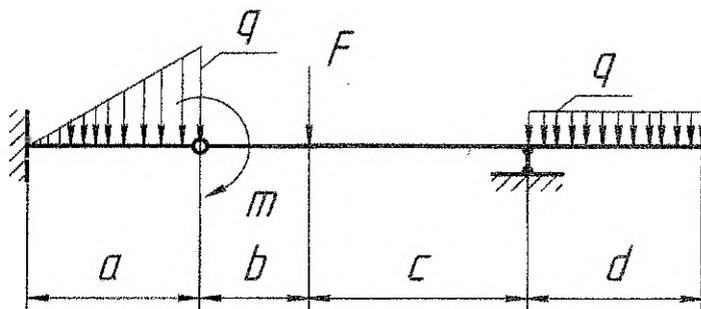


Министерство образования Республики Беларусь  
Учреждение образования  
«Брестский государственный технический университет»

Кафедра прикладной механики

## ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания  
к расчётно-графическим работам и практическим занятиям  
для студентов специальности  
1 – 27 01 01 – «Экономика и организация производства»



УДК 531.8

Методические указания содержат индивидуальные задания, исходные данные и примеры решения задач по определению реакций связей составных конструкций, расчету плоских ферм, определению положения центра тяжести фигуры, расчету статически неопределимых стержневых систем на прочность при осевом растяжении-сжатии, расчету балочных систем на прочность при прямом поперечном изгибе, расчетам на устойчивость. В методических указаниях приведены также требования к оформлению расчетно-графических работ и краткие теоретические сведения по темам заданий.

Составители: А.И. Веремейчик, доцент, к. ф.-м. н.  
И.Г. Томашев, ст. преподаватель  
В.В. Гарбачевский, ст. преподаватель

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения .....	3
1. Теоретическая механика .....	3
1.1. Примеры решения задач .....	3
1.2. Задание для выполнения расчетно-графической работы № 1.....	13
2. Сопротивление материалов .....	17
2.1. Примеры решения задач .....	17
2.2. Задание для выполнения расчетно-графической работы № 2.....	30
3. Приложение.....	36
Список литературы .....	37

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В своей трудовой деятельности квалифицированный инженер должен обладать фундаментальными знаниями по общетехническим дисциплинам. К таким дисциплинам относится и техническая механика. Умение построить модели силовых нагружений, определить реактивные силы опорных устройств элементов конструкций, а также оценить их прочностные и жесткостные характеристики приобретает студентами после изучения основных разделов технической механики: теоретической механики и сопротивления материалов. Типовым планом для подготовки инженеров-экономистов предусмотрено небольшое количество учебного времени, в течение которого можно рассмотреть только основные разделы технической механики.

В процессе изучения дисциплины студенты дневной формы обучения должны выполнить две расчетно-графические работы. Выполнение заданий позволит студентам научиться самостоятельно определять реакции опорных устройств (связей) для различных конструкций, находить положение центра тяжести плоских однородных тел, производить прочностные и жесткостные расчеты статически определимых и неопределимых систем на растяжение, сжатие и плоский поперечный изгиб.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

### 1.1 Примеры решения задач

#### Пример 1.1

Составная рама состоит из 2-х жестких частей, соединенных между собой с помощью промежуточного шарнира. С помощью внешних связей рама крепится к неподвижному основанию. Конструкция нагружена сосредоточенными силами, равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$ , неравномерно распределенной нагрузкой и парой сил с моментом  $M$ .

*Требуется:*

- 1) определить реакции внешних и внутренних связей рамы;
- 2) проверить правильность решения, оценить погрешность расчета.

Дано:  $F_1=6 \text{ кН}$ ,  $\alpha_1=30^\circ$ ,  $F_2=22 \text{ кН}$ ,  $M=7 \text{ кН м}$ ,  $q=15 \text{ кН/м}$ ,  $q_1=25 \text{ кН/м}$ ,  $q_2=10 \text{ кН/м}$ ,  $\beta=45^\circ$ .

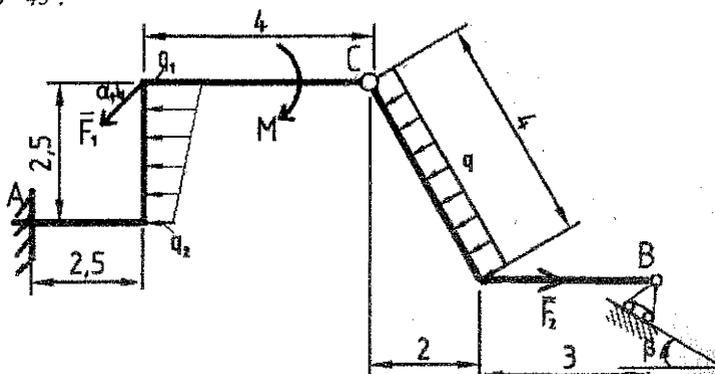


Рисунок 1.1 – Исходная схема составной конструкции

**Решение:**

Рассмотрим равновесие рамы под действием заданных сил и реакций опор. Для этого выберем оси координат  $x$  и  $y$  и заменим связи в точках  $A$ ,  $B$  соответствующими реакциями. Реакция  $\bar{R}_B$  шарнирно-подвижной опоры  $B$  приложена в точке  $B$  и направлена перпендикулярно опорной плоскости, жесткую заделку в точке  $A$  заменяем моментом  $M_A$  и двумя составляющими реакции  $\bar{X}_A$ ;  $\bar{Y}_A$ .

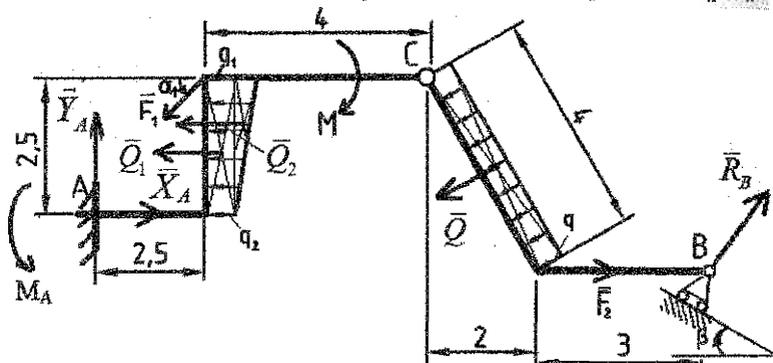


Рисунок 1.2 – Расчетная схема составной рамы

Действующую на раму равномерно распределенную нагрузку интенсивности  $q$  заменим равнодействующей  $\bar{Q}$ , модуль которой равен:

$$Q = q \cdot 4 = 15 \cdot 4 = 60 \text{ кН}.$$

Распределенную по треугольному закону трапецевидную нагрузку разбиваем на прямоугольную и треугольную соответственно, при этом:

$$Q_1 = q_2 \cdot 2,5 = 10 \cdot 2,5 = 25 \text{ кН},$$

$$Q_2 = \frac{1}{2}(q_1 - q_2) \cdot 2,5 = \frac{1}{2} \cdot 15 \cdot 2,5 = 18,75 \text{ кН}.$$

Рама находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, для которой можно составить три уравнения равновесия, в то время как определению подлежат четыре неизвестные реакции. Расчленим раму на части и рассмотрим равновесие каждой из них. При этом действие частей рамы друг на друга заменим составляющими реакции внутренней связи в шарнире С:  $\bar{X}_C, \bar{Y}_C$ . По аксиоме равенства действия и противодействия эти реакции противоположно направлены и равны по модулю:

$$X_C = X'_C, Y_C = Y'_C.$$

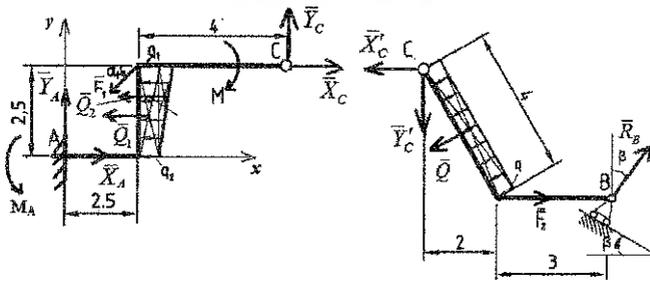


Рисунок 1.3 – Расчетные схемы элементов рамы

Составим уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, приложенных к левой части рамы:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; & X_A - F_1 \cos \alpha_1 - Q_1 - Q_2 + X_C = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; & Y_A - F_1 \sin \alpha_1 + Y_C = 0; \\ \sum M_A(\bar{F}_k) = 0; & M_A + Q_1 \cdot 1,25 + Q_2 \cdot 0,833 + F_1 \cos \alpha_1 \cdot 2,5 - F_1 \sin \alpha_1 \cdot 2,5 - M - \\ & - X_C \cdot 2,5 + Y_C \cdot 6,5 = 0. \end{cases}$$

Здесь при определении момента силы  $\bar{F}_1$  была применена теорема Вариньона (момент силы относительно точки равен сумме моментов составляющих этой силы относительно этой же точки).

Составим теперь уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил, приложенных к правой части рамы, получим:

$$\begin{cases} \sum F_{kx} = 0; & R_B \sin \beta + F_2 - Q \cos 30^\circ - X'_C = 0; \\ \sum F_{ky} = 0; & R_B \cos \beta - Q \sin 30^\circ - Y'_C = 0; \\ \sum M_C(\bar{F}_k) = 0; & R_B \cos \beta \cdot 5 + R_B \sin \beta \cdot 3,464 + F_2 \cdot 3,464 - Q \cdot 2 = 0. \end{cases}$$

Выражая из уравнений неизвестные реакции и подставляя числовые значения, будем иметь:

$$R_B \cos \beta \cdot 5 + R_B \sin \beta \cdot 3,464 + F_2 \cdot 3,464 - Q \cdot 2 = 0,$$

$$R_B (\cos \beta \cdot 5 + \sin \beta \cdot 3,464) = -F_2 \cdot 3,464 + Q \cdot 2,$$

$$R_B = \frac{-F_2 \cdot 3,464 + Q \cdot 2}{\cos \beta \cdot 5 + \sin \beta \cdot 3,464} = \frac{-22 \cdot 3,464 + 60 \cdot 2}{\cos 45^\circ \cdot 5 + \sin 45^\circ \cdot 3,464} = 7,32 \text{ кН}.$$

$$R_B \cos \beta - Q \sin 30^\circ - Y'_C = 0;$$

$$Y'_C = R_B \cos \beta - Q \sin 30^\circ = 7,32 \cos 45^\circ - 60 \sin 30^\circ = -24,82 \text{ кН}.$$

$$R_B \sin \beta + F_2 - Q \cos 30^\circ - X'_C = 0;$$

$$X'_C = R_B \sin \beta + F_2 - Q \cos 30^\circ = 7,32 \sin 45^\circ + 22 - 60 \cos 30^\circ = -24,79 \text{ кН}.$$

$$X_A - F_1 \cos \alpha_1 - Q_1 - Q_2 + X_C = 0;$$

$$X_A = F_1 \cos \alpha_1 + Q_1 + Q_2 - X_C = 6 \cos 30^\circ + 25 + 18,75 - (-24,79) = 73,74 \text{ кН}.$$

$$Y_A - F_1 \sin \alpha_1 + Y_C = 0;$$

$$Y_A = F_1 \sin \alpha_1 - Y_C = 6 \sin 30^\circ - (-24,82) = 27,82 \text{ кН}.$$

$$M_A + Q_1 \cdot 1,25 + Q_2 \cdot 0,833 + F_1 \cos \alpha_1 \cdot 2,5 - F_1 \sin \alpha_1 \cdot 2,5 - X_C \cdot 2,5 + Y_C \cdot 6,5 - M = 0.$$

$$\begin{aligned} M_A &= -Q_1 \cdot 1,25 - Q_2 \cdot 0,833 - F_1 \cos \alpha_1 \cdot 2,5 + F_1 \sin \alpha_1 \cdot 2,5 + X_C \cdot 2,5 - Y_C \cdot 6,5 + M = \\ &= -25 \cdot 1,25 - 18,75 \cdot 0,833 - 6 \cos 30^\circ \cdot 2,5 + 6 \sin 30^\circ \cdot 2,5 + (-24,79) \cdot 2,5 - \\ &\quad - (-24,82) \cdot 6,5 + 7 = 54 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Для проверки правильности решения составим уравнение равновесия для системы сил, приложенных ко всей раме (уравнение моментов относительно точки С):

$$\begin{aligned} \sum M_N(\bar{F}_k) &= R_B \cos \beta \cdot 3 + Q \cdot 2 - M + Q_2 \cdot (3,464 - 1,667) + Q_1 \cdot (3,464 - 1,25) + \\ &\quad + F_1 \sin \alpha_1 \cdot 6 + F_1 \cos \alpha_1 \cdot 3,464 - Y_A \cdot 8,5 - X_A \cdot (3,464 - 2,5) + M_A = \\ &= 7,32 \cos 45^\circ \cdot 3 + 60 \cdot 2 - 7 + 18,75 \cdot (3,464 - 1,667) + 25 \cdot (3,464 - 1,25) + \\ &\quad + 6 \sin 30^\circ \cdot 6 + 6 \cos 30^\circ \cdot 3,464 - 27,82 \cdot 8,5 - 73,74 \cdot (3,464 - 2,5) + 54 = \\ &= 314,57 - 314,56 = 0,01. \end{aligned}$$

$$\text{Относительная погрешность расчета: } \varepsilon = \frac{0,01}{314,57} \cdot 100\% = 0,003\% < 3\%.$$

**Ответ:**  $X_A = 73,74 \text{ кН}$ ,  $Y_A = 27,82 \text{ кН}$ ,  $R_B = 7,32 \text{ кН}$ ,  $M_A = 54 \text{ кН} \cdot \text{м}$ ,  $X_C = -24,79 \text{ кН}$ ,  $Y_C = -24,82 \text{ кН}$ . Знак «минус» указывает, что реакции  $\bar{X}_C$ ,  $\bar{Y}_C$  направлены противоположно показанным на рисунке 1.3.

### Пример 1.2

Плоская ферма (рисунок 1.4) нагружена силами; на ферму наложены связи (подвижный и неподвижный шарниры);  $P_1 = 20 \text{ кН}$ ,  $P_3 = 40 \text{ кН}$ ,  $\alpha_1 = 120^\circ$ ,  $\alpha_3 = 60^\circ$ ,  $a = 5 \text{ м}$ ,  $\alpha = 60^\circ$ .

**Определить:** реакции связей и усилия в стержнях.

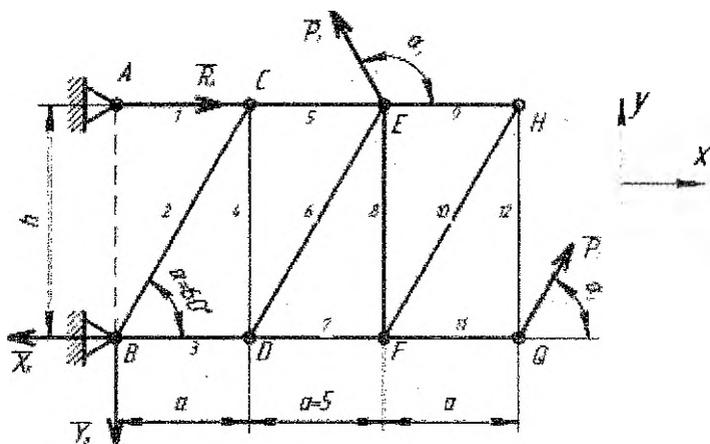


Рисунок 1.4 – Схема фермы

Решение:

Определяем размер  $h$ :

$$h = a \cdot \operatorname{tg} \alpha = 5 \cdot \operatorname{tg} 60^\circ = 8,66 \text{ м.}$$

Определим реакции опор, составив уравнения равновесия для всей фермы:

$$\sum M_B(\bar{F}_i) = 0; P_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + P_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot h + P_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot 3a - R_A \cdot h = 0,$$

$$R_A = \frac{P_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2a + P_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot h + P_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot 3 \cdot a}{h} =$$

$$= \frac{20 \cdot \cos 30^\circ \cdot 2 \cdot 5 + 20 \cdot \cos 60^\circ \cdot 8,66 + 40 \cdot \sin 60^\circ \cdot 3 \cdot 5}{8,66} = 90 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{YB} = 0; P_1 \cdot \cos 30^\circ + P_3 \cdot \sin \alpha_3 - Y_B = 0,$$

$$Y_B = P_1 \cdot \cos 30^\circ + P_3 \cdot \sin \alpha_3 = 20 \cdot \cos 30^\circ + 40 \cdot \sin 60^\circ = 51,962 \text{ кН.}$$

$$\sum F_{Xb} = 0; -P_1 \cdot \cos 60^\circ + P_3 \cdot \cos \alpha_3 + R_A - X_B = 0,$$

$$X_B = -P_1 \cdot \cos 60^\circ + P_3 \cdot \cos \alpha_3 + R_A = -20 \cdot \cos 60^\circ + 40 \cdot \cos 60^\circ + 90 = 100 \text{ кН.}$$

Полная реакция шарнира В:

$$R_B = \sqrt{X_B^2 + Y_B^2} = \sqrt{100^2 + 51,962^2} = 112,69 \text{ кН.}$$

Составим проверочное уравнение моментов относительно точки Н:

$$\sum M_H(\bar{F}_i) = 0; Y_B \cdot 3a - X_B \cdot h - P_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot a + P_3 \cdot \cos \alpha_3 \cdot h = 0,$$

$$51,962 \cdot 3 \cdot 5 - 100 \cdot 8,66 - 20 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 + 40 \cdot \cos 60^\circ \cdot 8,66 = 0.$$

Определим реакции опор графически. Принимаем масштабный коэффициент  $\mu = 2 \text{ кН/мм}$ .

Графическим построением находим точку Q пересечения линий действия сил  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_3$  и откладываем от нее в масштабе вектора  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_3$ . Находим равнодействующую  $\bar{R}$  сил  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_3$  по правилу параллелограмма.

Для определения реакций опор воспользуемся теоремой о трех непараллельных силах: если под действием трех непараллельных сил твердое тело находится в равновесии, то их линии действия пересекаются в одной точке. Тогда через точку  $O_1$  пересечения линий действия сил  $\bar{R}$  и  $\bar{R}_A$  будет проходить линия действия силы  $\bar{R}_B$ . Переносим вектор силы  $R$  в точку  $O_1$  и через его конец проводим линию действия силы  $\bar{R}_A$ . Тогда линия действия  $\bar{R}_B$  и  $\bar{R}_A$  пересекутся в точке  $O_2$ , которая является концом вектора  $\bar{R}_A$  и началом вектора  $\bar{R}_B$ . Направления векторов  $\bar{R}_B$  и  $\bar{R}_A$  определяем исходя из того, чтобы силовой треугольник был замкнут.

Определяем длины векторов:  $O_3O_2 = 45$  мм,  $O_2O_1 = 56,3$  мм.

Тогда:  $R_B = O_2O_1 \mu = 112,6$  кН,  $R_A = O_3O_2 \mu = 90$  кН.

Величины реакций, найденные графически, практически не отличаются от значений, полученных аналитически.

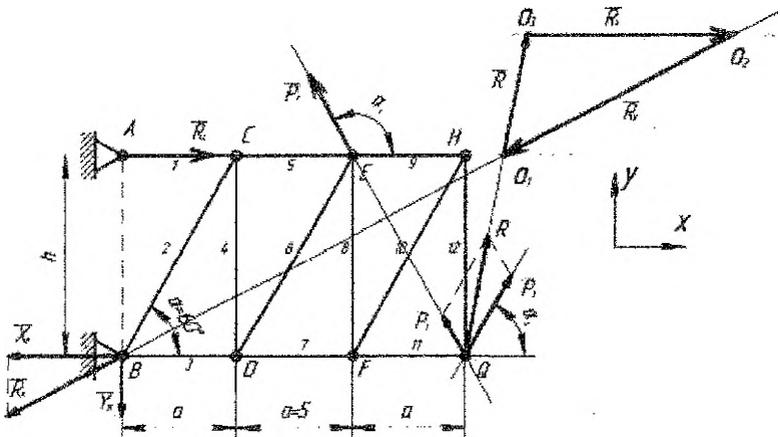


Рисунок 1.5 – Графическое определение реакций связей

Определим усилия в стержнях. Отбрасываем связи и заменяем их действие на узлы реакциями. Направления реакций всех стержней показаны от узлов, предполагая, что они растянуты. Для проверки строим для каждого узла многоугольник сил, принимая масштабный коэффициент  $\mu = 2$  кН/мм.

Узел Q:

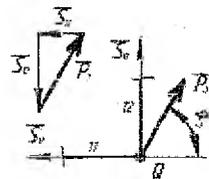
$$P_3 + S_{11} + S_{12} = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0; P_3 \cdot \cos \alpha_3 - S_{11} = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; P_3 \cdot \sin \alpha_3 + S_{12} = 0;$$

$$S_{11} = P_3 \cdot \cos \alpha_3 = 40 \cdot \cos 60^\circ = 20 \text{ кН},$$

$$S_{12} = -P_3 \cdot \sin \alpha_3 = -40 \cdot \sin 60^\circ = -34,641 \text{ кН}.$$



Узел Н:

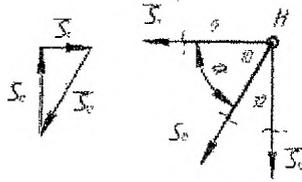
$$\overline{S_9} + \overline{S_{10}} + \overline{S_{12}} = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0; S_{10} \cdot \cos \alpha - S_9 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; -S_{12} - S_{10} \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$S_{10} = \frac{S_{12}}{\sin \alpha} = \frac{-34,641}{\sin 60^\circ} = 40 \text{ кН},$$

$$S_9 = -S_{10} \cdot \cos \alpha = -40 \cdot \cos 60^\circ = -20 \text{ кН}.$$



Узел F:

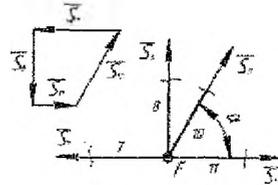
$$\overline{S_7} + \overline{S_8} + \overline{S_{10}} + \overline{S_{11}} = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0; S_{11} + S_{10} \cdot \cos \alpha - S_7 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_8 + S_{10} \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$S_7 = S_{11} + S_{10} \cdot \cos \alpha = 20 + 40 \cdot \cos 60^\circ = 40 \text{ кН},$$

$$S_8 = -S_{10} \cdot \sin \alpha = -40 \cdot \sin 60^\circ = -34,641 \text{ кН}.$$



Узел E:

$$\overline{S_5} + \overline{S_6} + \overline{S_8} + \overline{S_9} + \overline{P_1} = 0;$$

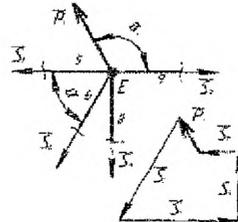
$$\sum F_{ix} = 0; -P_1 \cdot \cos 60^\circ + S_9 - S_6 \cdot \cos \alpha - S_5 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; P_1 \cdot \cos 30^\circ - S_8 - S_6 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$S_6 = \frac{P_1 \cdot \cos 30^\circ - S_8}{\sin \alpha} = \frac{20 \cdot \cos 30^\circ - (-34,641)}{\sin 60^\circ} =$$

$$= 60 \text{ кН},$$

$$S_5 = -P_1 \cdot \cos 60^\circ + S_9 - S_6 \cdot \cos \alpha = -20 \cdot \cos 60^\circ + (-20) - 60 \cdot \cos 60^\circ = -60 \text{ кН}.$$



Узел D:

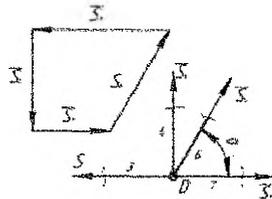
$$\overline{S_7} + \overline{S_6} + \overline{S_4} + \overline{S_3} = 0;$$

$$\sum F_{ix} = 0; S_7 + S_6 \cdot \cos \alpha = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_4 + S_6 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$S_3 = S_7 + S_6 \cdot \cos(\alpha) = 40 + 60 \cdot \cos 60^\circ = 70 \text{ кН},$$

$$S_4 = -S_6 \cdot \sin(\alpha) = -60 \cdot \sin 60^\circ = -51,962 \text{ кН}.$$



Узел C:

$$\overline{S_1} + \overline{S_2} + \overline{S_4} + \overline{S_5} = 0;$$

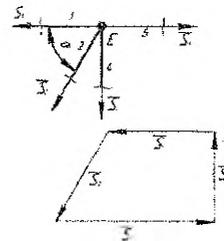
$$\sum F_{ix} = 0; S_5 - S_2 \cdot \cos \alpha - S_1 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; -S_4 - S_2 \cdot \sin \alpha = 0;$$

$$S_2 = -\frac{S_4}{\sin \alpha} = -\frac{-51,962}{\sin 60^\circ} = 60 \text{ кН},$$

$$S_1 = S_5 - S_2 \cdot \cos \alpha = -60 - 60 \cdot \cos 60^\circ = -90 \text{ кН},$$

$$R_A = -S_1 = 90 \text{ кН}.$$



Определяем усилия в стержнях 3, 5, 6 методом Риттера. Разрезаем ферму сечениями I-I и II-II и рассматриваем равновесие сил, приложенных в первом случае к правой части системы и во втором к левой. Действие отброшенных частей представлено усилиями  $S_5, S_6, S_7$  и  $S_1, S_2, S_3$  соответственно.

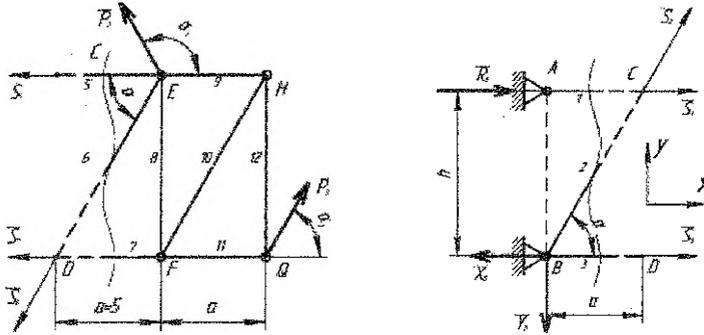


Рисунок 1.6 – Расчетные схемы метода Риттера

Для определения  $S_5$  составим уравнение моментов относительно точки D, где пересекаются линии действия  $S_6$  и  $S_7$ .

$$\sum M_D(\vec{F}_i) = 0; P_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot a + P_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot h + P_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot 2a + S_5 \cdot h = 0,$$

$$S_5 = \frac{P_1 \cdot \cos 30^\circ \cdot a + P_1 \cdot \cos 60^\circ \cdot h + P_3 \cdot \sin \alpha_3 \cdot 2a}{h} =$$

$$= \frac{20 \cdot \cos 30^\circ \cdot 5 + 20 \cdot \cos 60^\circ \cdot 8,66 + 40 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 \cdot 5}{8,66} = -60 \text{ кН.}$$

Для определения  $S_6$  спроецируем силы на ось y:

$$\sum F_y = 0; P_1 \cdot \cos 30^\circ + P_3 \cdot \sin \alpha_3 - S_6 \cdot \sin \alpha = 0,$$

$$S_6 = \frac{P_1 \cdot \cos 30^\circ + P_3 \cdot \sin \alpha_3}{\sin \alpha} = \frac{20 \cdot \cos 30^\circ + 40 \cdot \sin 60^\circ}{\sin 60^\circ} = 60 \text{ кН.}$$

Для определения  $S_3$  составим уравнение моментов относительно точки C, где пересекаются линии действия  $S_1$  и  $S_2$ .

$$\sum M_C(\vec{F}_i) = 0; Y_B \cdot a - X_B \cdot h + S_3 \cdot h = 0,$$

$$S_3 = \frac{Y_B \cdot a - X_B \cdot h}{h} = \frac{51,962 \cdot 5 - 100 \cdot 8,66}{8,66} = 70 \text{ кН.}$$

Значения усилий, найденные по методу Риттера, совпадают со значениями усилий, найденными по методу вырезания узлов.

Таблица 1.1 – Результаты расчета

№ стержня	1	2	3	4	5	6
Сила, кН	-90	+60	+70	-51,962	-60	+60
№ стержня	7	8	9	10	11	12
Сила, кН	+40	-34,641	-20	+40	+20	-34,641

**Ответ:**

$R_x = 90 \text{ кН}$ ,  $X_y = 100 \text{ кН}$ ,  $Y_x = 51,962 \text{ кН}$ ,  $S_1 = -90 \text{ кН}$ ,  $S_2 = 60 \text{ кН}$ ,  $S_3 = 70 \text{ кН}$ ,  
 $S_4 = -51,962 \text{ кН}$ ,  $S_5 = -60 \text{ кН}$ ,  $S_6 = 60 \text{ кН}$ ,  $S_7 = 40 \text{ кН}$ ,  $S_8 = -34,641 \text{ кН}$ ,  
 $S_9 = -20 \text{ кН}$ ,  $S_{10} = 40 \text{ кН}$ ,  $S_{11} = 20 \text{ кН}$ ,  $S_{12} = -34,641 \text{ кН}$ .

Знак «-» свидетельствует о том, что соответствующие стержни сжаты.

### Пример 1.3

Определить координаты центра тяжести составного сечения, приведенного на рисунке.

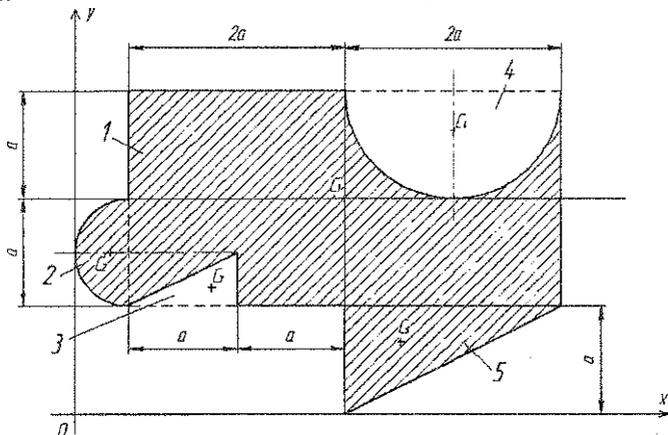


Рисунок 1.7 – Схема составного сечения

### Решение:

1. Для решения задачи используем методы разбиения на части и отрицательных площадей. Разбиваем фигуру на пять простых элементов: прямоугольник 1 размерами  $4a \times 2a$ ; полуокруг 2 радиуса  $R_2 = 0,5a$ ; треугольник 3 (вырез); полуокруг 4 радиуса  $R_4 = a$  (вырез); треугольник 5. Вводим систему координат  $x, y$  с началом в точке  $O$ .

2. Определяем площади  $A_k$  и координаты  $x_k; y_k$  центров тяжести  $C_1; C_2; C_3; C_4; C_5$  составных элементов.

Прямоугольник 1:

$$A_1 = 4a \cdot 2a = 8a^2;$$

$$x_1 = 2,5a;$$

$$y_1 = 2a.$$

Полуокруг 2:

$$A_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = 0,39a^2;$$

$$x_2 = a - \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} \frac{a}{2} = 0,79a;$$

$$y_2 = a + 0,5a = 1,5a.$$

Треугольник 3:

$$A_3 = \frac{1}{2} a \cdot 0,5a = -0,25a^2;$$

$$x_3 = 1,5a - \frac{1}{3} a = 1,17a;$$

$$y_3 = a + \frac{1}{3} \cdot 0,5a = 1,17a.$$

Треугольник 5:

$$A_5 = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2;$$

$$x_5 = 2,5a + \frac{1}{3} \cdot 2a = 3,17a;$$

$$y_5 = \frac{2}{3} a = 0,67a.$$

3. Находим статические моменты сечения относительно осей  $x, y$ :

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 + A_5 y_5 = 8a^2 \cdot 2a + 0,39a^2 \cdot 1,5a + (-0,25a^2) \times \\ \times 1,17a + (-1,57a^2) \cdot 2,58a + a^2 \cdot 0,67a = 12,91a^3;$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5 = 8a^2 \cdot 2,5a + 0,39a^2 \cdot 0,79a + (-0,25a^2) \times \\ \times 1,17a + (-1,57a^2) \cdot 3,5a + a^2 \cdot 3,17a = 17,69a^3.$$

Площадь сечения:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 8a^2 + 0,39a^2 + (-0,25a^2) + (-1,57a^2) + a^2 = 7,57a^2.$$

4. Находим координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{17,69a^3}{7,57a^2} = 2,34a;$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{12,91a^3}{7,57a^2} = 1,71a.$$

Наносим центр тяжести на чертеж (рисунок 1.8).

Для проверки результатов расчетов воспользуемся условием равенства нулю статических моментов сечения относительно центральных осей:

$$S_{x_c} = A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2} + A_3 y_{c3} + A_4 y_{c4} + A_5 y_{c5} = A_1 \cdot (y_1 - y_c) + A_2 \cdot (y_2 - y_c) + \\ + A_3 \cdot (y_3 - y_c) + A_4 \cdot (y_4 - y_c) + A_5 \cdot (y_5 - y_c) = 8a^2 \cdot (2a - 1,71a) + \\ + 0,39a^2 \cdot (1,5a - 1,71a) + (-0,25a^2) \cdot (1,17a - 1,71a) + (-1,57a^2) \cdot (2,58a - 1,71a) + \\ + a^2 \cdot (0,67a - 1,71a) = 2,455a^3 - 2,488a^3 = -0,033a^3 = 0;$$

$$\varepsilon = \frac{0,033}{2,488} \cdot 100\% = 1,3\% < 3\%;$$

$$\begin{aligned}
 S_{x_c} &= A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2} + A_3 x_{c3} + A_4 x_{c4} + A_5 x_{c5} = A_1 \cdot (x_1 - x_c) + A_2 \cdot (x_2 - x_c) + \\
 &+ A_3 \cdot (x_3 - x_c) + A_4 \cdot (x_4 - x_c) + A_5 \cdot (x_5 - x_c) = 8a^2 \cdot (2,5a - 2,34a) + \\
 &+ 0,39a^2 \cdot (0,79a - 2,34a) + (-0,25a^2) \cdot (1,17a - 2,34a) + (-1,57a^2) \times \\
 &\times (3,5a - 2,34a) + a^2 \cdot (3,17a - 2,34a) = 2,403a^3 - 2,426a^3 = -0,023a^3 = 0; \\
 \varepsilon &= \frac{0,023}{2,426} \cdot 100\% = 0,95\% < 3\%.
 \end{aligned}$$

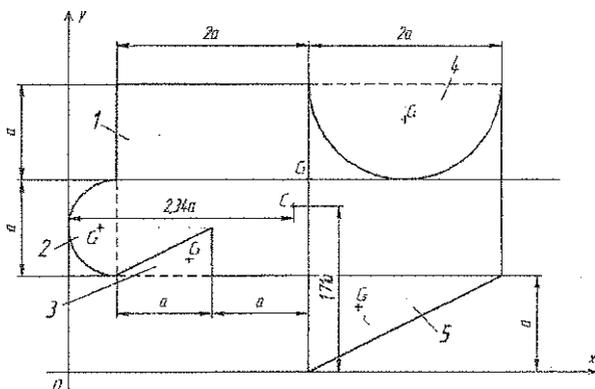


Рисунок 1.8 – Положение центра тяжести сечения

## 1.2. Задания для выполнения расчетно-графической работы № 1

Расчетно-графическая работа № 1 (по теоретической механике) включает задания 1.1 и 1.2. Номер варианта определяется порядковым номером студента в журнале.

### ЗАДАНИЕ 1.1

#### Определение реакций опор составной конструкции

Составная рама состоит из 2-х жестких частей, шарнирно соединенных между собой. С помощью внешних связей (шарнирно-неподвижной, шарнирно-подвижной опор или жесткой заделки) рама крепится к неподвижному основанию. Рама нагружена сосредоточенными силами  $\bar{P}_1$  и  $\bar{P}_2$ , равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  и парой сил с моментом  $M$ .

Требуется:

- 1) определить реакции внешних связей рамы;
- 2) определить давление в промежуточном шарнире;
- 3) проверить правильность решения.

Исходные данные для расчета принять согласно схемам (рисунок 1.9).

**Числовые данные к расчету составных рам:**

$P_1 = 20$  кН,  $P_2 = 10$  кН,  $q = 8$  кН/м,  $M = 5$  кН·м.

*Примечание.* По указанию преподавателя числовые данные могут быть изменены.

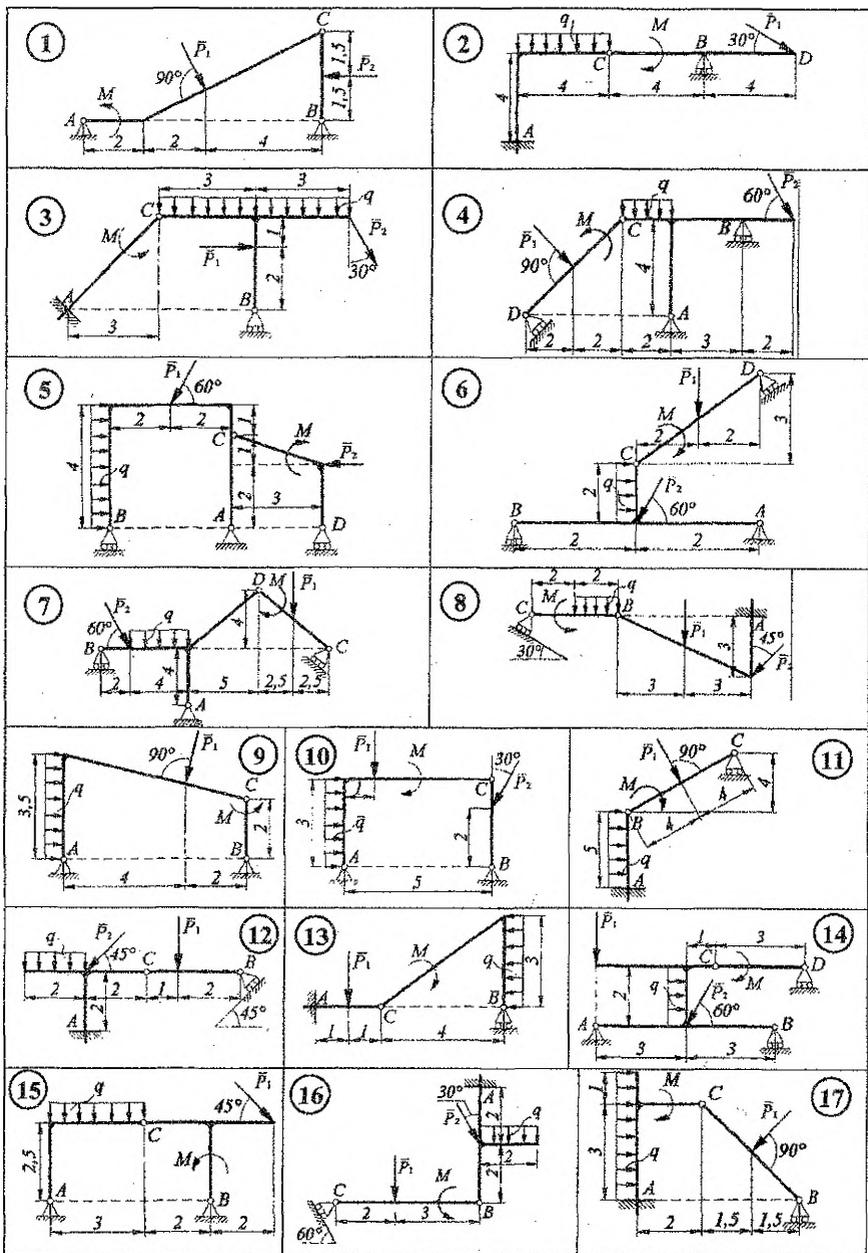
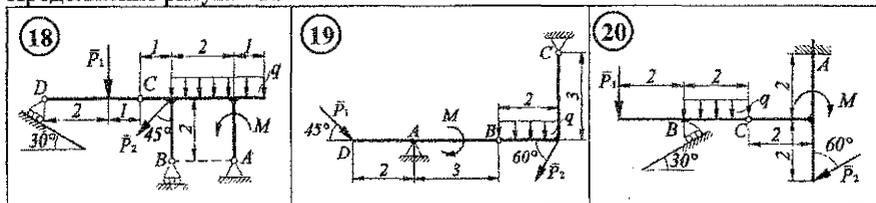


Рисунок 1.9 – Схемы составных конструкций

Продолжение рисунка 1.9



### ЗАДАНИЕ 1.2

#### Определение координат центра тяжести плоского сечения

На рисунке 1.10 изображены плоские сечения. Вычертить сечение в масштабе (на миллиметровой бумаге). Определить координаты его центра тяжести. Показать на чертеже центр тяжести сечения. Выполнить проверку.

Числовые данные к заданию 1.2:  $a = 6$  см,  $b = 14$  см,  $c = 18$  см.

**Примечание.** По указанию преподавателя числовые данные могут быть изменены. Сечения могут иметь дополнительные отверстия. Формы отверстий выбираются по рисунку 1.11, номер схемы выбирается в соответствии с последней цифрой номера группы. Привязка к сечению проводится по точке А, указанной на рисунках. Размеры  $b, s, d, h$  необходимо принять согласно указанию преподавателя.

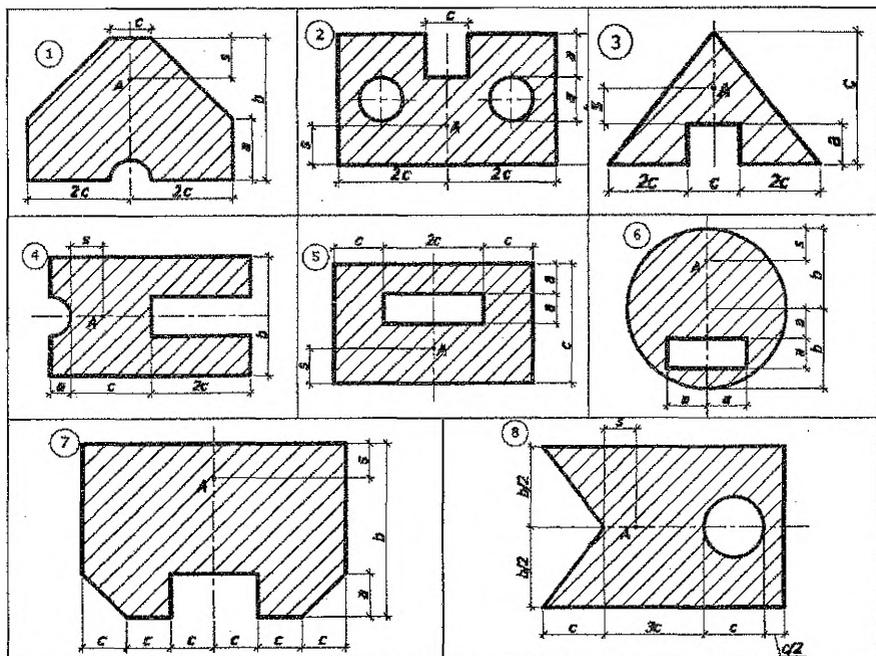
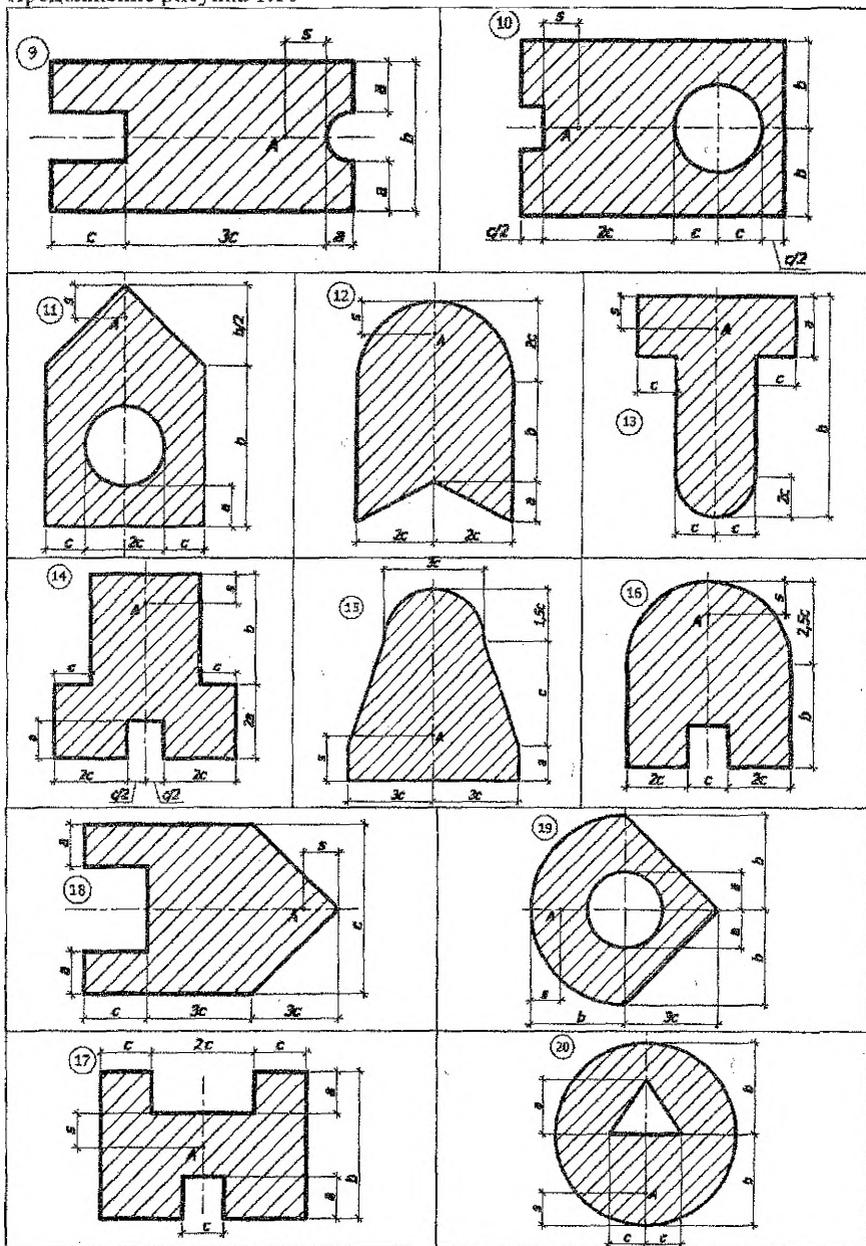


Рисунок 1.10 – Схемы сечений к заданию 1.2

Продолжение рисунка 1.10



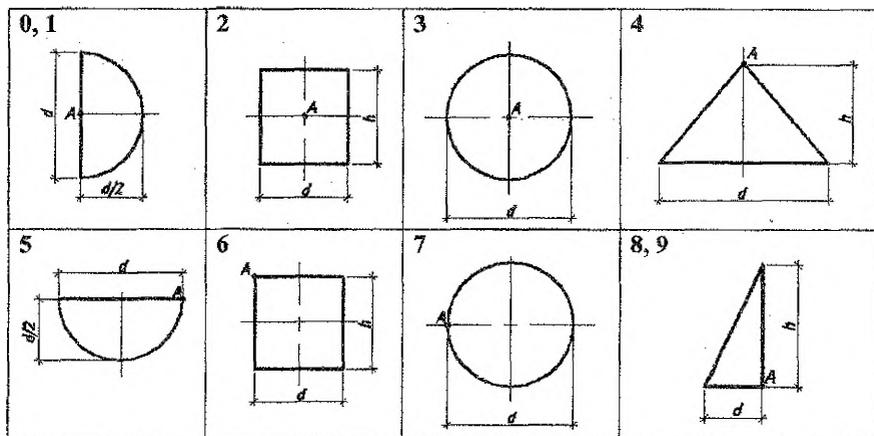


Рисунок 1.11 – Формы отверстий

## 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### 2.1. Примеры решения задач

#### Пример 2.1

Для вертикального стержня, имеющего жесткую заделку на одном из концов, необходимо:

- 1) вычертить схему в произвольном масштабе;
- 2) определить значения нормальной силы на каждом участке стержня, построить эпюру продольных сил;
- 3) построить эпюру нормальных напряжений;
- 4) построить эпюру перемещений;
- 5) проверить прочность и жесткость бруса.

Дано:  $F_1 = 40 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 16 \text{ кН}$ ;  $q = 25 \text{ кН/м}$ ;  $a = 1,4 \text{ м}$ ;  $A_2 = 16 \text{ см}^2$ ;

$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $[\sigma_p] = 29 \text{ МПа}$ ;  $[\sigma_c] = 58 \text{ МПа}$ ;  $[\delta] = \frac{1}{500} \cdot l$ .

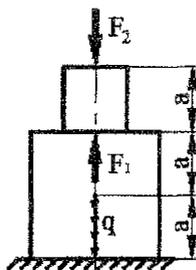
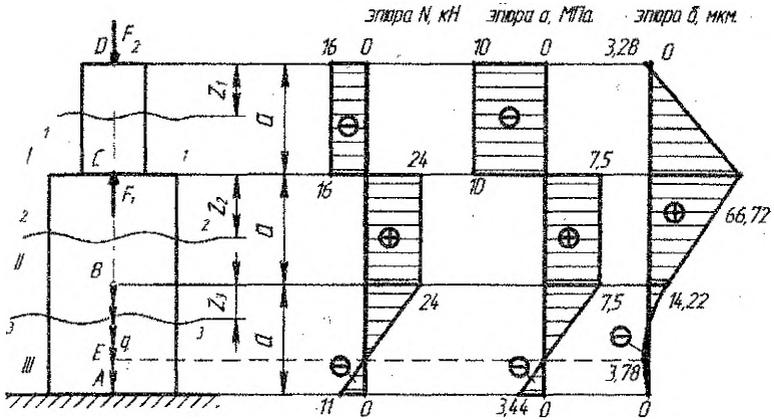


Рисунок 2.1 – Исходная схема бруса

**Решение:**

Вычертим брус в масштабе с указанием необходимых нагрузок и размеров.



**Рисунок 2.2** – Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений

1. Разобьем брус на три силовых участка и запишем выражения для продольных сил и напряжений.

Участок 1

$$0 \leq z_1 \leq a,$$

$$N_1 = -F_2 = -16 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-16 \cdot 10^3}{16 \cdot 10^{-4}} = -1 \cdot 10^7 \text{ Па} = -10 \text{ МПа}$$

(где  $A_1 = A = 16 \text{ см}^2$  - площадь сечения первого участка).

Участок 2

$$0 \leq z_2 \leq a,$$

$$N_2 = -F_2 + F_1 = -16 + 40 = 24 \text{ кН};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{24 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^{-4}} = 7,5 \text{ МПа}$$

(где  $A_2 = 2A = 32 \text{ см}^2$  - площадь сечения второго участка).

Участок 3

$$0 \leq z_3 \leq a$$

$$N_3 = -F_2 + F_1 - q \cdot z_3,$$

при  $z_3 = 0$ :

$$N_3(0) = -F_2 + F_1 - q \cdot 0 = -16 + 40 - 25 \cdot 0 = 24 \text{ кН};$$

$$\sigma_3(0) = \frac{N_3(0)}{A_3} = \frac{24 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^{-4}} = 7,5 \text{ МПа};$$

при  $z_3 = a$ :

$$N_3(a) = -F_2 + F_1 - q \cdot a = -16 + 40 - 25 \cdot 1,4 = -11 \text{ кН},$$

$$\sigma_3(a) = \frac{N_3(a)}{A_3} = \frac{-11 \cdot 10^3}{32 \cdot 10^{-4}} = -3,44 \text{ МПа}$$

(где  $A_3 = 2A = 32 \text{ см}^2$  - площадь сечения бруса на третьем участке).

Находим положение сечения, в котором  $N=0$ :

$$z_{\text{экс}} = \frac{N_3(a)}{q} = \frac{11 \text{ кН}}{25 \text{ кН/м}} = 0,44 \text{ м.}$$

По данным расчета построены эпюры нормальных сил и напряжений (рисунок 2.2).

2. Определяем абсолютное изменение длины стержня.

Участок 1: продольная сила на участке постоянна,  $\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1}$ , тогда

$$\Delta l_1 = \frac{-16 \cdot 10^3 \cdot 1,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 16 \cdot 10^{-4}} = -7 \cdot 10^{-5} \text{ м (т. к. } \Delta l_1 < 0, \text{ участок испытывает деформацию сжатия).}$$

Участок 2:  $\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot a}{E \cdot A_2}$ ,

$$\Delta l_2 = \frac{24 \cdot 10^3 \cdot 1,4}{2 \cdot 10^{11} \cdot 32 \cdot 10^{-4}} = 5,25 \cdot 10^{-5} \text{ м (растяжение).}$$

Участок 3: продольная сила изменяется по длине участка, поэтому

$$\Delta l_3 = \int_0^l \frac{N_3 \cdot dz}{E \cdot A_3} = \frac{\omega_N}{E \cdot A_3}, \text{ где } \omega_N \text{ - площадь эпюры } N,$$

$$\Delta l_{BE} = \frac{24 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 32 \cdot 10^{-4}} \cdot (1,4 - 0,44) = 1,8 \cdot 10^{-5} \text{ м (растяжение),}$$

$$\Delta l_{EA} = \frac{-11 \cdot 10^3}{2 \cdot 10^{11} \cdot 32 \cdot 10^{-4}} \cdot 0,44 = -0,378 \cdot 10^{-5} \text{ м (сжатие).}$$

Абсолютное изменение длины:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_{BE} + \Delta l_{EA} = (-7 + 5,25 + 1,8 - 0,378) \cdot 10^{-5} = -0,328 \cdot 10^{-5} \text{ м.}$$

Определяем перемещения. Перемещение сечения А:  $\delta_A = 0$ , т. к. брус жестко закреплен.

Перемещение сечения Е:

$$\delta_E = \delta_A + \Delta l_{EA} = -0,378 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -3,78 \cdot 10^{-6} \text{ м} = -3,78 \text{ мкм.}$$

Перемещение сечения В:

$$\delta_B = \delta_E + \Delta l_{BE} = (-0,378 + 1,8) \cdot 10^{-5} = 1,422 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 14,22 \text{ мкм.}$$

Перемещение сечения С:

$$\delta_C = \delta_B + \Delta l_2 = (1,422 + 5,25) \cdot 10^{-5} = 6,672 \cdot 10^{-5} \text{ м} = 66,72 \text{ мкм.}$$

Перемещение сечения D:

$$\delta_D = \delta_C + \Delta l_1 = (6,672 - 7) \cdot 10^{-5} = -0,328 \cdot 10^{-5} \text{ м} = -3,28 \text{ мкм.}$$

По данным расчета построена эпюра перемещений поперечных сечений (рисунок 2.2).

3. Проверка прочности бруса.

Анализ эпюры  $\sigma$  показывает, что опасными сечениями для заданного бруса являются: любое сечение на втором участке в растянутой зоне и любое сечение на первом участке в сжатой области бруса.

$$\left| \sigma_{\text{min}}^{\text{сж}} \right| = 10 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 58 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{max}}^p = 7,55 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 29 \text{ МПа}.$$

Условия прочности выполняются.

4. Проверка жесткости бруса.

Условие жесткости имеет вид:

$$\delta \leq [\delta];$$

$$\delta_D = 3,281 \cdot 10^{-6} \text{ м} < [\delta] = \frac{l}{500} = \frac{3a}{500} = \frac{3 \cdot 1,4}{500} = 8,4 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Условие жесткости выполняется.

### Пример 2.2

Абсолютно жесткий брус, подвешенный на двух стальных стержнях и шарнирно неподвижно закрепленный, загружен сосредоточенной силой  $F = 610$  кН. Линейные размеры бруса  $a$ ,  $b$ , высота  $h$  составляют соответственно 1,2 м;

1,8 м; 0,6 м. Отношение площадей  $\frac{A_1}{A_2}$  поперечных сечений стержней  $n=2$ , допускаемое напряжение  $[\sigma] = 160$  МПа, предел текучести материала  $\sigma_T = 240$  МПа.

*Требуется* подобрать сечения стержней из двух равнобоких уголков, а также по величине разрушающей нагрузки определить значение коэффициента запаса прочности.

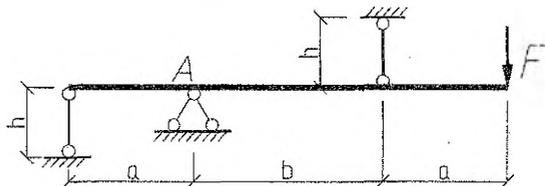


Рисунок 2.3 – Исходная схема стержневой системы

### Решение:

1. Установим степень статической неопределимости. Рассмотрим равновесие бруса. Брус находится в равновесии под действием силы  $F$  и четырех неизвестных реакции:  $N_1$ ,  $N_2$ ,  $R_{Ax}$ ,  $R_{Ay}$ . Но для плоской системы сил можем составить лишь три уравнения статики. Значит, степень статической неопределимости  $S = 4 - 3 = 1$ . Система один раз статически неопределима.

а) В нашем случае требуется определить только  $N_1$  и  $N_2$ , поэтому из трех уравнений статики используем одно (моментов):

$$\begin{aligned} \Sigma M_A = 0; \quad N_1 \cdot a + N_2 \cdot b - F(a+b) &= 0, \\ 1,2N_1 + 1,8N_2 &= 1830. \end{aligned} \quad (2.1)$$

б) Составим схему деформаций (рисунок 2.4).

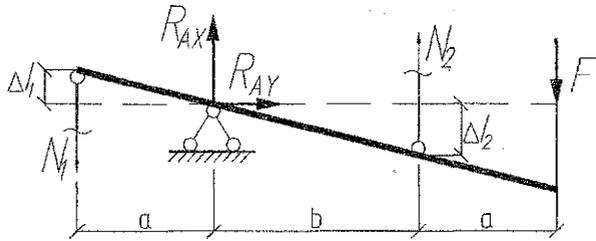


Рисунок 2.4 – Деформационная схема стержневой системы

Из схемы деформаций составим дополнительное уравнение деформаций, используя подобие треугольников:

$$\frac{\Delta l_1}{\Delta l_2} = \frac{a}{b},$$

$$1,8\Delta l_1 = 1,2\Delta l_2.$$

в) Выразим  $\Delta l_1$  и  $\Delta l_2$  по закону Гука через усилия в стержнях, их длины и жесткости:

$$b \frac{N_1 l_1}{EA_1} = a \frac{N_2 l_2}{EA_2}.$$

С учетом  $l_1 = l_2 = h$  и  $\frac{A_1}{A_2} = n$  уравнение деформаций примет вид:

$$\begin{aligned} N_1 &= a \cdot n \cdot N_2, \\ N_1 &= 1,33N_2. \end{aligned} \quad (2.2)$$

г) Составим систему уравнений, которая включает уравнение статики и уравнение деформаций:

$$\begin{cases} N_1 + 1,52N_2 = 1525, \\ N_1 - 1,33N_2 = 0. \end{cases}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} N_1 &= 718 \text{ кН}, \\ N_2 &= 540 \text{ кН}. \end{aligned}$$

2. Определим наиболее напряженный стержень. Для этого сравним напряжения  $\sigma_1$  и  $\sigma_2$ :

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{N_1}{nA_2}, \quad \sigma_2 = \frac{N_2}{A_2}.$$

Составим отношение

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{N_1}{nN_2} = \frac{718 \cdot 10^3}{2 \cdot 540 \cdot 10^3} = 0,7 \Rightarrow \sigma_1 < \sigma_2,$$

более напряженным является второй стержень.

3. Определим площадь поперечного сечения стержня.

Так как  $\sigma_2 > \sigma_1$ , то определяем площадь сечения  $A_2$ :

$$A_2 \geq \frac{N_2}{[\sigma]} = \frac{540 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 0,00338 \text{ см}^2 = 33,8 \text{ м}^2,$$

где  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ .

5. По ГОСТ 8509-72 подбираем сечение стержня, состоящего из двух равнобоких уголков площадью  $A_2^*$ . Используем условие:

$$A_2^* \geq \frac{A_2}{2} = \frac{33,8}{2} = 16,9 \text{ см}^2.$$

В нашем случае  $A_2^* \geq 16,9 \text{ см}^2$ .

Близкой по значению является площадь уголка № 110×110×8, т. е.  $A_2^* = 17,2 \text{ см}^2$ . Определим процент недогрузки (перегрузки)  $\delta$ :

$$\delta = \left| \frac{\sigma_2 - [\sigma]}{[\sigma]} \right| \cdot 100\%.$$

Для этого определим напряжение  $\sigma_2$ :

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{2A_2^*} = \frac{540 \cdot 10^3}{2 \cdot 17,2 \cdot 10^3} \approx 157 \text{ МПа}.$$

Тогда

$$\delta = \left| \frac{157 - 160}{160} \right| \approx 2\%,$$

что допустимо, так как  $|\delta| = 2\% < [\delta] = 5\%$ , где  $[\delta] = 5\%$  - допускаемый процент перегрузки (недогрузки) стержня. Принимаем уголок № 110×110×8.

6. Найдем площадь сечения первого уголка  $A_1^*$ :

$$A_1 = nA_2,$$

$$A_1^* \geq \frac{A_1}{2} = \frac{67,6}{2} = 33,8 \text{ см}^2,$$

По ГОСТ 8509-72 подбираем сечение равнобокого уголка №160×160×11, для которого  $A_1^* = 34,4 \text{ см}^2$ .

7. Определим величину разрушающей нагрузки:

$$F_p = \frac{N_1^{np} \cdot a + N_2^{np} \cdot b}{a + b}$$

Предельные усилия в стержнях  $N_1^{np}$  и  $N_2^{np}$  рассчитаем:

$$N_1^{np} = 2 \cdot A_1^* \cdot \sigma_T = 2 \cdot 34,4 \cdot 10^{-4} \cdot 240 \cdot 10^6 = 1651,2 \text{ кН},$$

$$N_2^{np} = 2 \cdot A_2^* \cdot \sigma_T = 2 \cdot 17,2 \cdot 10^{-4} \cdot 240 \cdot 10^6 = 825,6 \text{ кН}.$$

Подставим значения  $N_1^{np}$  и  $N_2^{np}$  в формулу для расчета разрушающей нагрузки.

Получим:

$$F_p = \frac{1651,2 \cdot 1,2 + 820,8 \cdot 1,8}{1,2 + 1,8} = 1153 \text{ кН.}$$

Найдем коэффициент запаса прочности:

$$m = \frac{F_p}{F} = \frac{1153 \cdot 10^3}{610 \cdot 10^3} = 1,89.$$

### Пример 2.2

Двухопорная балка нагружена внешними нагрузками (рисунок 2.5).

*Требуется:*

1. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
2. Указать положение опасного сечения балки.
3. Для двутавровой балки подобрать номер прокатного профиля из условия прочности, а также произвести проверку прочности по касательным напряжениям. При расчетах принять для стали:  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ .

*Дано:*  $a = 0,9 \text{ м}$ ,  $b = 1,8 \text{ м}$ ,  $F = 33 \text{ кН}$ ,  $q = 31 \text{ кН/м}$ ,  $M = 14 \text{ кН}\cdot\text{м}$ .

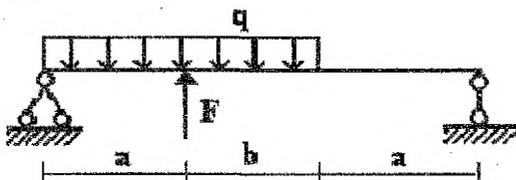


Рисунок 2.5 – Исходная схема двухопорной балки

### Решение:

Составляем уравнение моментов относительно точки А:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -q \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right) + M + R_B \cdot (2a+b) + F \cdot a = 0;$$

и находим реакцию опоры В:

$$R_B = \frac{-M - F \cdot a + q \cdot (a+b) \cdot \left(\frac{a+b}{2}\right)}{2a+b} =$$
$$= \frac{-14 - 33 \cdot 0,9 + 31 \cdot (0,9 + 1,8) \cdot \left(\frac{0,9 + 1,8}{2}\right)}{2 \cdot 0,9 + 1,8} = 19,25 \text{ кН.}$$

Составляем уравнение моментов относительно точки В:

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad q \cdot (a+b) \cdot \left(a + \frac{a+b}{2}\right) + M - R_A \cdot (2a+b) - F \cdot (a+b) = 0;$$

и находим реакцию опоры А:

$$R_A = \frac{-F \cdot (a+b) + M + q \cdot (a+b) \cdot \left(a + \frac{a+b}{2}\right)}{a+b+c} =$$

$$= \frac{-33 \cdot (0,9+1,8) + 14 + 31 \cdot (0,9+1,8) \cdot \left(0,9 + \frac{0,9+1,8}{2}\right)}{a+b+c} = 31,45 \text{ кН.}$$

**Проверка:**

$$\sum F_y = 0, \quad -q \cdot (a+b) + F + R_A + R_B = -31 \cdot 2,7 + 33 + 31,45 + 19,25 = 0,$$

$$0 = 0.$$

Разбиваем балку на 3 силовых участка.

Проводим произвольное сечение на каждом из участков на расстоянии  $z$  и рассматриваем условие равновесия отсеченной части:

Участок I,  $0 \leq z_1 \leq a$ .

$$Q_1 = -R_B = -19,25 \text{ кН,}$$

$$M_1 = R_B \cdot z_1;$$

При  $z_1 = 0$ ,

$$M_1(0) = R_B \cdot 0 = 19,25 \cdot 0 = 0.$$

При  $z_1 = a = 0,9 \text{ м,}$

$$M_1(a) = R_B \cdot a = 19,25 \cdot 0,9 = 17,32 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Участок II,  $0 \leq z_2 \leq b$ .

$$Q_2 = -R_B + q \cdot z_2,$$

$$M_2 = R_B \cdot (a + z_2) - q \cdot z_2 \cdot \frac{z_2}{2}.$$

При  $z_2 = 0$ ,

$$Q_2(0) = -R_B + q \cdot 0 = -19,25 + 31 \cdot 0 = -19,25 \text{ кН,}$$

$$M_2(0) = R_B \cdot (a + 0) - q \cdot \frac{0^2}{2} = 19,25 \cdot (0,9 + 0) - 31 \cdot \frac{0^2}{2} = 17,32 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

При  $z_2 = b = 1,8 \text{ м,}$   $Q_2(b) = -R_B + q \cdot b = -19,25 + 31 \cdot 1,8 = 36,55 \text{ кН,}$

$$M_2(b) = R_B \cdot (a + b) - q \cdot \frac{b^2}{2} = 19,25 \cdot (0,9 + 1,8) - 31 \cdot \frac{1,8^2}{2} = 1,75 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

$Q_2(0) < 0$ ,  $Q_2(b) > 0$ , следовательно, на участке 2-экстремум. Находим его положение:

$$z_3 = \left| \frac{Q_2}{q} \right| = \left| \frac{-19,25}{31} \right| = 0,621 \text{ м.}$$

Находим значение экстремального момента:

$$M_3 = R_B \cdot (a + z_3) - q \cdot \frac{z_3^2}{2} = 19,25 \cdot (0,9 + 0,621) - 31 \cdot \frac{0,621^2}{2} = 23,3 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Участок III,  $0 \leq z_3 \leq a$ .

$$Q_3 = R_A - q \cdot z_3,$$

$$M_3 = R_A \cdot z_3 - q \cdot z_3 \cdot \frac{z_3}{2} - M;$$

При  $z_3 = 0$ ,

$$Q_3(0) = R_A - q \cdot 0 = 31,45 - 31 \cdot 0 = 31,45 \text{ кН,}$$

$$M_3(0) = R_A \cdot 0 - q \cdot 0 \cdot \frac{0}{2} - M = 31,45 - 31 \cdot 0 \cdot \frac{0}{2} - 14 = -14 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

При  $z_3 = a = 0,9 \text{ м}$ ,  $Q_3(a) = R_A - q \cdot 0 = 31,45 - 31 \cdot 0,9 = 3,555 \text{ кН}$ ,

$$M_3(a) = R_A \cdot a - q \cdot a \cdot \frac{a}{2} - M = 31,45 - 31 \cdot 0,9 \cdot \frac{0,9}{2} - 14 = 1,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

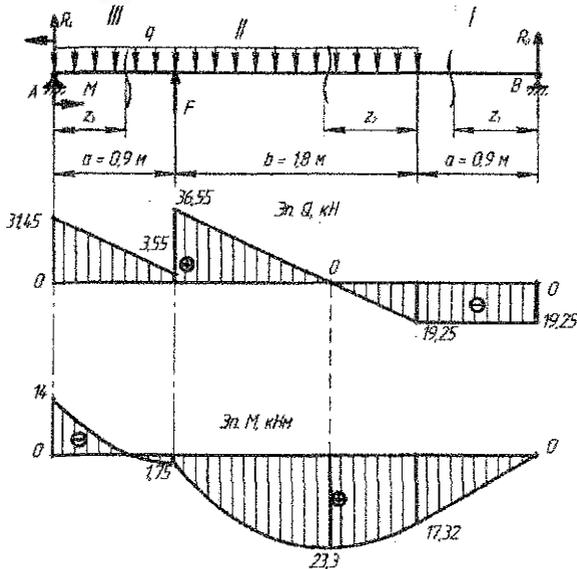


Рисунок 2.6 – Схема балки и эпюры внутренних силовых факторов

Опасное сечение: участок 2 при  $z_0 = 0,621 \text{ м}$ ,  $M_{\max} = |M_3| = 23,3 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Находим требуемый момент сопротивления:

$$W_0 = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{23,3 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 145,62 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 145,62 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатной стали подбираем двутавр с ближайшим большим моментом сопротивления  $W_x = 184 \text{ см}^3$  (№ 20).

Т. к. принятое  $W_x = 184 \text{ см}^3$  больше требуемого  $145,62 \text{ см}^3$ , проверку прочности по нормальным напряжениям не выполняем.

Касательные напряжения при изгибе определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b(y)},$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении;  $S_x^{\text{отс}}$  – статический момент отсеченной части поперечного сечения;  $I_x$  – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси;  $b$  – ширина поперечного сечения балки на том уровне, на котором определяются касательные напряжения.

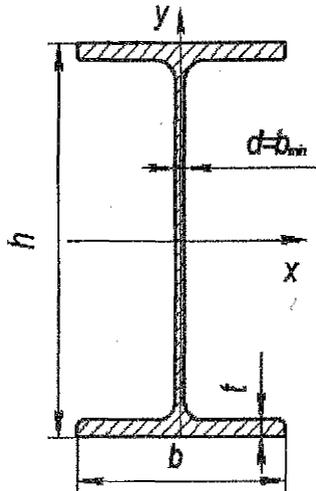


Рисунок 2.7 – Двутавровое сечение балки

Найдем  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{x \max}^{\text{отс}}}{I_x \cdot b_{\min}}$$

Статический момент отсеченной части поперечного сечения максимален для полусечения и по сортаменту для двутавра №20 равен  $S_{x \max}^{\text{отс}} = 104 \text{ см}^3$ . При этом ширина сечения на этом уровне минимальна и равна  $b_{\min} = d = 0,52 \text{ см}$ . Момент инерции двутаврового сечения относительно нейтральной оси  $I_x = 1840 \text{ см}^4$ . Максимальная поперечная сила действует на участке 2:  $Q_{\max} = Q_2(b) = 36,55 \text{ кН}$ .

Тогда

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{x \max}^{\text{отс}}}{I_x \cdot d} = \frac{36,55 \cdot 10^3 \cdot 104 \cdot 10^{-6}}{1840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,52 \cdot 10^{-2}} = 39,73 \cdot 10^6 \text{ Па} < [\tau] = 100 \text{ МПа.}$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

### Пример 2.3

На стойку из стали Ст. 3 длиной  $l=1,5 \text{ м}$  с шарнирно опертыми концами действует сжимающая сила  $F=67 \text{ кН}$  (рисунок 2.8). Допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma_c]=160 \text{ МПа}$ . Определить размеры поперечного сечения стойки, выполнив расчет в двух вариантах:

- сечение в виде сплошного круга (рисунок 2.8 а);
- сечение в виде двух равнобоких уголков (рисунок 2.8 б).

Сравнить полученные стойки по расходу материала и для более рациональной определить критическую силу. Найти коэффициент запаса устойчивости.

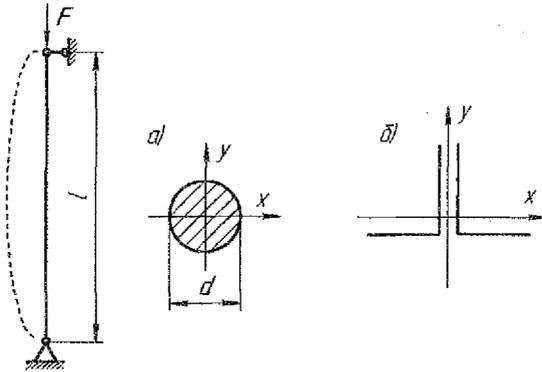


Рисунок 2.8 – Схема стойки и формы поперечных сечений

**Решение:**

а) Расчет стойки сплошного сечения (рисунок 2.8 а).

Принимаем предварительно коэффициент продольного изгиба  $\varphi = 0,5$ . Определяем необходимую площадь сечения стойки:

$$A = \frac{F}{\varphi [\sigma_c]} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 8,37 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Диаметр стойки:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 8,37 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Радиус инерции круга:

$$i = \frac{d}{4} = \frac{3,3 \cdot 10^{-2}}{4} = 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 1,5}{0,8 \cdot 10^{-2}} = 187.$$

Коэффициент продольного изгиба определяем по таблице 3.1 Приложения методом интерполяции: при  $\lambda = 180$ :  $\varphi = 0,23$ ; при  $\lambda = 190$ :  $\varphi = 0,21$ ; следовательно, при  $\lambda = 187$ :

$$\varphi_{\text{табл}} = 0,23 - \frac{0,23 - 0,21}{10} \cdot 7 = 0,22.$$

Получили значительное расхождение между принятым и полученным значениями коэффициента  $\varphi$ . Принимаем на втором приближении:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{\text{табл}}}{2} = \frac{0,5 + 0,22}{2} = 0,36.$$

Проводим перерасчет. Необходимая площадь сечения стойки:

$$A = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma_c]} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,36 \cdot 160 \cdot 10^6} = 11,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Диаметр стойки:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 11,6 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Радиус инерции круга:

$$i = \frac{d}{4} = \frac{3,8 \cdot 10^{-2}}{4} = 0,95 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 1,5}{0,95 \cdot 10^{-2}} = 158.$$

Коэффициент продольного изгиба определяем по таблице 3.1 методом интерполяции: при  $\lambda=150$ :  $\varphi=0,32$ ; при  $\lambda=160$ :  $\varphi=0,29$ ; следовательно, при  $\lambda=158$ :

$$\varphi_{\text{табл}} = 0,32 - \frac{0,32 - 0,29}{10} \cdot 8 = 0,296.$$

Принимаем для третьей попытки:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{\text{табл}}}{2} = \frac{0,36 + 0,296}{2} = 0,325.$$

Проводим перерасчет. Необходимая площадь сечения стойки:

$$A = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma_c]} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,325 \cdot 160 \cdot 10^6} = 12,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Диаметр стойки:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12,9 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 4,04 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Радиус инерции круга:

$$i = \frac{d}{4} = \frac{4,04 \cdot 10^{-2}}{4} = 1,01 \cdot 10^{-2} \text{ м.}$$

Гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 1,5}{1,01 \cdot 10^{-2}} = 149.$$

Коэффициент продольного изгиба определяем методом интерполяции: при  $\lambda=140$ :  $\varphi=0,36$ ; при  $\lambda=150$ :  $\varphi=0,32$ ; следовательно, при  $\lambda=149$ :

$$\varphi_{\text{табл}} = 0,36 - \frac{0,36 - 0,32}{10} \cdot 9 = 0,324.$$

Принимаем  $\varphi = \varphi_{\text{табл}}$  и проверим прочность:

$$\sigma_y = \frac{F}{\varphi A} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,324 \cdot 12,9 \cdot 10^{-4}} \approx 160 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160 \text{ МПа.}$$

Получили  $\sigma_y = [\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$ .

Окончательно принимаем сплошную круглую стойку, имеющую площадь поперечного сечения  $A_{\text{прин}} = 12,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

б) Расчет стойки из равнобоких уголков (рисунок 2.8 б).

Предварительно принимаем  $\varphi_1 = 0,5$ . Определяем необходимую площадь сечения стойки:

$$A = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma_c]} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 8,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 8,38 \text{ см}^2.$$

Требуемая площадь одного уголка:

$$A_{ye} = \frac{A}{2} = \frac{8,38}{2} = 4,19 \text{ см}^2.$$

Из таблиц сортамента принимаем уголок  $56 \times 56 \times 4$  с  $A_{ye} = 4,38 \text{ см}^2$  и  $i_x = 1,73$  см (очевидно, для сечения из 2-х уголков  $i_y > i_x$ , т.е.  $i_x = i_{\min}$ , и относительно оси  $x$  радиус инерции всего сечения равен радиусу инерции уголка).

Гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{1 \cdot 1,5}{1,73 \cdot 10^{-2}} = 87.$$

С учетом таблицы 3.1 методом интерполяции (см. пример расчета стойки круглого сечения) определяем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_{табл} = 0,768.$$

Для второй попытки принимаем:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{табл}}{2} = \frac{0,5 + 0,768}{2} = 0,634.$$

Площадь сечения:

$$A = \frac{67 \cdot 10^3}{0,634 \cdot 160 \cdot 10^6} = 6,61 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 6,61 \text{ см}^2.$$

Площадь одного уголка:

$$A_{ye} = \frac{A}{2} = \frac{6,61}{2} = 3,3 \text{ см}^2.$$

Из таблиц сортамента принимаем уголок  $45 \times 45 \times 4$ , для которого  $A_{ye} = 3,48 \text{ см}^2$ ,  $i_x = 1,38$  см.

Тогда гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 1,5}{1,38 \cdot 10^{-2}} = 109.$$

С учетом таблицы 3.1 методом интерполяции определяем:

$$\varphi_{табл} = 0,528.$$

Для третьей попытки принимаем:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{табл}}{2} = \frac{0,634 + 0,528}{2} = 0,581.$$

Площадь сечения:  $A = \frac{67 \cdot 10^3}{0,581 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 7,2 \text{ см}^2.$

Площадь одного уголка:  $A_{ye} = \frac{A}{2} = \frac{7,2}{2} = 3,6 \text{ см}^2.$

Из таблиц сортамента принимаем уголок 50×50×4, для которого  $A_{yc} = 3,89$  см<sup>2</sup>,  $i_x = 1,54$  см.

Тогда гибкость стойки:  $\lambda = \frac{1 \cdot 1,5}{1,54 \cdot 10^{-2}} = 97,5$ .

Методом интерполяции определяем:  $\varphi_{табл} = 0,622$ .

Принимаем  $\varphi = \varphi_{табл} = 0,622$  и проверим принятый профиль:

$$\sigma_y = \frac{F}{\varphi A} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,622 \cdot 2 \cdot 3,89 \cdot 10^{-4}} = 138 \cdot 10^6 \text{ Па} = 138 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 160 \text{ МПа}.$$

Сечение принятого профиля недогружено на 13 %. Нетрудно убедиться, что при любом ином номере профиля из сортамента будет либо недопустимая перегрузка, либо еще большая недогрузка.

#### в) Сравнение полученных стоек по расходу материала.

Площадь сечения сплошной круглой стойки  $A_{кругл} = 12,9$  см<sup>2</sup>, площадь сечения стойки из двух равнобоких уголков  $2A_{yc} = 7,78$  см<sup>2</sup>. Сравнение результатов показывает, что более рациональной является стойка из двух уголков.

#### г) Определение критической силы.

Для принятой стойки  $\lambda = 97,5 < \lambda_{кр} = 100$ , следовательно, для определения критической силы используем формулу Ф.С. Ясинского для стали:

$$\sigma_{кр} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 97,5 = 199 \text{ МПа}.$$

Определим критическую силу:

$$F_{кр} = \sigma_{кр} \cdot A = 199 \cdot 10^6 \cdot 7,78 \cdot 10^{-4} = 155 \cdot 10^3 \text{ Н} = 155 \text{ кН}.$$

Примечание. Если для принятой стойки  $\lambda \geq \lambda_{кр}$ , то критическую силу необходимо определять по формуле Эйлера:  $F_{кр} = \frac{\pi^2 EI_{\min}}{(\mu l)^2}$ .

#### д) Определение коэффициента запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{кр}}{F} = \frac{155}{67} = 2,3.$$

### **2.3. Задания для выполнения расчетно-графической работы № 2**

Расчетно-графическая работа № 2 (по сопротивлению материалов) включает задания 2.1 и 2.2. Номер варианта определяется у студентов дневной формы обучения порядковым номером в журнале.

#### **ЗАДАНИЕ 2.1**

Для вертикального или горизонтального стержня, имеющего жесткую заделку на одном из концов, **необходимо:**

1) вычертить схему в произвольном масштабе;

- 2) определить значения нормальной силы на каждом участке стержня;
- 3) построить эпюру нормальной силы;
- 4) построить эпюру перемещений;
- 5) проверить прочность и жесткость бруса.

Схемы стержней приведены на рисунке 2.9. Площадь поперечного сечения узкого участка  $A = 0,002 \text{ м}^2$ , широкого участка  $2A$ . При расчетах принять: допускаемые напряжения на растяжение  $[\sigma_p] = 20 \text{ МПа}$ ; на сжатие  $[\sigma_c] = 80 \text{ МПа}$ ; допускаемая деформация  $[\delta] = 1/500$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Числовые данные к расчету ступенчатых брусьев:

$a = 1 \text{ м}$ ,  $q_1 = q_3 = 10 \text{ кН/м}$ ,  $q_2 = 25 \text{ кН/м}$ ,  $F_1 = 15 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 30 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 20 \text{ кН}$ .

*Примечание.* По указанию преподавателя числовые данные могут быть изменены.

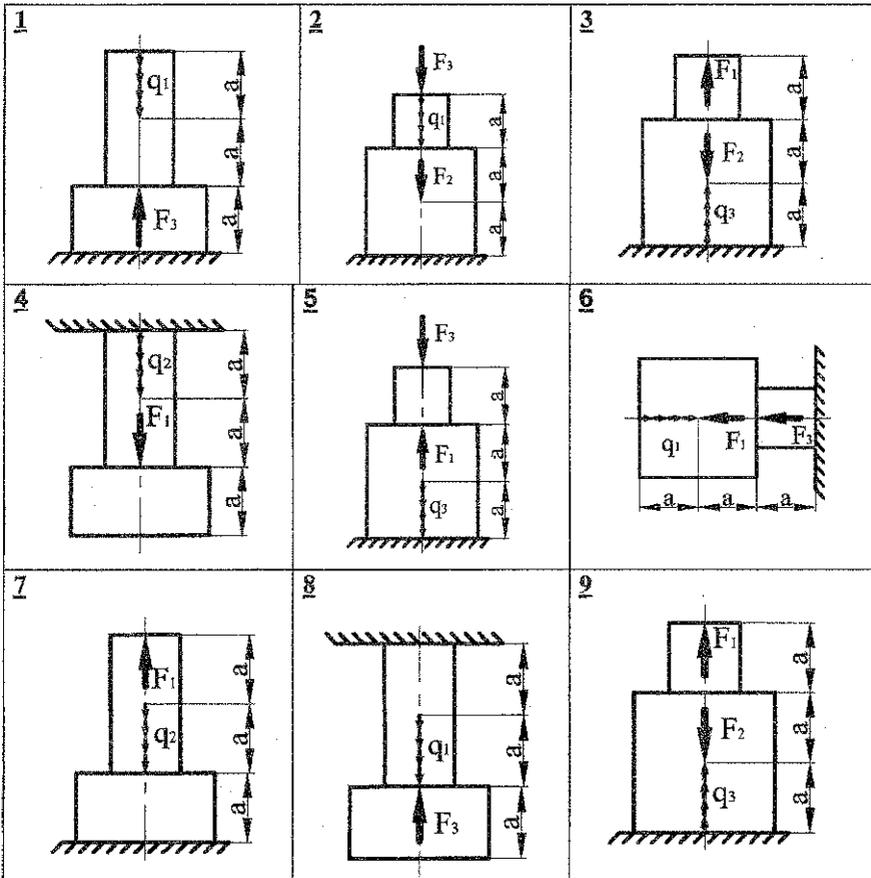
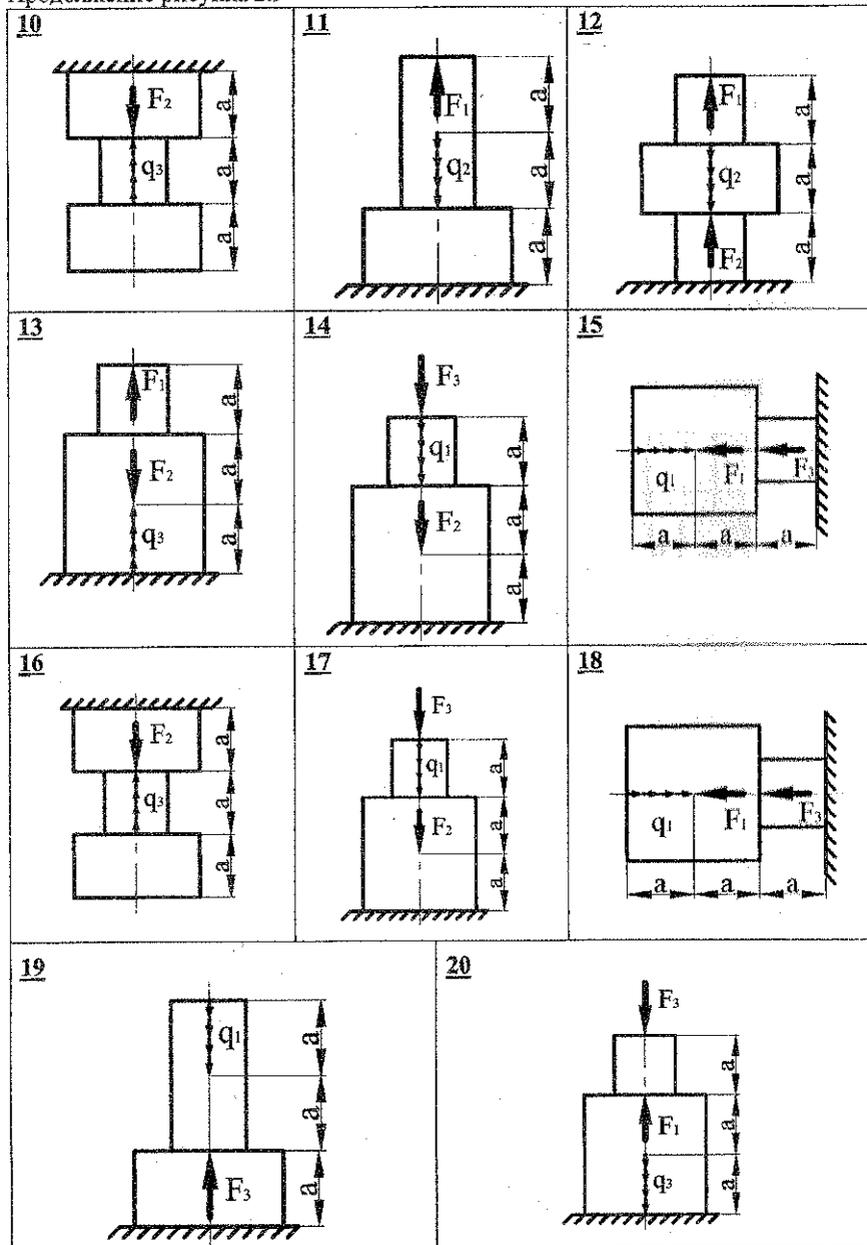


Рисунок 2.9 – Схемы ступенчатых брусьев

Продолжение рисунка 2.9



## ЗАДАНИЕ 2.2

Балки, закрепленные различным образом, загружены внешними нагрузками (сосредоточенной силой, парой сил, распределенной нагрузкой).

**Требуется:**

1. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
2. Указать положение опасного сечения балок.
3. Для деревянной балки (а) подобрать размеры квадратного поперечного сечения из условия прочности, если  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ .
4. Для стальной двутавровой балки (б) подобрать номер прокатного профиля из условия прочности, а также произвести проверку прочности по касательным напряжениям.

При расчетах принять для стали: модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ . Исходные данные принять согласно схемам (рисунок 2.10).

Числовые данные к расчету балок:

$$a = 2 \text{ м}, b = 3 \text{ м}, F = 30 \text{ кН}, M = 50 \text{ кН}\cdot\text{м}, q = 80 \text{ кН/м}.$$

**Примечание.** По указанию преподавателя числовые данные могут быть изменены.

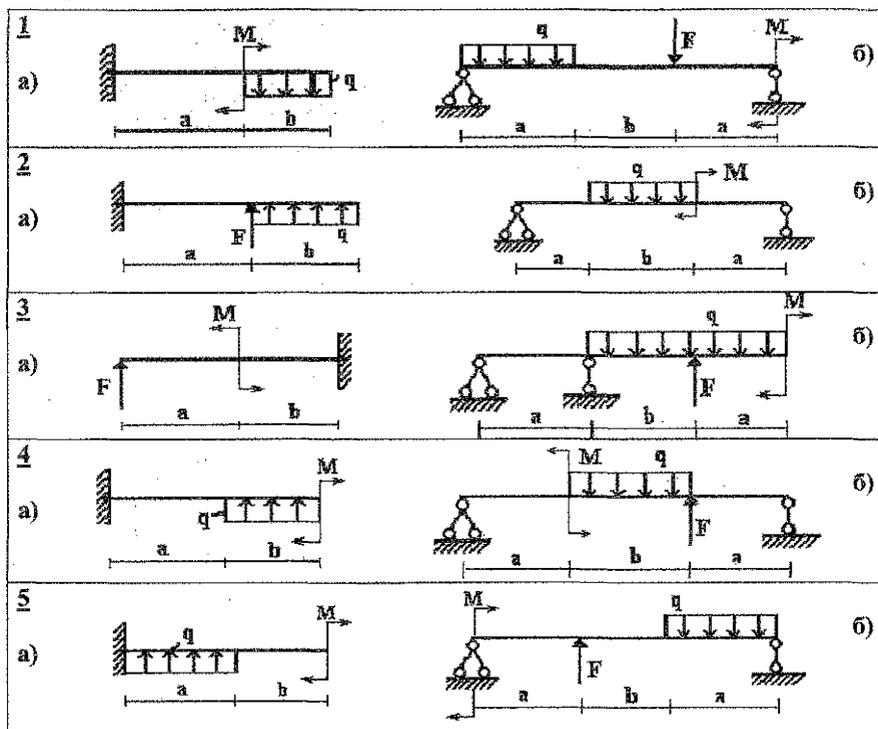
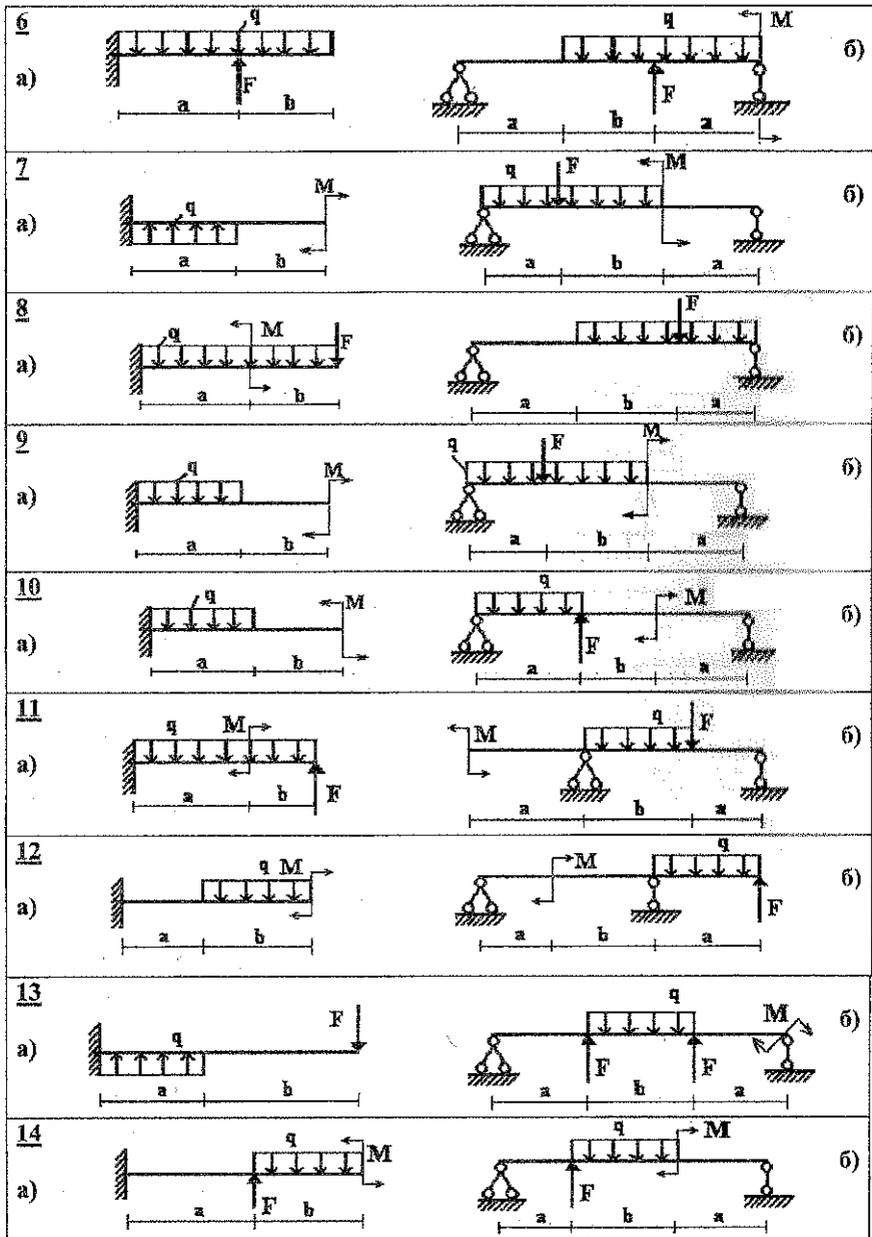
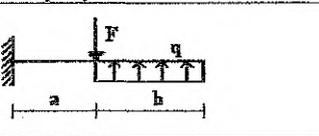
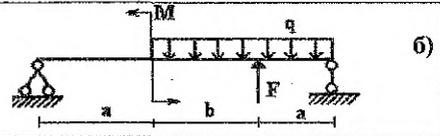
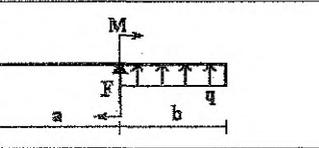
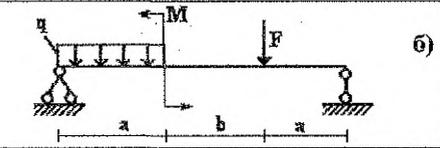
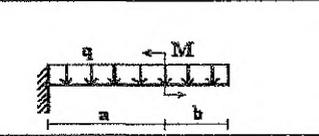
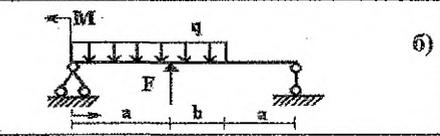
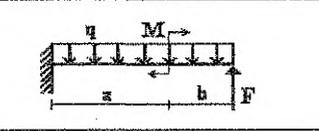
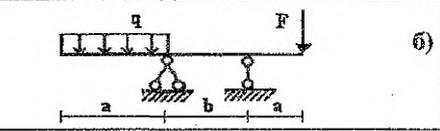
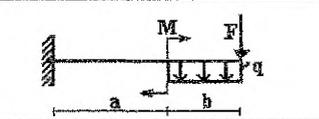
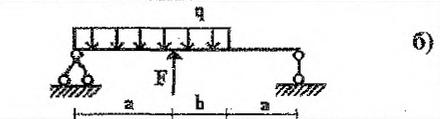
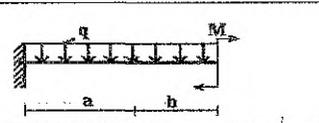
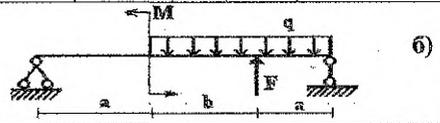


Рисунок 2.10 – Схемы балок

Продолжение рисунка 2.10



Продолжение рисунка 2.10

<p>15</p> <p>a)</p> 	<p>б)</p> 
<p>16</p> <p>a)</p> 	<p>б)</p> 
<p>17</p> <p>a)</p> 	<p>б)</p> 
<p>18</p> <p>a)</p> 	<p>б)</p> 
<p>19</p> <p>a)</p> 	<p>б)</p> 
<p>20</p> <p>a)</p> 	<p>б)</p> 

### 3. ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 3.1 - Значения коэффициентов  $\varphi$  для различных материалов

Глубоость стержня $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Сталь марок	Сталь		Чугун	Дерево	Дюр алюминий	Бетон		Каменная кладка
	Ст 0 Ст.2,3,4	Ст.5	СПК				тяжёлый	лёгкий	
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,000	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,99	0,999	1,00	1,00	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97	0,998	0,98	0,96	0,96
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93	0,835	0,90	0,86	0,91
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87	0,700	0,84	0,73	0,85
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80	0,568	0,76	0,68	0,78
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71	0,455	0,70	0,59	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60	0,353	0,63	0,52	0,65
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48	0,269	0,57	0,46	0,58
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38	0,212	0,51	-	0,52
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31	0,172	0,45	-	0,47
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25	0,142	-	-	0,42
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22	0,119	-	-	0,38
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18	0,101	-	-	0,34
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16	0,087	-	-	0,31
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14	0,076	-	-	0,28
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12	-	-	-	-
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11	-	-	-	-
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10	-	-	-	-
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09	-	-	-	-
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08	-	-	-	-
210	0,17	0,14	-	-	-	-	-	-	-
220	0,16	0,13	-	-	-	-	-	-	-

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С.М. Тарг. – 15 изд. стер. – М.: Высшая школа, 2005. – 416 с.
2. Путьята, Т.В. Прикладная механика / Т. В. Путьята, Н.С. Можаровский [и др.] – Киев.: Вища школа, 1977. – 536 с.
3. Бутенин, Н.В. Курс теоретической механики / Н.В. Бутенин, Я.Л. Лунц, Д.Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. – 736 с.
4. Мещерский, И. В. Сборник задач по теоретической механике. – 38 изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с.
5. Айзенберг, Т.Б. Руководство к решению задач по теоретической механике / Т.Б. Айзенберг. – М.: Наука, 1970. – 416 с.
6. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Наука, 1976. – 607 с.
7. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов: учебник для вузов - 9 изд., перераб. / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
8. Дарков, А.В Сопротивление материалов. Учебник для вузов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро - Изд. 4-е. – М.: Высш. школа, 1975.
9. Миролюбов, И. Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролюбов. – М.: Машиностроение, 1974. – 493 с.
10. Борисов, М.И. Основы технической механики и детали механизмов приборов / М.И. Борисов, Ф.Г. Зуев. – М.: Машиностроение, 1977. – 341 с.
11. Яровая, А.В. Решение задач по технической механике / А.В. Яровая, Д.В. Леоненко, В.В. Талецкий. - Гомель: БелГУТ, 2005. – 103 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: *Веремейчик Андрей Иванович*  
*Томашев Игорь Геннадьевич*  
*Гарбачевский Виталий Владимирович*

## ТЕХНИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

Методические указания  
к расчетно-графическим работам и практическим занятиям  
для студентов специальности  
1-27 01 01 – «Экономика и организация производства»

Ответственный за выпуск: *Томашев И.Г.*  
Редактор: *Боровикова Е.А.*  
Компьютерная верстка: *Колб К.С.*  
Корректор: *Никитчик Е.В.*

---

Подписано в печать 24.11.2017 г. Формат 60x84/16. Бумага «Снегурочка».  
Усл.-п.л. 2,21. Усл.-изд.л. 2,38. Тираж 50 экз. Заказ №1166.  
Отпечатано на ризографе учреждение образования  
«Брестский государственный технический университет».  
224017, Брест, ул. Московская, 267.