, M_y, M_x вычисляются как алгебраическая сумма проекций или моментов внешних сил, действующих на одну из частей бруса (левую или правую). Условимся о знаках силовых факторов:

Продольная сила N – положительна, если она вызывает растяжение, и отрицательна, если вызывает сжатие (рис. 3.1).

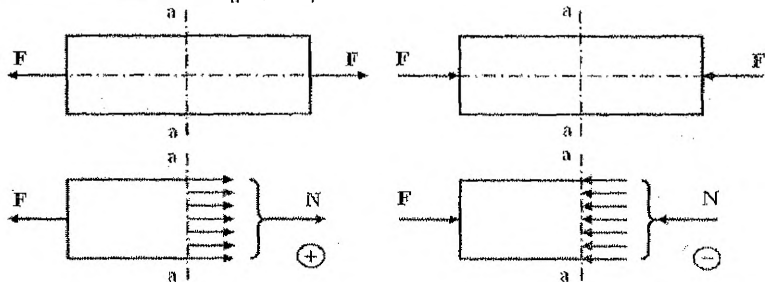


Рис. 3.1.

Поперечная сила Q_x или Q_y – положительна, если направлена по часовой стрелке относительно сечения и отрицательна, если действует против часовой стрелки (рис. 3.2).

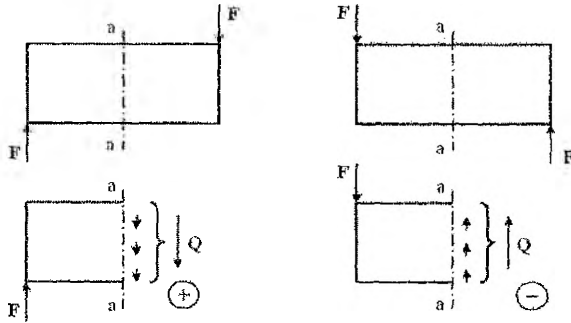


Рис. 3.2.

Крутящий момент T – считается положительным, если, глядя со стороны внешней нормали сечения, он направлен против часовой стрелки, и отрицательным – по часовой стрелке (рис. 3.3).

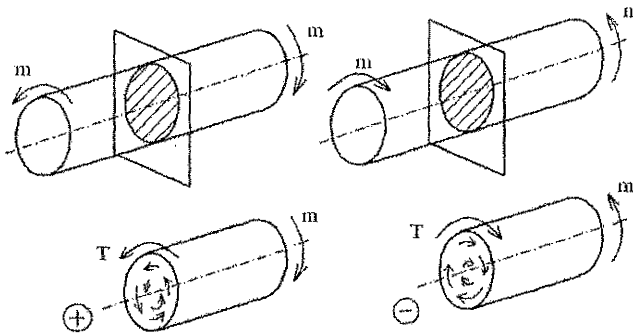


Рис. 3.3.

Изгибающий момент M – считается положительным, если элемент бруса изгибается выпуклостью вниз, т.е. растянутые волокна находятся внизу. Отрицательный изгибающий момент изгибает элемент выпуклостью вверх (рис. 3.4)

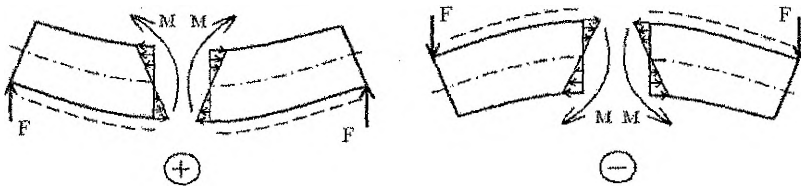


Рис. 3.4.

4 ИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ

4.1 Растяжение – сжатие

При растяжении (сжатии) прямого бруса в поперечных сечениях действует только продольная сила N .

Пример 1. Для бруса со ступенчато – переменным сечением построить эпюру продольных сил.

Решение:

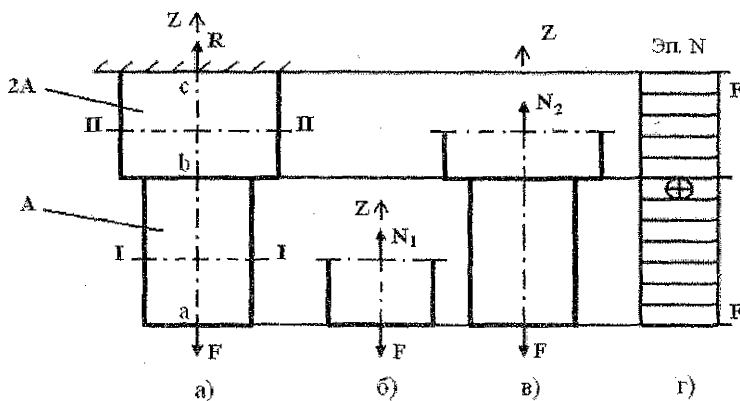


Рис. 4.1.

Разбиваем брус на участки, начиная от свободного конца. Границами участков являются сечения, в которых приложены внешние силы или ступенчато меняются размеры поперечного сечения. В нашем случае брус имеет два участка: ab и bc .

Проводим произвольное сечение $I-I$ на участке ab (рис. 4.1а). Отбрасываем верхнюю часть (это позволяет не определять реакцию заделки) и заменяем ее действие на оставшуюся нижнюю часть продольной силой N_1 (рис. 4.1б). Составляем уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0; N_1 - F = 0; N_1 = F.$$

Легко видеть, что во всех поперечных сечениях участка ab продольная сила растягивающая и равна F .

Проводим произвольное сечение $II-II$ на участке bc . Отбрасываем верхнюю часть и заменяем ее действие продольной силой N_2 (рис. 4.1в). Составляем уравнение равновесия:

$$\sum Z = 0; N_2 - F = 0; N_2 = F.$$

На участке bc продольная сила растягивающая и равна F .

Эпюра N показана на рис. 4.1г. Видно, что изменение размеров поперечного сечения не влияет на величину продольной силы. Реакция R в защемлении равна продольной силе в сечении c , т.е. $R = N_2 = F$.

Пример 2. Для бруса постоянной жесткости, защемленного одним концом, нагруженного, как показано на рис. 4.2, построить эпюру N .

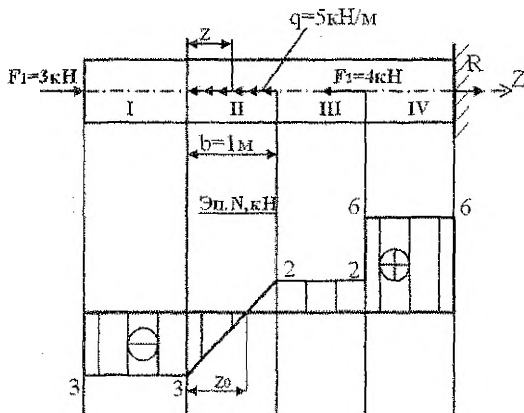


Рис. 4.2.

На участке II приложена равномерно распределенная осевая нагрузка, поэтому продольная сила изменяется по линейному закону:

$$N_2 = -F_1 + q \cdot z, \quad 0 \leq z \leq b;$$

$$z = 0, \quad N_2 = -F_1 = -3 \text{ кН};$$

$$z = b, \quad N_2 = -F_1 + q \cdot b = -3 + 5 \cdot 1 = 2 \text{ кН}.$$

На участке III и IV продольные силы постоянны:

$$N_3 = -F_1 + q \cdot b = 2 \text{ кН},$$

$$N_4 = -F_1 + q \cdot b + F_2 = -3 + 5 \cdot 1 + 4 = 6 \text{ кН}.$$

Строим эпюру N . Из неё видно, что реакция R в заделке направлена от бруса, (т.е. растягивает) и равна 6 кН.

Для проверки эпюры N можно составить уравнение равновесия всего бруса:

$$\sum Z = 0; \quad F_1 - q \cdot b - F_2 + R = 0;$$

$$R = -F_1 + q \cdot b + F_2 = -3 + 5 \cdot 1 + 4 = 6 \text{ кН}.$$

Вычисленное значение совпадает со значением R , взятым из эпюры.

Если необходимо найти положение сечения, где $N = 0$ (т.е. эпюра N пересекает ось), надо приравнять к нулю выражение для продольной силы на этом участке. В нашем случае:

$$-F + q \cdot z_0 = 0; \quad z_0 = \frac{F}{q} = \frac{3}{5} = 0,6 \text{ м}.$$

Примечание. Распределение продольных сил вдоль оси бруса подчиняется дифференциальной зависимости $q = \frac{dN}{dz}$. Она позволяет контролировать правильность построения эпюры N , особенно при действии на брус распределенной нагрузки переменной интенсивности $q = q(z)$.

4.2 Кручение

Кручение характеризуется наличием в брусѐ единственного силового фактора – крутящего момента T , действующего в плоскости поперечного сечения и вычисляемого как алгебраическая сумма вращающих моментов внешних сил, расположенных по одну сторону от сечения.

Решение:

Разбиваем брус на силовые участки (четыре). Из предыдущего примера видно, что продольная сила в сечении равна сумме проекций на ось бруса всех внешних сил, приложенных к оставшейся части. Рассекаем "мысленно" брус на I участке, отбрасываем правую часть:

$$N_1 = -F_1 = -3 \text{ кН}.$$

Сила F_1 взята со знаком "минус", так как она сжимает оставшуюся левую часть бруса.

Брусы, работающие на кручение, называют **валами**.

Пример 3. Прямой ступенчатый брус жестко заделан одним концом и нагружен, как показано на рис. 4.3.

Построить эпюру крутящих моментов T .

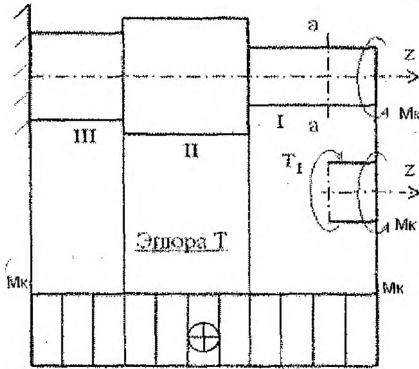


Рис. 4.3.

Решение:

Эпюру T строим, начиная со свободного (правого) конца, что позволяет не определять реактивный момент в заделке. Проведя произвольное сечение $a-a$ на I участке и составляя для оставленной части (рисунок 4.3) уравнение равновесия $\sum M_z = 0$, получаем: $T_1 = M_k$. Аналогично получаем: $T_2 = T_3 = M_k$. Строим эпюру T . Видим, что крутящий момент по длине бруса не изменяется. Ступенчатое изменение размеров поперечных сечений на распределение T влияния не оказало.

Пример 4. Вал постоянного диаметра, вращающийся в подшипниках A и B (рис. 4.4), передает сосредоточенные вращающие моменты $M_{K1} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{K2} = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}$, $M_{K3} = 4 \text{ кН} \cdot \text{м}$ и равномерно-распределенный вращающий момент интенсивностью $m = 2 \text{ кН} \cdot \text{м/м}$, приложенный на участке длиной $a = 0,5 \text{ м}$. Построить эпюру крутящих моментов T .

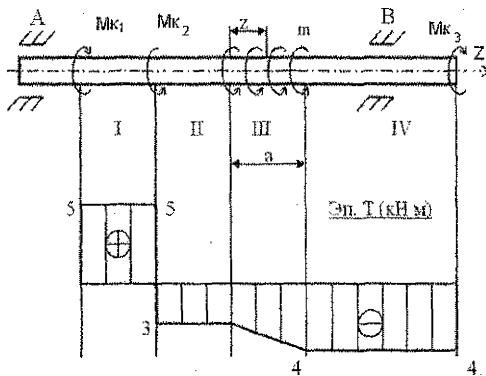


Рис. 4.4.

Решение:

Разбиваем вал на четыре участка. Проводя произвольные сечения на участках I, II, IV , получаем:

$$T_1 = M_{K1} = 5 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$T_2 = M_{K1} - M_{K2} = 5 - 8 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м},$$

$$T_4 = -M_{K3} = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

На участке III момент изменяется в зависимости от координаты z поперечного сечения:

$$0 \leq z \leq a; T_3 = M_{K1} - M_{K2} - m \cdot z;$$

$$z = 0;$$

$$T_3 = M_{K1} - M_{K2} = 5 - 8 = -3 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$z = a;$$

$$T_3 = M_{K1} - M_{K2} - m \cdot a = 5 - 8 - 2 \cdot 0,5 = -4 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

С учетом масштаба строим эпюру T .

Примечание. Интенсивность распределенного по длине внешнего вращающего момента и крутящий момент связаны дифференциальной зависимостью: $m = \frac{dT}{dz}$. Её можно использовать для проверки правильности построения эпюры T .

4.3 Плоский поперечный изгиб

4.3.1 Основные определения

При изгибе в поперечном сечении бруса возникает изгибающий момент. Такой изгиб называется **чистым**. Однако в большинстве случаев одновременно с изгибающим моментом возникает и поперечная сила. Такой изгиб называется **поперечным**. Если все нагрузки и реакции связей действуют в одной плоскости, изгиб называют **плоским**. Предполагается, что нагрузки перпендикулярны оси бруса. В этом случае поперечная сила Q в произвольном сечении бруса равна алгебраической сумме внешних сил, приложенных к его отсеченной части, а изгибающий момент M равен алгебраической сумме моментов этих сил относительно рассматриваемого сечения. Брус, работающий на изгиб, называют **балкой**.

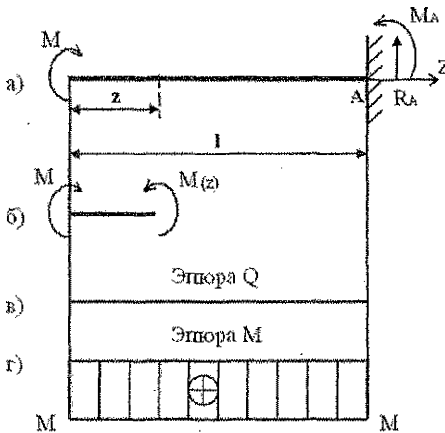


Рис. 4.5.

в сечении заделки равны соответственно реактивной силе и реактивному моменту, т.е. $R_A = 0$, $M_A = M$. Балка испытывает чистый изгиб.

Пример 6. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для балки, изображенной на рис. 4.6а.

Решение:

Рассматривая равновесие левой отсеченной части получаем:

$$Q(z) = -F,$$

$$M(z) = -F \cdot z.$$

Поперечная сила одинакова во всех сечениях и не зависит от координаты z (рис. 4.6в).

Изгибающий момент изменяется по линейному закону от нуля (при $z = 0$) до наибольшего (по модулю) значения: $M = -F \cdot l$ (рис. 4.6г).

4.3.2. Построение эпюр Q и M по аналитическим выражениям функций
Пример 5. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для балки, изображенной на рис. 4.5а.

Решение:

Проведем произвольное сечение на расстоянии z от свободного конца балки и рассмотрим условие равновесия левой отсеченной части (рис. 4.5б):

$$Q(z) = 0,$$

$$M(z) = M.$$

Положительные ординаты эпюры M будем откладывать вниз от оси, т.е. в сторону растянутых волокон (правило растянутого волокна). Очевидно, что Q и M в сечении

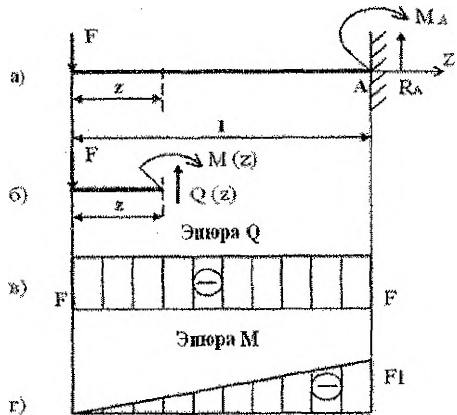


Рис. 4.6.

Пример 7. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для балки, изображенной на рис. 4.7а.

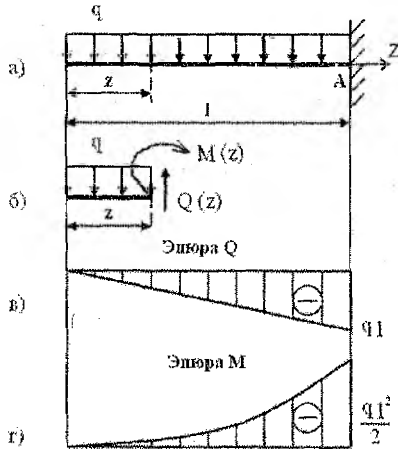


Рис. 4.7.

Пример 8. Построить эпюры поперечной силы Q и изгибающего момента M для балки, изображенной на рис. 4.8а.

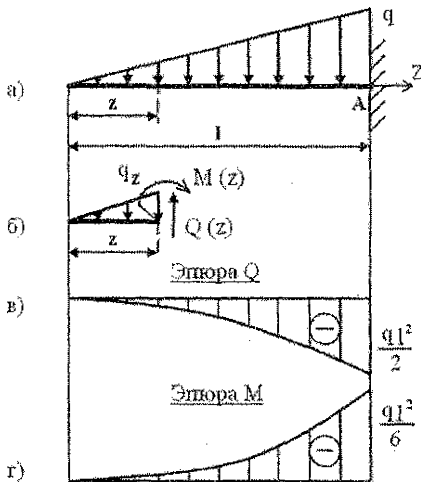


Рис. 4.8.

Из уравнения видно, что эпюра Q очерчена квадратной параболой, эпюра M — кубической.

При $z = 0$, $Q = 0$; $M = 0$;

При $z = l$, $Q = -\frac{ql^2}{2}$; $M = -\frac{ql^2}{6}$.

Решение:

Поперечная сила в произвольном сечении, отстоящем на расстоянии z от свободного конца, равна:

$Q(z) = -q \cdot z$, т.е. линейно изменяется от $Q = 0$ (при $z = 0$) до $Q = -ql$ (при $z = l$).

Изгибающий момент:

$M(z) = -q \frac{z^2}{2}$, т.е. изменяется по квадратичному закону. Эпюра $M(z)$ — парабола с вершиной в начале координат.

При $z = 0$, $M = 0$;

При $z = l$, $M = -\frac{ql^2}{2}$.

Кривая вогнута (при $z = \frac{l}{2}$, $M = -\frac{ql^2}{8}$).

Решение:

Балка нагружена распределенной нагрузкой, изменяющейся по линейному закону. В произвольном сечении z внутренние силы равны:

$Q(z) = -\frac{1}{2} \cdot q_z \cdot z$,

$M(z) = -\frac{1}{2} \cdot q_z \cdot z \cdot \frac{1}{3} \cdot z = -\frac{q_z z^2}{6}$.

Неизвестную величину q_z выразим из подобия треугольников:

$q_z = q \cdot \frac{z}{l}$.

Окончательно функции внутренних силовых факторов приобретают вид:

$Q(z) = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{z^2}{l}$,

$M(z) = -\frac{qz^3}{6l}$.

Полученные эпюры показаны на рис. 4.8 в, г. Точное очертание кривых, очерчивающих эпюры Q и M , можно получить, вычисляя значения Q и M в промежуточных точках. Иную возможность предоставляют дифференциальные зависимости, рассмотренные ниже.

4.3.3. Дифференциальные зависимости между q , Q , M и, вытекающие из них, общие правила к построению эпюр Q и M .

Построение эпюр Q и M упрощается при использовании дифференциальных зависимостей: $q = \frac{dQ}{dz}$ и $Q = \frac{dM}{dz}$.

Объединив две зависимости в одну, получаем: $q = \frac{dQ}{dz} = \frac{d^2M}{dz^2}$.

Для балок, имеющих два силовых участка и более, целесообразно строить эпюры, вычисляя значения Q и M только у границ участков, и, при необходимости, экстремальные значения. Приведем правила, используемые при таком построении эпюр (по характерным точкам), которые вытекают из дифференциальных зависимостей и непосредственно из метода сечений.

1. На участке, где нет распределенной нагрузки, Q – прямая, параллельная оси ($Q = const$), эпюра M – наклонная прямая.
2. На участке, где приложена равномерно-распределенная нагрузка q , эпюра Q – наклонная прямая (наклон – в сторону нагрузки, если двигаться слева направо), эпюра M – квадратная парабола выпуклостью в сторону действия нагрузки.
3. Если на некотором участке:
 - а) $Q > 0$, изгибающий момент M возрастает;
 - б) $Q < 0$, изгибающий момент M убывает;
 - в) $Q = 0$, изгибающий момент M постоянен (чистый изгиб).
4. Если поперечная сила Q , изменяясь непрерывно, пересекает ось ($Q = 0$), изгибающий момент M принимает экстремальное значение.
5. В сечении, где приложена сосредоточенная сила, на эпюре Q – скачок на величину силы, на эпюре M – излом в сторону действия силы.
6. В сечении, где приложен сосредоточенный момент, на эпюре Q – не отражается, на эпюре M – скачок на величину момента.
7. В сечении, совпадающем с заделкой, Q и M численно равны опорной реакции и реактивному моменту.

Построение эпюр по характерным точкам покажем на примерах.

Пример 9. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для балки, изображенной на рис. 4.9а.

Решение:

1. Балка имеет две опоры. Необходимо определить реакции:

$$\sum M_A = 0; \quad \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \cdot \frac{2}{3} \cdot l - R_B \cdot l = 0; \quad R_B = \frac{ql}{3}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot l - \frac{1}{2} \cdot q \cdot l \cdot \frac{1}{3} \cdot l = 0; \quad R_A = \frac{ql}{6}.$$

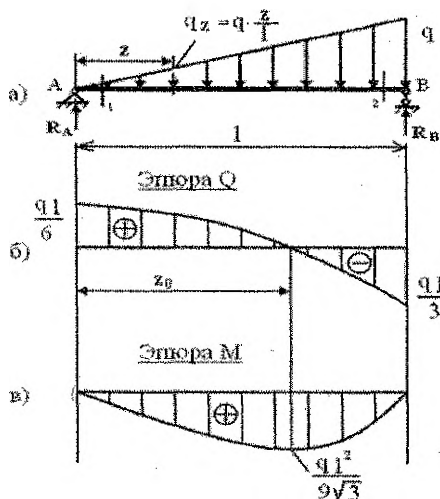


Рис. 4.9.

Проверка:

$$\sum Y = 0; \quad R_A + R_B - \frac{1}{2} \cdot q \cdot l = 0;$$

$$\frac{ql}{6} + \frac{ql}{3} - \frac{ql}{2} = 0.$$

Реакции найдены верно.

2. Устанавливаем характерные сечения 1, 2 (в непосредственной близости от границ участка).

3. Определяем Q и M в характерных сечениях:

$$Q_1 = R_A = \frac{ql}{6}; \quad M_1 = 0;$$

$$Q_2 = -R_B = -\frac{ql}{3}; \quad M_2 = 0.$$

4. Строим эпюры Q и M .

Эпюра Q показана на рис. 4.9б. Выпуклость эпюры Q следует из дифференциальной зависимости $q = \frac{dQ}{dz}$ (интенсивность нагрузки слева направо возрастает, тангенс угла наклона касательной к эпюре Q также возрастает). Эпюра Q пересекает ось (от плюса к минусу). Находим сечение, где $Q = 0$. Записываем выражение $Q(z)$:

$$Q(z) = R_A - q \cdot \frac{1}{2} \cdot z = \frac{q \cdot l}{6} - \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{z}{l} \cdot z;$$

При $z = z_0$; $Q(z_0) = 0$; $z_0 = \frac{l}{\sqrt{3}}$.

$$M_{\text{макс}} = R_A \cdot z_0 - \frac{1}{2} \cdot q \cdot \frac{z_0}{l} \cdot z_0 \cdot \frac{1}{3} \cdot z_0 = \frac{q \cdot l}{6} \cdot \frac{l}{\sqrt{3}} - \frac{q}{6 \cdot l} \cdot \left(\frac{l}{\sqrt{3}}\right)^3 = \frac{ql^2}{9\sqrt{3}};$$

Эпюра M показана на рис. 4.9в.

Пример 10. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для балки, изображенной на рис. 4.10а.

Решение:

1. Определение реакций:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 4a \cdot 2a + qa \cdot 4a + qa^2 + \frac{1}{2} \cdot q \cdot 2a \cdot \left(\frac{2}{3} \cdot 2a + 5a\right) - R_B \cdot 5a = 0;$$

$$R_B = \frac{(8 + 4 + 1 + \frac{19}{3}) \cdot qa^2}{5a} = 3,87qa.$$

$$\sum M_B = 0; \quad R_A \cdot 5a - q \cdot 4a \cdot 3a - qa \cdot a + qa^2 + \frac{1}{2} \cdot q \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = 0;$$

$$R_A = \frac{(12 + 1 - 1 - \frac{4}{3}) \cdot qa^2}{5a} = 2,13qa.$$

Проверка: $\sum Y = 0$; $R_A + R_B - q \cdot 4a - qa - \frac{1}{2} \cdot q \cdot 2a = 2,13qa + 3,87qa - 4qa - qa - qa = 0.$

Реакции найдены верно.

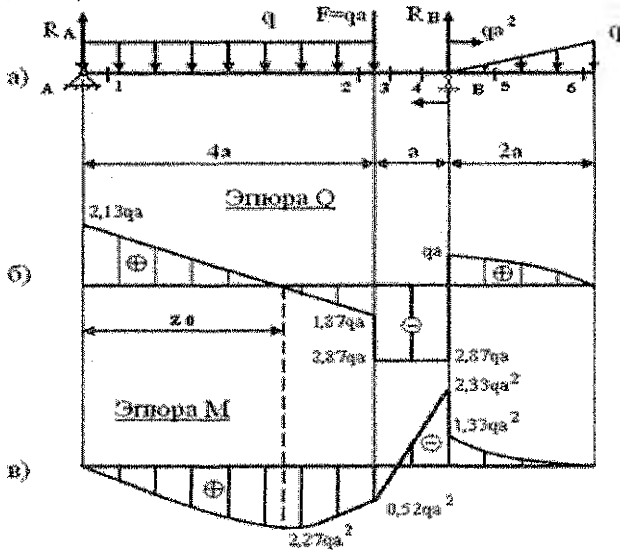


Рис. 4.10.

2. Разбиваем балку на силовые участки и проводим шесть характерных сечений бесконечно близко от границ участков.

3. Определяем величину Q и M в характерных сечениях:

$$Q_1 = R_A = 2,13qa; \quad Q_2 = R_A - q \cdot 4a = 2,13qa - 4qa = -1,87qa;$$

$$Q_3 = R_A - q \cdot 4a - F = 2,13qa - 4qa - qa = -2,87qa; \quad Q_4 = Q_3 = -2,87qa;$$

$$Q_5 = \frac{1}{2} \cdot q \cdot 2a = qa; \quad Q_6 = 0.$$

$$M_1 = 0; \quad M_2 = R_A \cdot 4a - q \cdot 4a \cdot 2a = 2,13qa \cdot 4a - 8 \cdot qa^2 = 0,52qa^2;$$

$$M_3 = M_2 = 0,52qa^2; \quad M_4 = R_A \cdot 5a - q \cdot 4a \cdot 3a - F \cdot a = 2,13qa \cdot 5a - 12qa^2 - qa^2 = -2,33qa^2;$$

$$M_5 = -\frac{1}{2} \cdot q \cdot 2a \cdot \frac{2}{3} \cdot 2a = -1,33qa^2; \quad M_6 = 0.$$

4. Строим эпюры Q и M , используя полученные значения и общие правила построения эпюр.

На участке 1-2, эпюра Q пересекает ось. Вычисляем ординату z_0 . Возможны три способа:

а) записать выражение для поперечной силы на участке 1-2 и приравнять к нулю, т.е. $Q(z) = 0$;

б) учитывая, что Q на участке 1-2 изменяется линейно, можно составить пропорцию:

$$\frac{Q_1}{z_0} = \frac{Q_2}{4a - z_0};$$

в) воспользоваться выражением: $z_0 = \frac{Q_0}{q}$, где $Q_0 = Q_1 = 2,13qa$ — значение (по модулю) поперечной силы в начале участка.

$$z_0 = \frac{2,13qa}{q} = 2,13a.$$

Находим экстремальное значение изгибающего момента:

$$M_{\text{экстр}} = R_A \cdot z_0 - q \cdot \frac{z_0^2}{2} = 2,13qa \cdot 2,13a - q \cdot \frac{(2,13a)^2}{2} = 2,27qa^2.$$

Окончательные эпюры Q и M показаны на рис. 4.10б, в.

Пример 11. Построить эпюры поперечных сил Q и изгибающих моментов M для балки, имеющей внутренний шарнир (рис. 4.11а.).

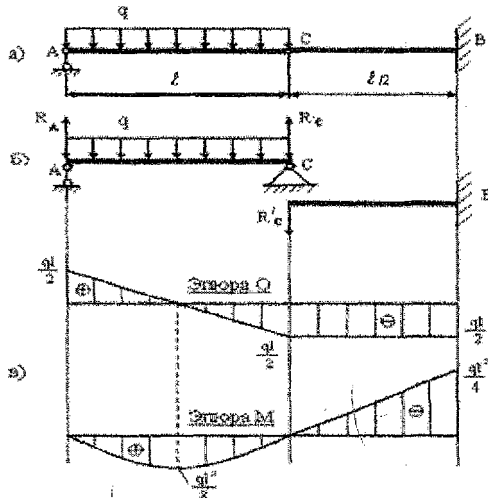


Рис. 4.11

Для балки AC реакции $R_A = R_C = \frac{ql}{2}$, эпюры Q и M показаны на рис. 4.11в (левая часть). Реакция R_C передается на консоль CB ($|R_C| = R_C = \frac{q \cdot l}{2}$), но R'_C действует сверху вниз. Эпюры Q и M для консоли показаны на рис. 4.11в (правая часть). Полные эпюры Q и M составлены из двух частей каждая.

Решение:

Так как в сечении C имеется промежуточный шарнир, то балку удобно представить в виде двух балок (рис. 11б): левой – однопролетной балки AC (подвесной) и правой – консольной балки CB (основной).

Однопролетная балка правым концом C опирается на свободный конец консоли. Удобно строить эпюры Q и M для каждой балки отдельно.

Для балки AC реакции $R_A = R_C = \frac{ql}{2}$, эпюры Q и M показаны на рис. 4.11в (левая часть). Реакция R_C передается на консоль CB ($|R_C| = R_C = \frac{q \cdot l}{2}$), но R'_C действует

сверху вниз. Эпюры Q и M для консоли

4.4 Построение эпюр для рам

Рамы – это системы, состоящие из жестко соединенных прямолинейных стержней. Ось рамы – ломаная линия. Каждый прямолинейный участок удобно рассматривать как балку, однако в раме, кроме изгибающих моментов M и поперечных сил Q , действуют еще и продольные силы N . Правила знаков для N и Q сохраняются ранее принятые. Для изгибающих моментов M правило знаков обычно не устанавливают и при построении эпюр M ординаты откладывают по ту сторону, где растянутое волокно от изгиба. (Примечание. Некоторые авторы считают удобным строить эпюры M со стороны сжатого волокна). Для удобства какой-либо момент можно принять за положительный.

Эпюры N , Q , M для рам строят по методу сечений, применяя приведенные ранее для балок правила.

Аналитические выражения функций N , Q , M записываются редко (например, для определения экстремальных значений на криволинейных участках эпюр). Обычно эпюры N , Q , M строят по точкам, вычисляя значения в характерных сечениях.

Пример 12. Построить эпюры Q , M и N для рамы, изображенной на рис. 4.12а.

Решение:

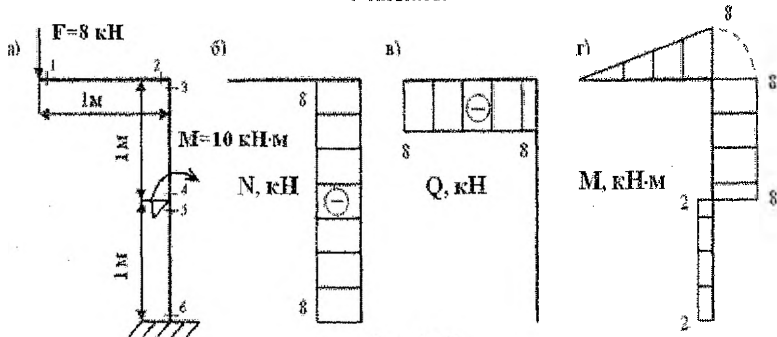


Рис. 4.12.

Выделяем шесть характерных сечений (рис. 4.12а).

Строим эпюру N (рис. 4.12б):

$$N_1 = 0; \quad N_2 = 0; \quad N_3 = N_4 = N_5 = N_6 = -8 \text{ кН}.$$

Строим эпюру Q (рис. 4.12в):

$$Q_1 = -F = -8 \text{ кН}; \quad Q_2 = -8 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_4 = Q_5 = Q_6 = 0.$$

Строим эпюру M (рис. 4.12г):

$$M_1 = 0; \quad M_2 = -F \cdot 1 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_4 = -F \cdot 1 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_5 = -F \cdot 1 + M = -8 + 10 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_6 = -F \cdot 1 + M = -8 + 10 = 2 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Пример 13. Построить эпюры Q , M и N для плоской рамы, изображенной на рис. 4.13а.

Решение:

Определяем реакции опор:

$$\sum M_A = 0; \quad q \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - m - F \cdot 1 + Y_B \cdot 1,5 = 0;$$

$$Y_B = \frac{-q \cdot 2 \cdot 1 + m + F \cdot 1}{1,5} = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1 + 8 + 10 \cdot 1}{1,5} = 4 \text{ кН}.$$

$$\sum M_B = 0; \quad q \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - m - F \cdot 1 + Y_A \cdot 1,5 = 0;$$

$$Y_A = \frac{-q \cdot 2 \cdot 1 + m + F \cdot 1}{1,5} = \frac{-6 \cdot 2 \cdot 1 + 8 + 10 \cdot 1}{1,5} = 4 \text{ кН}.$$

$$\sum X = 0; \quad -X_A - F + q \cdot 2 = 0; \quad X_A = -F + q \cdot 2 = -10 + 6 \cdot 2 = 2 \text{ кН}.$$

$$\text{Проверка: } \sum M_K = 0; \quad Y_A \cdot 2 - Y_B \cdot 0,5 - q \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 - m + X_A \cdot 2 + F \cdot 1 = 0;$$

$$4 \cdot 2 - 4 \cdot 0,5 - 6 \cdot 2 \cdot 1 - 8 + 2 \cdot 2 + 10 \cdot 1 = 0.$$

Реакции найдены верно.

Выбираем характерные сечения у границ участков и определяем в них величину N , Q , M :

$$N_1 = -Y_A = -4 \text{ кН}; \quad N_2 = -Y_A = -4 \text{ кН}; \quad N_3 = N_4 = X_A - q \cdot 2 = -10 \text{ кН};$$

$$N_5 = N_6 = N_7 = N_8 = Y_B = 4 \text{ кН}; \quad N_9 = N_{10} = 0.$$

Строим эпюру N (рис. 4.13б).

$$Q_1 = X_A = 2 \text{ кН}; \quad Q_2 = X_A - q \cdot 2 = 2 - 6 \cdot 2 = -10 \text{ кН}; \quad Q_3 = Q_4 = Y_A = 4 \text{ кН};$$

$$Q_5 = Q_6 = F = 10 \text{ кН}; \quad Q_7 = Q_8 = Q_9 = Q_{10} = 0.$$

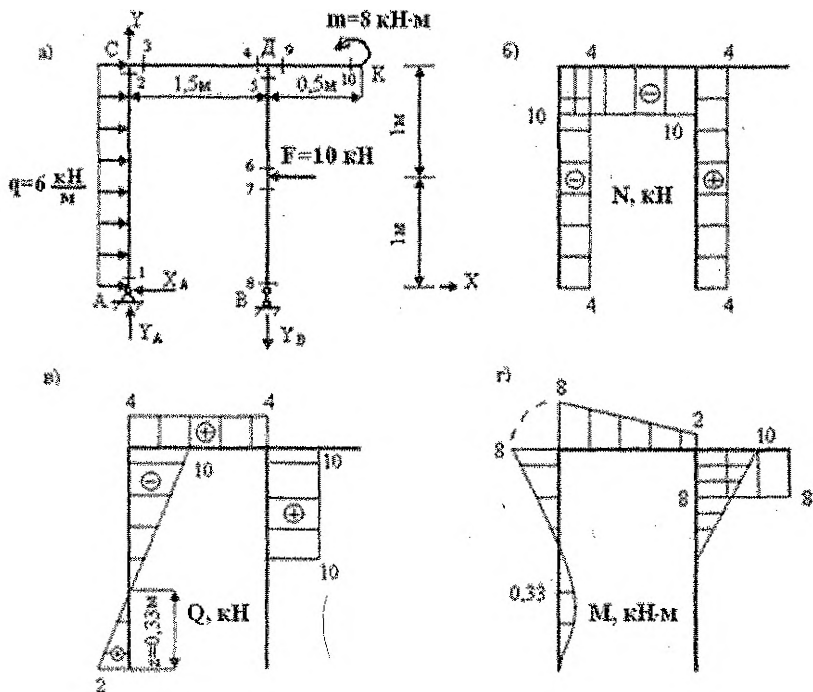


Рис. 4.13.

Строим эпюру Q (рис. 4.13в). На участке 1–2 эпюра пересекает ось. Определим координату точки пересечения: $z_0 = \frac{Q}{q} = \frac{2}{6} = 0,33 \text{ м}$.

$$M_1 = 0; \quad M_2 = X_A \cdot 2 - q \cdot 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 = 2 \cdot 2 - 6 \cdot 2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{\text{экстр}} = X_A \cdot z_0 - q \cdot \frac{z_0^2}{2} = 2 \cdot 0,33 - 6 \cdot \frac{0,33^2}{2} = 0,33 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_3 = M_2 = -8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_4 = X_A \cdot 2 - q \cdot \frac{2^2}{2} + Y_A \cdot 1,5 = 2 \cdot 2 - 6 \cdot \frac{2^2}{2} + 4 \cdot 1,5 = -2 \text{ кН} \cdot \text{м}; \quad M_5 = -F \cdot 1 = -10 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_6 = M_7 = M_8 = 0; \quad M_9 = M_{10} = m = 8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Строим эпюру M (рис. 4.13г).

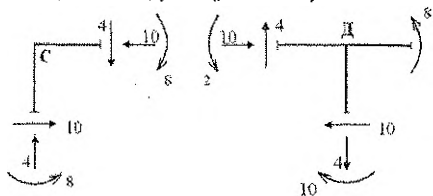


Рис. 4.14.

При правильном построении эпюр должно соблюдаться статическое равновесие каждого узла.

Проверим равновесие узлов C и D (рис. 4.14);

Равновесие узлов соблюдается.

5 ЗАДАНИЕ НА ВЫПОЛНЕНИЕ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНОЙ РАБОТЫ “ПОСТРОЕНИЕ ЭПЮР ВНУТРЕННИХ СИЛОВЫХ ФАКТОРОВ”

Дано.

Расчетные схемы различных типов брусьев (рис. 5.1 – 5.7) с указанием действующей на них внешней нагрузки.

Требуется.

Построить эпюры внутренних силовых факторов.

Числовые данные к расчетно-проектировочной работе
“Построение эпюр внутренних силовых факторов”

Вариант	a	M	F	q	m	M _{K1}	M _{K2}	M _{K3}
	м	кН·м	кН	кН/м	кН·м/м	кН·м	кН·м	кН·м
1	3.2	80	90	10	30	20	15	70
2	3.0	100	80	30	40	30	15	60
3	2.6	90	70	13	20	14	10	20
4	2.4	80	60	11	60	15	20	30
5	2.2	70	50	12	60	15	20	50
6	2.0	60	40	14	30	10	25	80
7	1.8	20	30	15	40	20	11	40
8	1.6	30	100	15	50	20	22	30
9	1.4	50	80	10	60	25	60	60
10	1.2	40	30	20	30	30	50	90
11	1.0	60	40	20	30	40	11	100
12	2.0	50	50	25	50	50	12	50
13	2.9	80	60	11	20	60	14	30
14	2.8	70	70	22	30	19	15	12
15	2.7	90	80	10	70	18	10	14
16	2.6	100	80	13	60	10	20	15
17	2.5	40	40	17	10	30	20	15
18	2.4	80	70	19	20	13	25	10
19	2.3	60	60	18	60	30	90	20
20	2.2	50	20	10	30	40	80	20
21	2.1	30	30	30	40	50	70	25
22	2.0	20	50	13	50	30	60	11
23	1.9	100	80	11	60	40	50	22
24	1.8	70	40	12	30	50	40	10
25	1.7	50	30	14	30	60	30	13
26	1.6	80	60	15	50	70	100	12
27	1.5	40	90	10	10	60	40	80
28	1.4	30	100	20	20	40	30	80
29	1.3	60	50	20	40	50	40	70
30	1.2	90	30	25	30	30	90	60

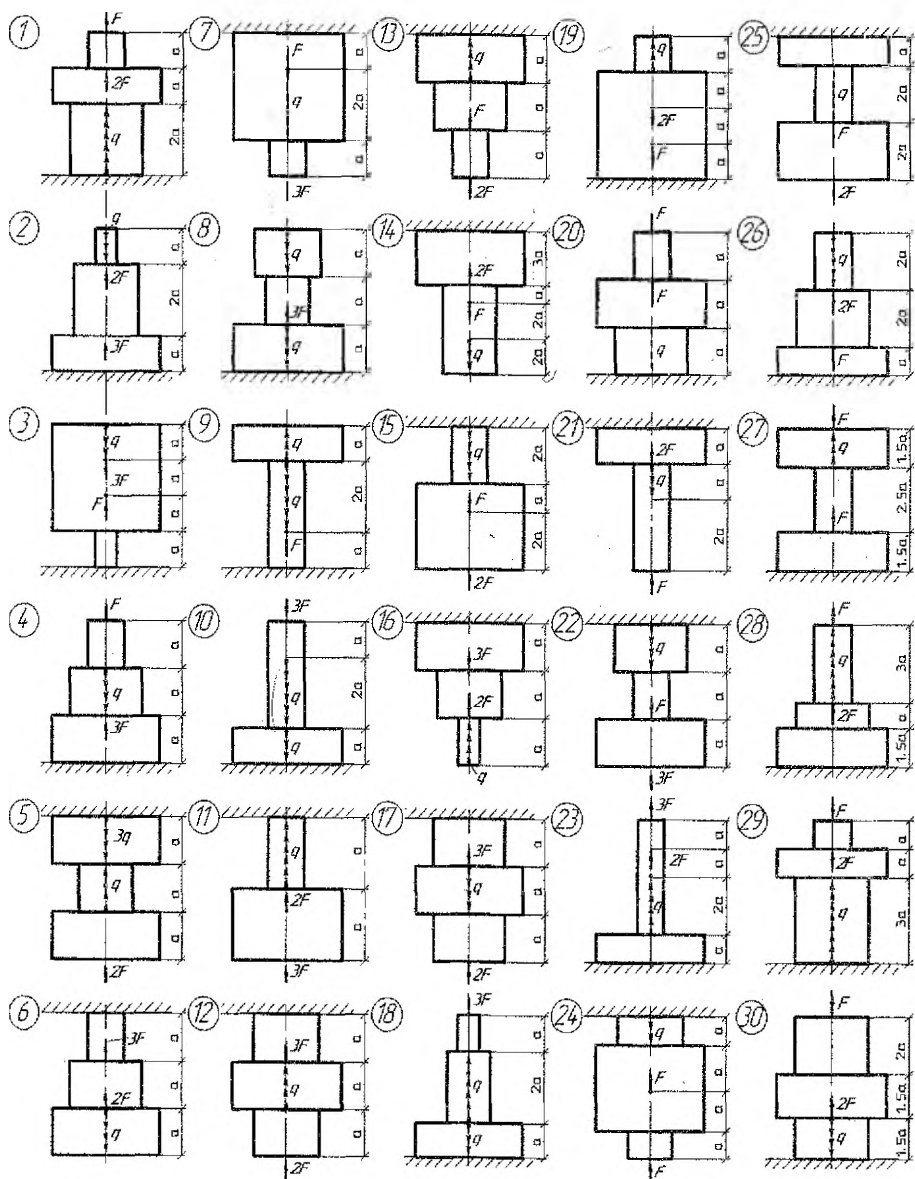


Рис. 5.1. Схемы ступенчатых брусков.

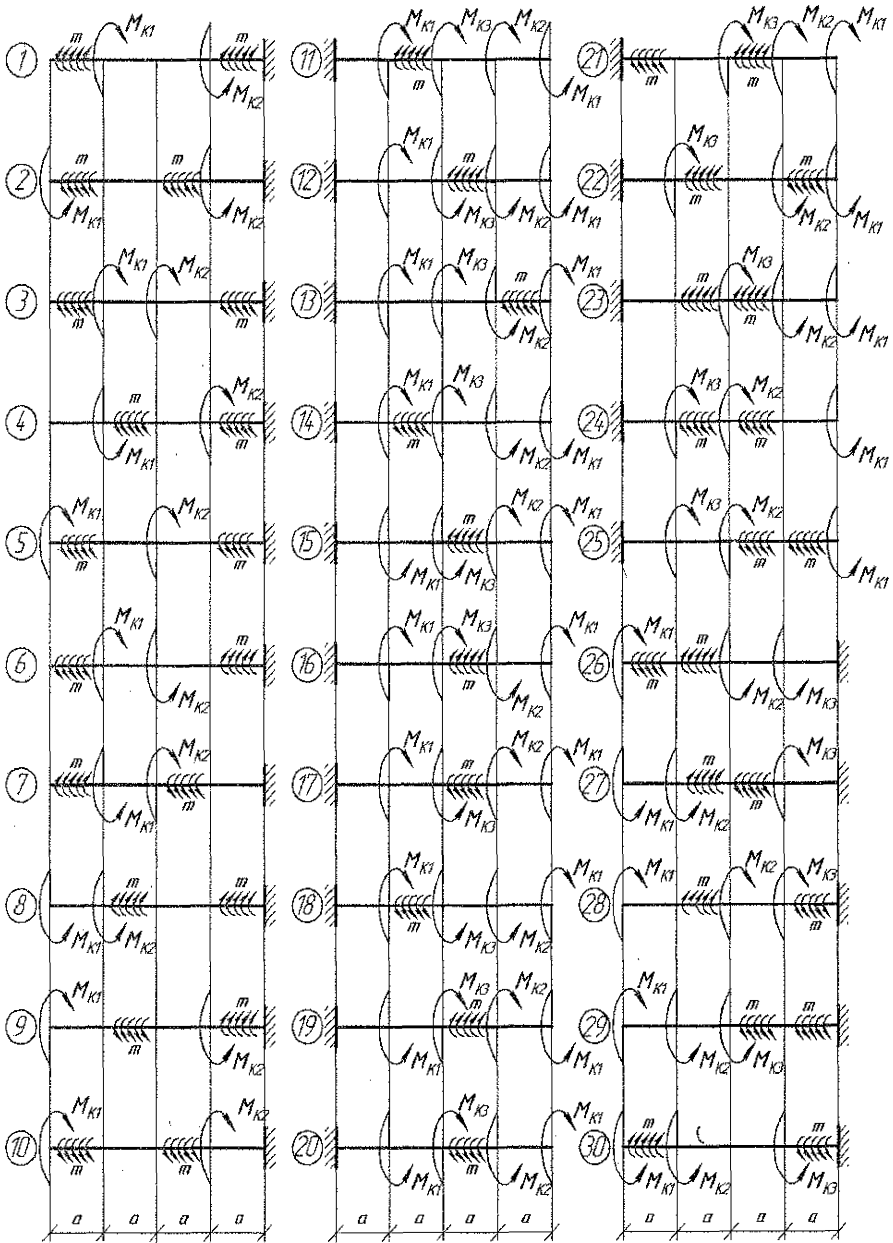


Рис. 5.2. Схемы круглых валов, испытывающих кручение.

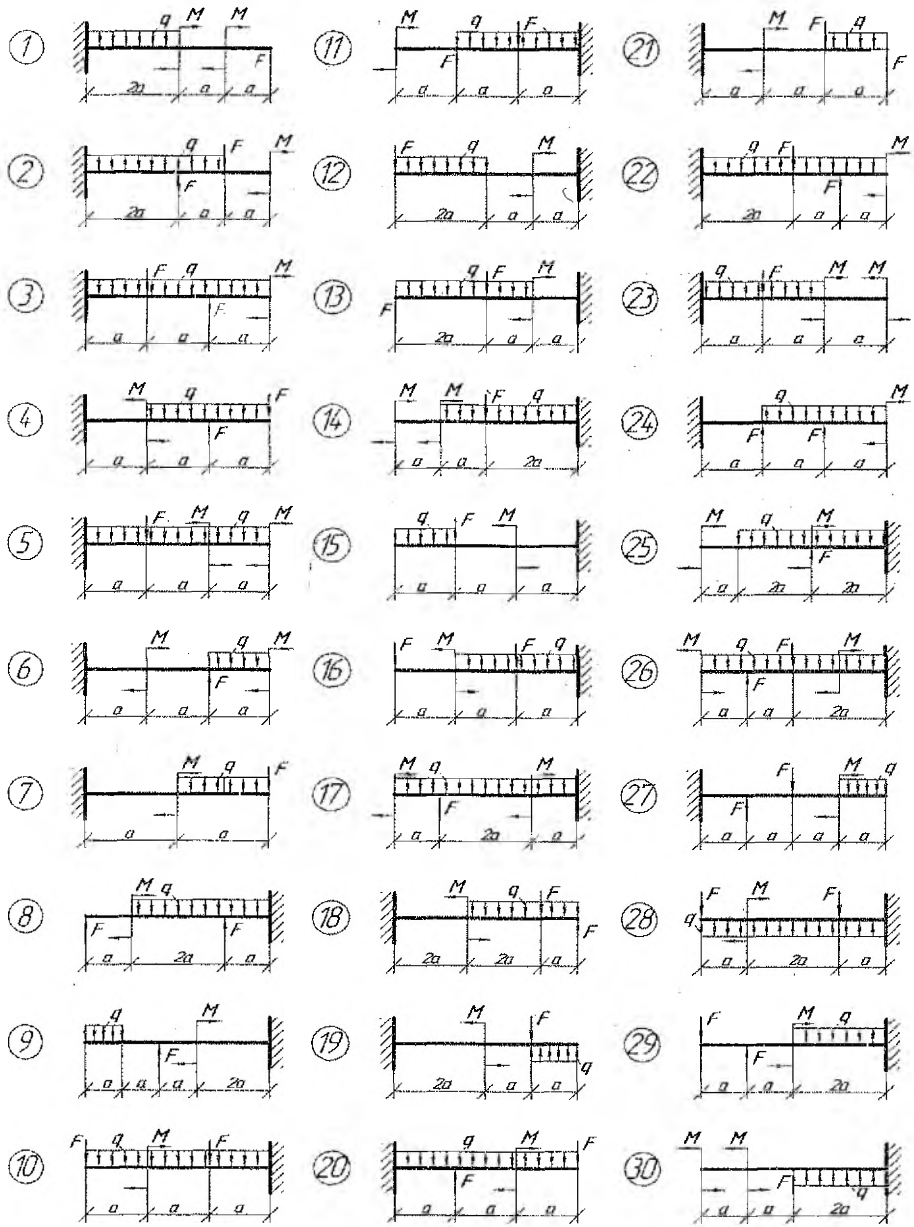


Рис. 5.3. Схемы балок, зацмелненных с одного края.

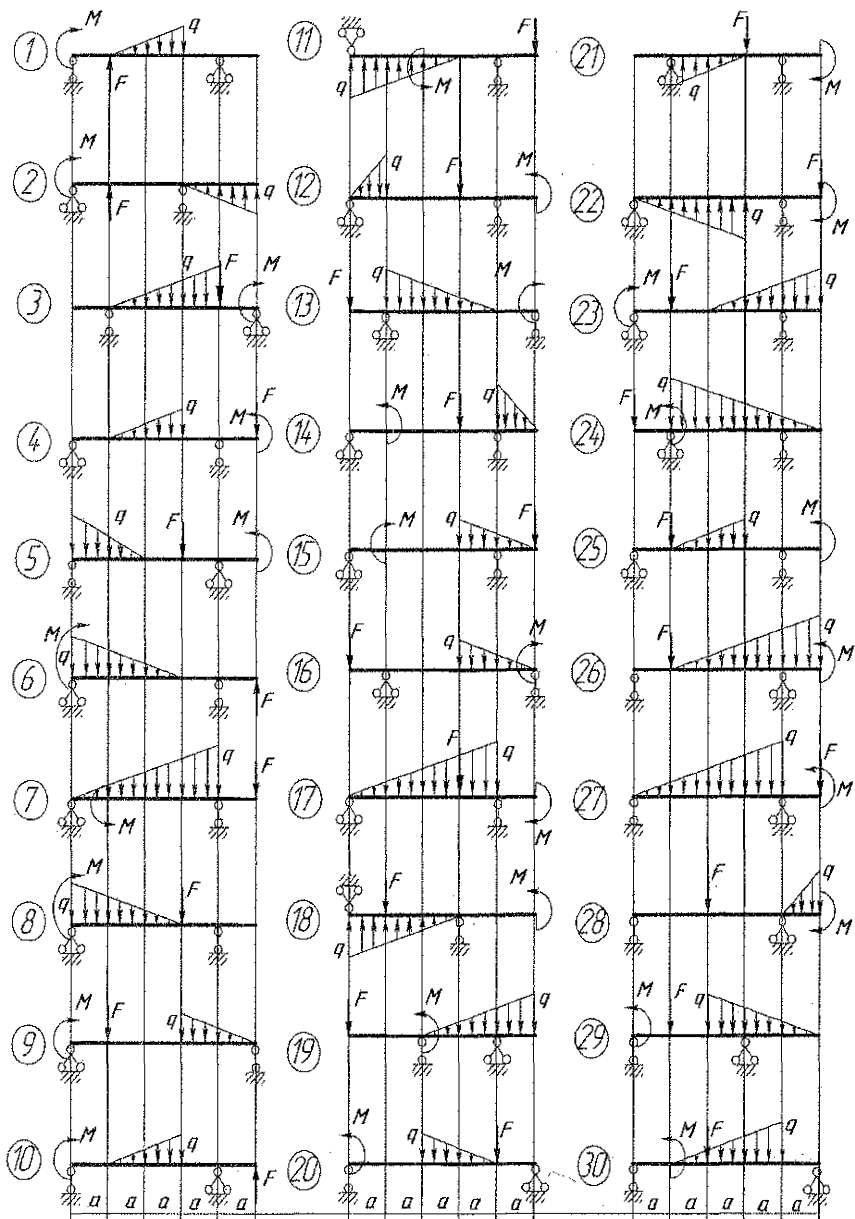


Рис. 5.4. Схемы балок с треугольной нагрузкой.

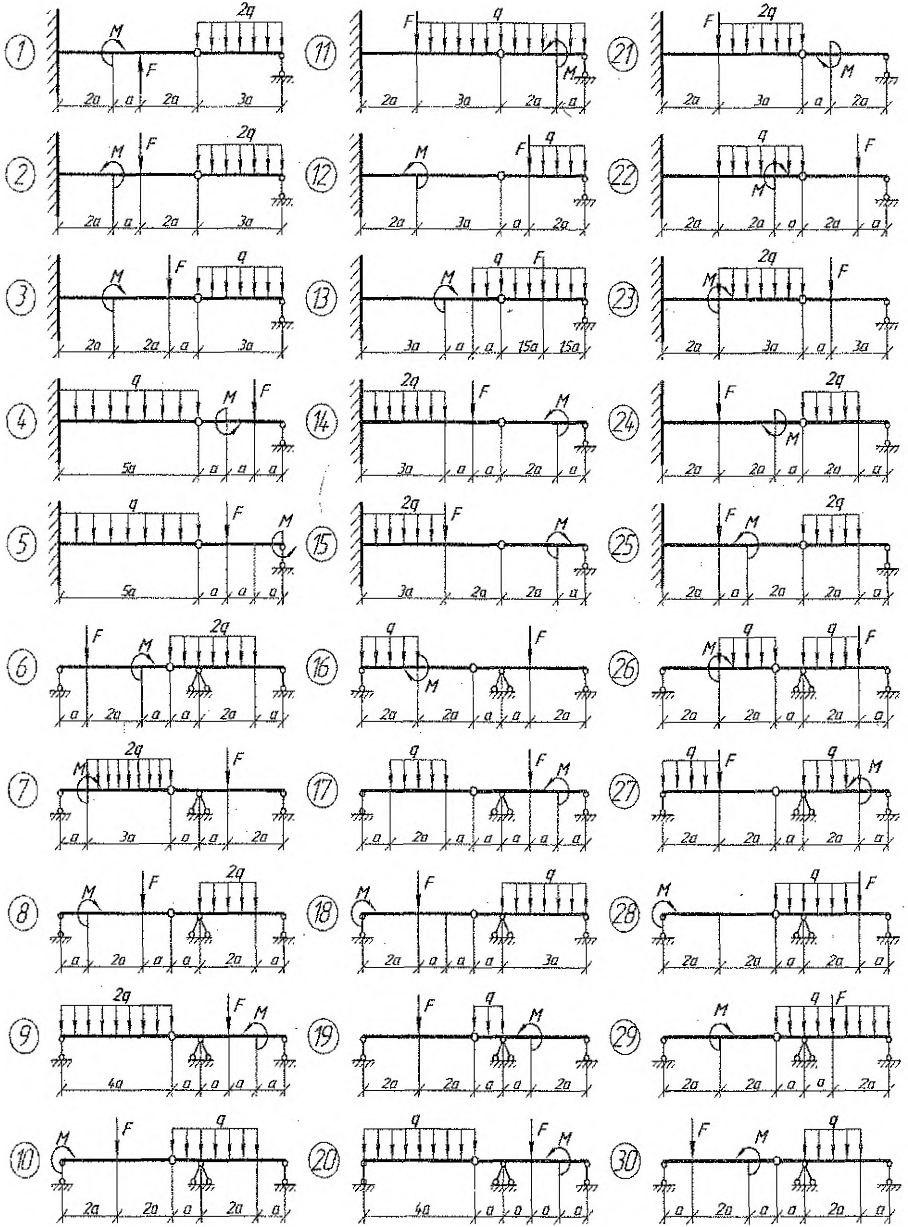


Рис.5.5 Схемы балок, имеющих внутренний шарнир

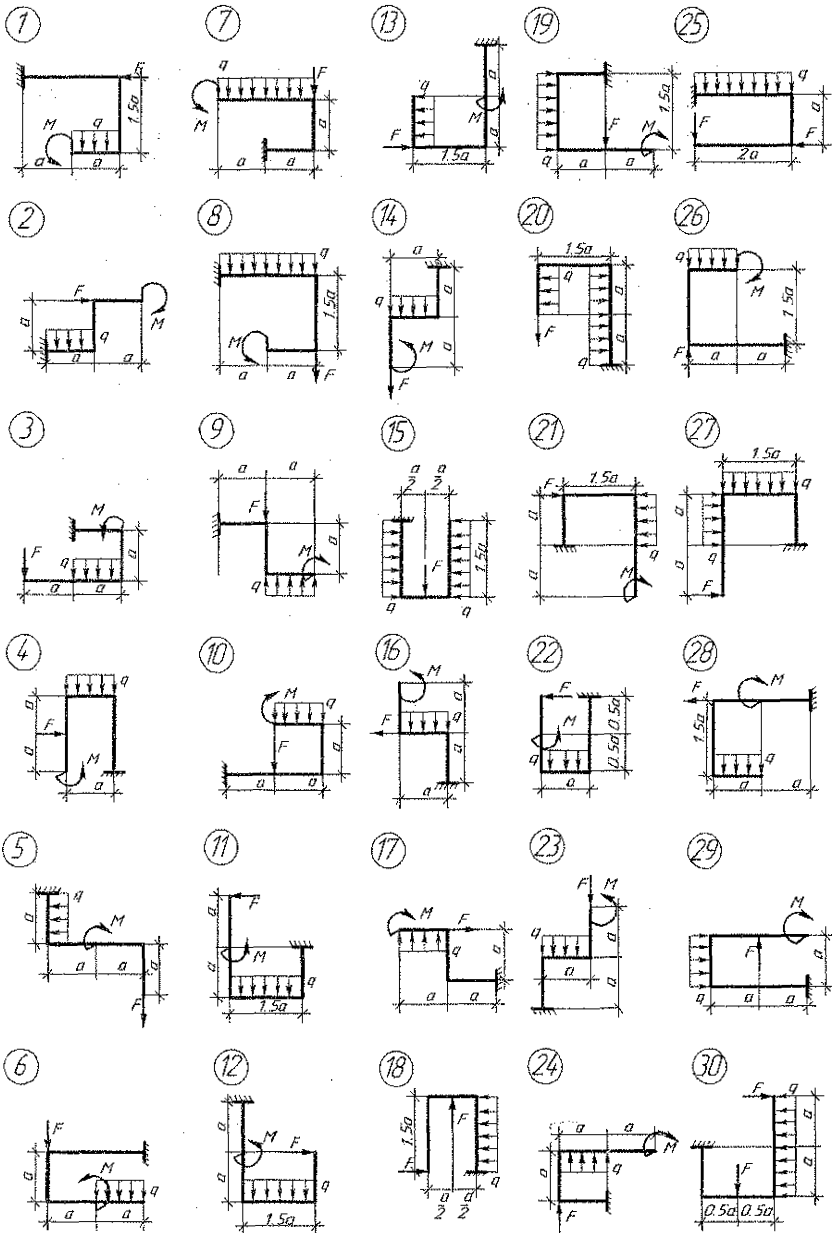


Рис.5.6 Схемы рам с жесткой заделкой

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. В.И. Феодосьев. Сопротивление материалов. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1972 – 544 с.
2. Сопротивление материалов/ Под ред. акад. АН УССР Г.С. Писаренко –5-е изд., перераб. и доп. – К.: Вища шк. Головное изд-во, 1986 – 775 с.
3. Н.М. Беляев. Сопротивление материалов. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва "Наука", 1976 – 608 с.
4. Ю.Н. Работнов. Механика деформируемого твердого тела. – М.: 1979 – 568 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Хвисевич Виталий Михайлович
Даркович Сергей Семёнович
Онысько Сергей Романович
Сырица Игорь Станиславович

ЗАДАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

для выполнения расчетно-проектировочной
работы № 1 по механике материалов
"Построение эпюр внутренних силовых факторов"

для студентов специальностей

1-36 01 01 – "Технология машиностроения"

1-36 01 03 – "Технология и оборудование машиностроительного производства"

1-37 01 06 – "Техническая эксплуатация автомобилей"

Ответственный за выпуск: Хвисевич В.М.
Редактор: Строкач Т.В.
Корректор: Никитчик Е.В.
Компьютерная вёрстка: Кармаш Е.Л.

Подписано к печати 09.11.2007 г. Формат 60x84 1/16. Гарнитура Arial Narrow.
Усл. печ. л. 1,63. Уч. изд. л. 1,75. Заказ № 1172. Тираж 150 экз. Отпечатано на
ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический
университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.