

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

Учреждение образования  
“БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

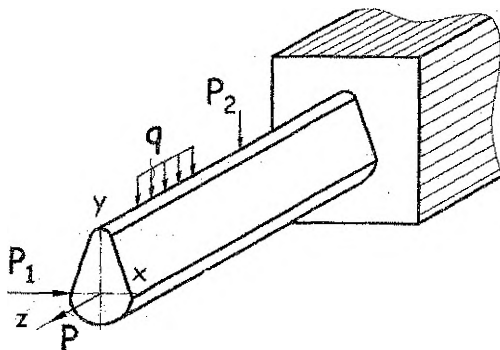
Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

## ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-проектировочных работ  
по курсу “Сопротивление материалов”

для студентов строительных специальностей

Часть II



Брест 2009

УДК 539.3/8

Сопротивление материалов является одной из общепрофессиональных дисциплин при подготовке инженеров строительных специальностей.

Для закрепления теоретического материала и приобретения навыков инженерных расчетов студенты выполняют расчетно-проектировочные работы по основным разделам курса.

Настоящие задание и методические указания позволяют индивидуализировать и активизировать самостоятельную работу студентов при изучении курса "сопротивление материалов".

Издаётся в 2-х частях. Часть 2.

Составители: Соловей П.И., доцент  
Хвисевич В.М., доцент, к.т.н.

Рецензенты: кафедра сопротивления материалов и теории упругости БНТУ;  
профессор кафедры строительных конструкций БрГТУ В.И. Драган

## Введение

Задания и методические указания к расчетно-проектировочным работам соответствуют учебным планам специальностей 1-70 02 01; 1-70 02 02; 1-70 01 01; 1-70 03 01 и охватывают наиболее важные разделы курса сопротивления материалов, которые изучаются студентами в весеннем семестре на втором курсе. Методические указания позволяют студентам изучить и применить теоретический материал для решения задач на примерах расчета статически определимых балок, испытывающих прямой изгиб, внецентренно сжатой колонны и сжатой стойки на устойчивость.

В методических указаниях приведены требования к оформлению расчетно-проектировочных работ и примеры их выполнения.

## УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ПРОЕКТИРОВОЧНЫХ РАБОТ

Необходимые данные к выполнению расчетно-проектировочных работ следует принимать по схемам и таблицам согласно номеру варианта и номеру схемы.

Расчетно-проектировочная работа выполняется на стандартных листах формата А4 (210 x 297 мм) и оформляется в следующем порядке: титульный лист, задание на расчетно-проектировочную работу, текст расчетов, выводы, перечень литературы.

Чертежи и схемы следует выполнять на отдельных листах с соблюдением правил графики и масштабов. На эпюрах, чертежах необходимо указывать значение числовых величин, используемых в расчетах.

Значения полученных расчетных величин следует округлять до десятых или сотых с указанием размерностей и подчеркивать в конце каждого расчета.

Для проверки правильности выполненных расчетов необходимо воспользоваться пакетом программ в вычислительном центре кафедры информатики и прикладной математики.

# 1. ПРЯМОЙ ИЗГИБ

## 1.1 Общие понятия

Для большинства элементов строительных конструкций изгиб является едва ли не самым распространенным видом деформации. Прямой брус, испытывающий изгиб, называют балкой. Изгиб балок вызывают силы (нагрузки), которые перпендикулярны к продольной оси балки, или пары сил, лежащие в плоскостях, проходящих через эту ось. Если все нагрузки действуют в одной плоскости, называемой силовой, проходящей через геометрическую ось балки и одну из главных центральных осей инерции поперечного сечения, то такой изгиб называется прямым. Если в поперечных сечениях действуют только изгибающие моменты, то такой изгиб называют чистым прямым изгибом, а при одновременном действии поперечных сил и изгибающих моментов – прямой поперечный изгиб. При прямом изгибе продольная ось (геометрическое место центров тяжести поперечных сечений) из прямолинейной превращается в плавную кривую линию, называемую изогнутой осью балки или упругой линией балки. Упругая линия показывает вертикальные перемещения центров тяжести поперечных сечений под действием нагрузок.

## 1.2 Расчет балок на прочность

В общем случае расчет балок на прочность сводится:

а) Расчет по наибольшим нормальным напряжениям. Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R,$$

где  $M_{\max}$  – наибольший изгибающий момент (устанавливается по эп.М);

$W_x$  – осевой момент сопротивления поперечного сечения балки при изгибе;

$R$  – расчетное сопротивление материала балки.

По условию прочности можно решить три типа задач. Наибольший интерес представляет проектная задача, т.е. определение требуемого момента сопротивления поперечного сечения балки:

$$W_x = \frac{M_{\max}}{R}$$

б) Расчет по наибольшим касательным напряжениям, используется условие прочности в виде:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} S_{x,\max}^{\text{отс.}}}{I_x b} \leq R_s,$$

где  $Q_{\max}$  – наибольшая поперечная сила (устанавливается по эп. Q);

$S_{x,\max}^{\text{отс.}}$  – статический момент отсеченной части поперечного сечения относительно нейтральной оси X;  $I_x$  – осевой момент инерции поперечного сечения балки относительно главной центральной оси X;  $b$  – ширина поперечного сечения балки на уровне точек, в которых определяется  $\tau$ .

Обычно расчет по  $\tau_{\max}$  сводится к проверке прочности балок, а условия прочности составляют для опасных точек опасных поперечных сечений. Опасными сечениями являются те сечения, в которых действуют наибольшие поперечные силы ( $Q$ ), а опасные точки – это точки поперечного сечения, расположенные на нейтральной оси  $X$ . В тех случаях, когда условие прочности не выполняется (перенапряжение  $> (2+5)\%$ ), поперечное сечение следует увеличить.

в) Расчет на прочность по главным напряжениям. Проверка прочности балок по главным напряжениям сводится к составлению условий прочности с использованием одной из теорий прочности. Для балок, выполненных из пластичных материалов, применяют третью или, чаще всего, четвертую теорию прочности, которая является наиболее экономичной. Так, условия прочности по третьей и четвертой теориям прочности имеют вид:

$$\sigma_y = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R;$$

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma^2 + 3\tau^2} \leq R,$$

где  $\sigma_y, \sigma_x$  – расчетные (или эквивалентные –  $\sigma_{\text{экв}}^{\text{III}}, \sigma_{\text{экв}}^{\text{IV}}$ ) напряжения для проверяемых точек сечений;  $\sigma, \tau$  – нормальные и касательные напряжения для соответствующих точек.

По главным напряжениям следует проверять те сечения, в которых одновременно действуют наибольшие, или близкие к ним, поперечные силы  $Q$  и изгибающие моменты  $M$ . Опасными точками таких сечений являются, обычно, точки, расположенные в местах резкого изменения ширины поперечных сечений. Так, например, в двутаврах, швеллерах – это точки примыкания полок к стенкам, ширина ( $b$ ) которых на порядок меньше ширины полок.

### 1.3 Расчет балок на жесткость

При проверке балок на жесткость используется условие жесткости:

$$y_{\max} \leq [f] ; \quad [f] = \frac{l}{k},$$

где  $y_{\max}$  – максимальный прогиб балки в пролете, консолей и т.д.;

$[f]$  – допускаемая величина прогиба;  $l$  – длина проверяемых участков балки;  $k$  – коэффициент, величина которого задается нормами ( $k=100; 200; 400; 500; 1000$ ).

Для определения перемещений балок или при построении их эпюр целесообразнее использовать универсальный метод, т.е.

$$EI_x y = EI_x y_0 + EI_x \theta_0 z + \sum m \frac{(z-a)^2}{2} + \sum F \frac{(z-b)^3}{6} + \sum q \frac{(z-c)^4}{24} - \sum q \frac{(z-d)^4}{24};$$

$$EI_x \theta = EI_x \theta_0 + \sum m \cdot (z-a) + \sum F \frac{(z-b)^2}{2} + \sum q \frac{(z-c)^3}{6} - \sum q \frac{(z-d)^3}{6},$$

где  $y_0, \theta_0$  – начальные параметры, т.е. прогиб и угол поворота сечения, расположенного в начале координат, т.О. Начало координат чаще всего располагают на левом конце балки в центре тяжести поперечного сечения;  $z$  – расстояние от

начала координат (т.О) до сечения, для которого определяются  $y, \theta$ ;  $a, b, c, d$  – расстояния от начала координат до сечений, в которых приложены соответственно:  $m, F, q, -q$ .

#### 1.4 Вопросы для самопроверки

1. В чем состоит сущность методов расчета по допускаемым напряжениям, разрушающим нагрузкам и по предельным состояниям?
2. Что понимают под пластическим шарниром и пластическим моментом сопротивления, как определяется его величина?
3. Какие сечения и точки в сечении считаются опасными при расчете балок на прочность: а) по нормальным напряжениям, б) по касательным напряжениям, в) по главным напряжениям?
4. Какие поперечные сечения балок являются более рациональными?
5. Что понимают под упругой линией балки (или изогнутой осью балки)?
6. Какие известны методы определения перемещений балок?
7. Какой вид имеет приближенное дифференциальное уравнение упругой линии балки?
8. Какой вид имеет универсальное уравнение изогнутой оси балки?
9. Что понимают под начальными параметрами? Как определяется их величина?
10. Как осуществляется расчет балок на жесткость?
11. Какая существует связь эпюры прогибов и эпюры моментов?
12. Как определяются аналитически максимальные моменты и прогибы балок?

#### 1.5 Задание по расчетно-проектировочной работе №4

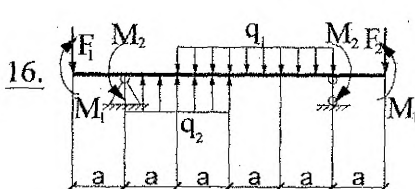
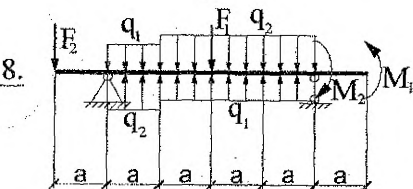
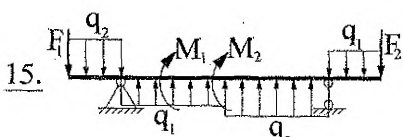
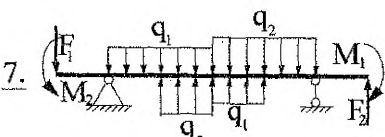
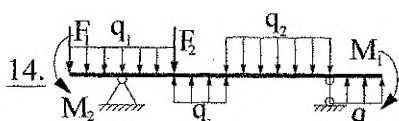
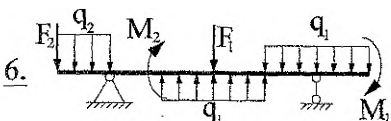
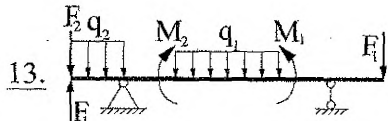
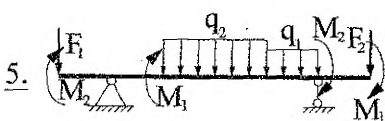
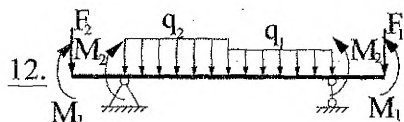
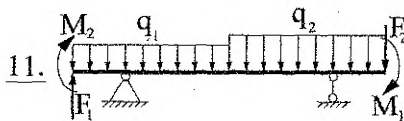
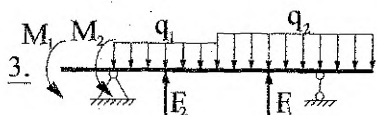
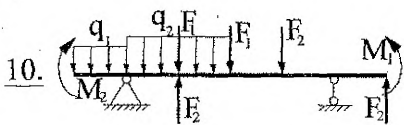
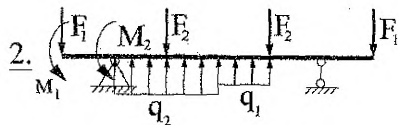
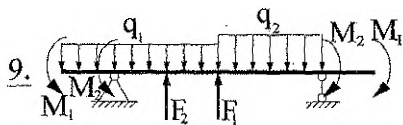
##### “Расчет статически определимой двутавровой балки на прочность и жесткость”

Дано: двутавровая балка (принять по номеру схемы) загружена внешней нагрузкой (числовые данные принять с учетом номера варианта). Расчетное сопротивление материала балки  $R=210$  МПа,  $R_s=120$  МПа; модуль продольной упругости  $E=200$  ГПа; допускаемый прогиб  $[f/l]=1/500$  и  $1/100$  для консолей.

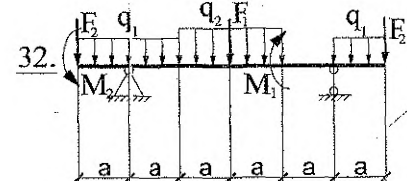
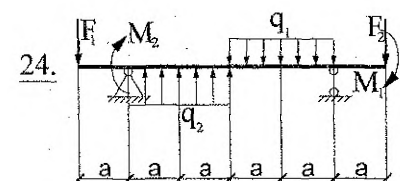
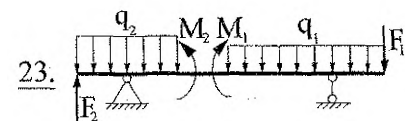
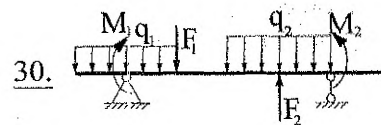
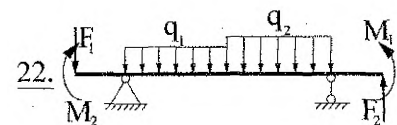
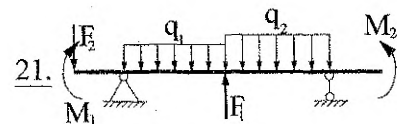
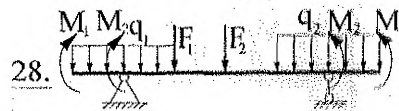
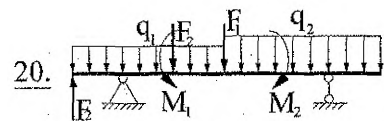
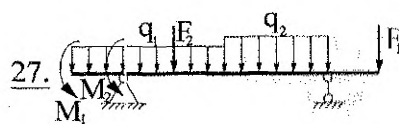
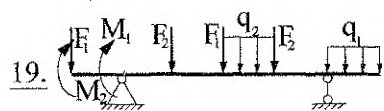
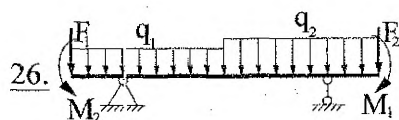
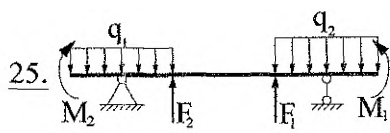
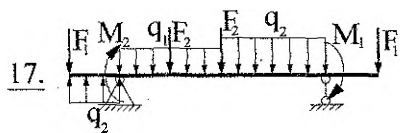
Требуется:

- 1) определить опорные реакции;
- 2) построить эпюры поперечных сил и изгибающих моментов ( $Q, M$ );
- 3) подобрать сечение балки и проверить прочность по касательным и главным напряжениям с использованием третьей теории прочности;
- 4) определить главные напряжения для одной из опасных точек (т.2);
- 5) построить эпюры нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям;
- 6) построить эпюру прогибов балки, определив прогибы трех сечений в пролете и консолей;
- 7) проверить балку на жесткость;
- 8) проверить правильность построения эпюр  $Q, M, Y$  с помощью ЭВМ с применением распечатки.

### 1.6 Схемы двутавровых балок с нагрузками



Продолжение схем балок





### 1.7 Числовые значения нагрузок для балок

Номер варианта	Размер а, м	Нагрузка			Индекс нагрузки		
		q, кН/м	F, кН	M, кНм	q	F	M
1	0,9	30	110	40	2	1,2	2
2	1,1	40	100	30	2	1	1
3	1,0	32	120	34	1	1	1,2
4	0,8	34	90	36	1,2	2	1
5	1,1	30	70	32	2	1	2
6	1,0	36	80	38	1	2	1,2
7	1,2	38	90	28	1,2	1	1
8	0,9	40	100	30	2	2	2
9	1,0	30	110	32	1,2	1	1,2
10	1,1	40	80	30	1	2	2
11	0,9	34	90	40	2	1	1
12	1,2	36	65	38	1,2	2	1
13	1,1	38	70	32	1	1	2
14	0,9	40	75	30	2	2	1
15	1,2	42	80	28	1	1	1,2
16	1,1	44	60	34	1,2	2	1
17	1,0	32	70	42	2	2	2
18	0,8	42	80	40	1,2	1	1,2
19	0,9	34	90	32	1	2	2
20	1,1	36	100	36	1	1	1
21	0,8	30	110	28	2	2	2
22	0,9	38	120	30	2	1	1
23	1,0	40	95	42	1	2	1,2
24	1,1	32	110	28	1,2	2	1
25	1,2	34	105	40	1	1	2
26	1,1	38	110	30	2	1	1,2
27	1,2	40	80	40	1	2	1
28	0,8	34	90	36	2	1	2
29	0,9	30	100	38	1	2	1
30	1,0	32	110	32	1,2	1	1,2
31	1,1	50	90	40	1	2	2
32	0,8	45	60	30	2	1	1
33	0,9	40	70	35	1,2	2	1
34	0,8	50	80	32	1	2	2
35	1,0	44	120	30	2	1	1
36	1,1	30	140	36	1,2	2	2
37	0,9	34	70	38	2	1	2
38	1,1	32	110	28	1	2	1
39	1,0	40	80	40	1,2	2	1
40	0,8	36	70	50	2	1	1,2

### 1.8 Пример расчета двутавровой балки на прочность и жесткость

Дано: двутавровая балка (рис. 1.1) загружена сосредоточенной силой  $F=40$  кН, моментом  $m=50$  кНм и распределенной нагрузкой  $q=30$  кН/м. Расчетное сопротивление материала балки  $R=210$  МПа,  $R_s=120$  МПа; модуль продольной упругости  $E=200$  ГПа; допустимый прогиб  $[f/l]=1/500$  и  $1/100$  для консолей.

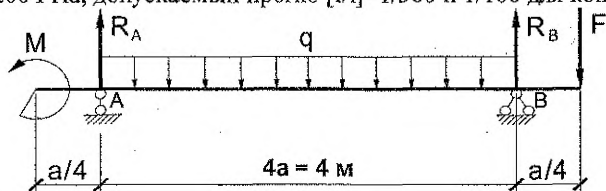


Рисунок 1.1 – Расчетная схема балки и нагрузки

Требуется: (см. п.п. 1-8)

#### Решение

#### 1. Определение опорных реакций

Составим уравнения статического равновесия:

$$\sum m_A = 0; 4,25 \cdot Fa + 8qa^2 - m - 4R_B a = 0; R_B = \frac{4,25 \cdot Fa + 8 \cdot qa^2 - m}{4a};$$

$$R_B = 90 \text{ кН.}$$

$$\sum m_B = 0; -m - 8qa^2 + Fa + 4R_A a = 0; R_A = \frac{m + 8 \cdot qa^2 - Fa}{4a};$$

$$R_A = 70 \text{ кН.}$$

Проверка:

$$\sum Y = 0; R_A + R_B - 4qa - F = 0; 70 + 90 - 120 - 40 = 160 - 160 = 0$$

#### 2. Построение эпюр Q, M

Определяем значения Q, M в характерных сечениях балки.

$$Q_0 = 0; Q_{A(\text{лев})} = 0; Q_{A(\text{пр.})} = R_A = 70 \text{ кН}; Q_C = F = 40 \text{ кН};$$

$$M_0 = -m = -50 \text{ кНм}; M_A = -m = -50 \text{ кНм}; M_C = 0; M_B = -F \cdot a/4 = -40 \cdot 0,25 = -10 \text{ кНм}$$

Определим положение сечения ( $z_0$ ), в котором  $Q=0$ .

$$Q_{z_0} = R_A - qz_0 = 0; z_0 = \frac{R_A}{q} = \frac{70}{30} = 2,33 \text{ м}$$

Тогда величина максимального момента для сечения ( $z_0$ ) будет равна:

$$M_{\max} = -m + R_A z_0 - q \frac{z_0^2}{2} = -50 + 70 \cdot 2,33 - 30 \frac{2,33^2}{2} = 32 \text{ кНм}$$

#### 3. Подбор сечения балки и проверка на прочность

Сечение подбираем из условия прочности по нормальным напряжениям:

$$\sigma_{\max} = \frac{M_{\max}}{W_x} \leq R$$

$$\text{Требуемый момент сопротивления равен: } W_x = \frac{M_{\max}}{R} = \frac{50 \cdot 10^3}{210 \cdot 10^6} = 238 \text{ см}^3$$

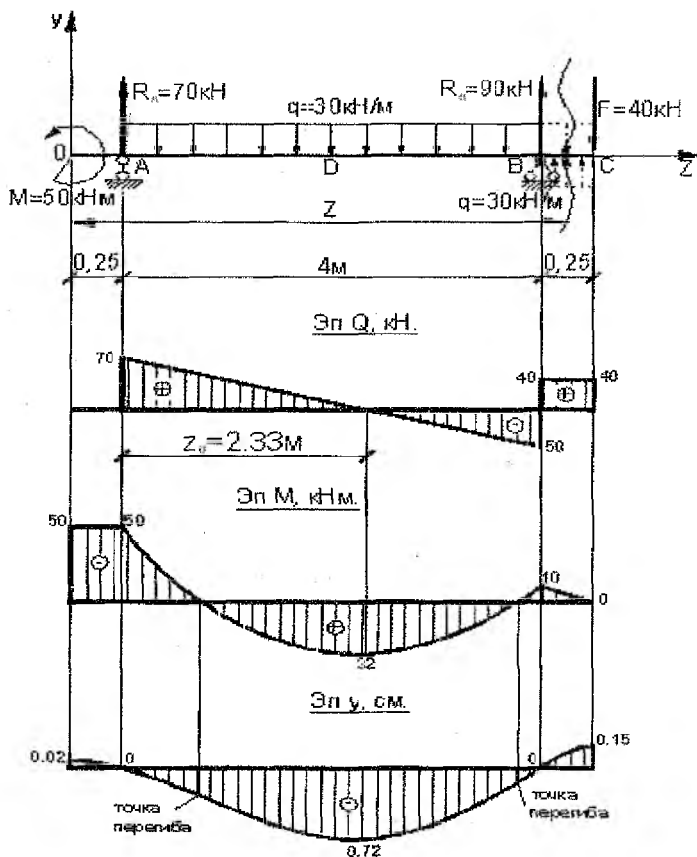
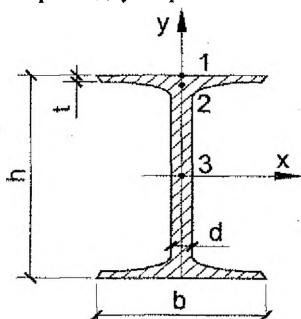


Рисунок 1.2 – Эпюры поперечных сил, изгибающих моментов, прогибов

По таблицам прокатных профилей  
выбираем двутавр I N22

Геометрические характеристики  
принятого двутавра I N22:



- $h = 22 \text{ см};$
- $b = 12 \text{ см};$
- $t = 0.89 \text{ см};$
- $d = 0.54 \text{ см};$
- $I_x = 2790 \text{ см}^4;$
- $W_x = 254 \text{ см}^3;$
- $S_{x, \text{max}}^{\text{отс}} = 143 \text{ см}^3.$

Рисунок 1.3 – Схема двутавра

Проверка прочности балки по касательным напряжениям в точке 3 (см. рис. 1.3) сечения А справа, где  $Q_{\max}=70$  кН.

$$\tau_{\max} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 143 \cdot 10^{-6}}{2790 \cdot 10^{-8} \cdot 0.54 \cdot 10^{-2}} = 66.4 \cdot 10^6 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = 66.4 \cdot 10^6 \text{ МПа} < R_s = 120 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

Проверка прочности балки по главным напряжениям, используя третью теорию прочности.

Проверку производим для точек примыкания полки двутавра к стенке (точка 2 см. рис. 1.3), в сечении А справа, где  $Q_A=70$  кН;  $M_A=50$  кНм.

Условие прочности по третьей теории прочности имеет вид:

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} \leq R$$

Для точки 2  $y_2 = \frac{h}{2} - t = \frac{22}{2} - 0.89 = 10.11 \text{ см};$

$$S_{x,2}^{\text{отс}} = b \cdot t \cdot \frac{h-t}{2} = 12 \cdot 0.89 \cdot \frac{22-0.89}{2} = 112.7 \text{ см}^3;$$

$$\sigma_2 = \frac{M_A \cdot y_2}{I_x} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 10.11 \cdot 10^{-2}}{2790 \cdot 10^{-8}} = 181.2 \text{ МПа};$$

$$\tau_2 = \frac{Q_A \cdot S_{x,2}^{\text{отс}}}{I_x \cdot d} = \frac{50 \cdot 10^3 \cdot 112.7 \cdot 10^{-6}}{2790 \cdot 10^{-8} \cdot 0.54 \cdot 10^{-2}} = 52.4 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{\text{в}} = \sqrt{181.2^2 + 4 \cdot 52.4^2} = 209.5 \text{ МПа} < R = 210 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по главным напряжениям выполняется.

#### 4. Определение главных напряжений для одной из опасных точек опасного сечения графическим путем

Покажем напряженное состояние в точке 2 сечения А (справа).

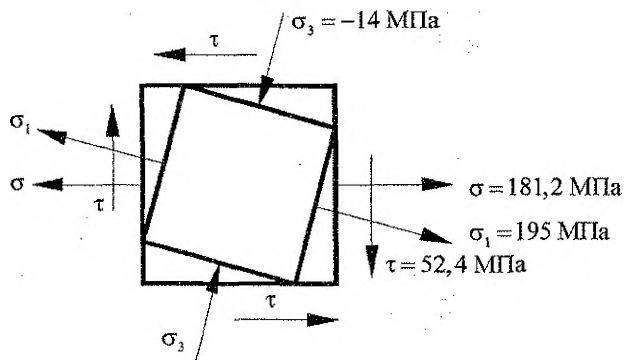


Рисунок 1.4 – Напряженное состояние в точке 2

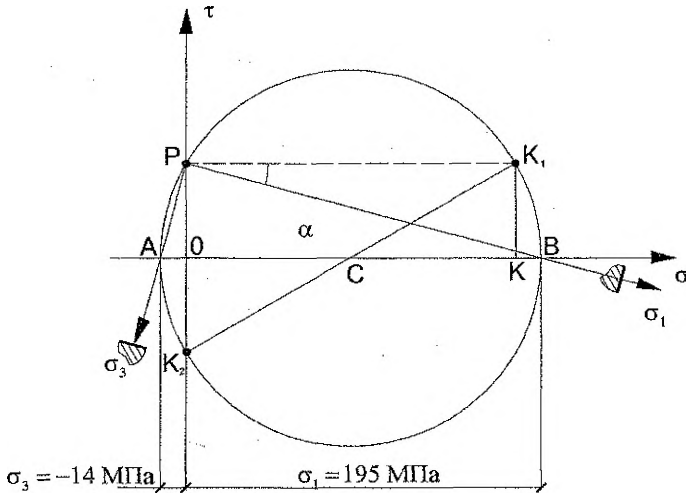


Рисунок 1.5 – Круг Мора

В системе координат  $\tau$ - $\sigma$  (рис. 1.5) откладываем в масштабе отрезки:  $OK = \sigma = 181,2$  МПа;  $KK_1 = \tau = 52,4$  МПа,  $OK_2 = -52,4$  МПа. Соединив точки  $K_1$  и  $K_2$ , получим диаметр искомого круга напряжений с центром в точке  $C$ , на котором описываем окружность. Пересечение круга с осью  $\sigma$  даёт две точки  $A$  и  $B$ , которые характеризуют главные напряжения. Так, отрезок  $OB$  в масштабе представляет  $\sigma_1 = 195$  МПа, а  $OA - \sigma_3 = -14$  МПа. Проведя прямые через точки  $K_1$  и  $K_2$  до их пересечения, находим полюс  $P$ . Соединив точки  $P$  и  $B$ , получим направление действия напряжения  $\sigma_1$ , а точки  $P$  и  $A$  – направление действия  $\sigma_3$ . Переносим параллельно направлению действия напряжений  $\sigma_1$  и  $\sigma_3$  на элемент, представленный на рис. 1.4 и покажем положение главных площадок, которые перпендикулярны к соответствующим напряжениям  $\sigma_1$ ,  $\sigma_3$ .

### 5. Построение эпюр нормальных, касательных, главных и экстремальных касательных напряжений для опасного сечения по главным напряжениям

При определении величины главных напряжений и экстремальных касательных напряжений воспользуемся теорией плоского напряженного состояния.

$$\left. \begin{matrix} \sigma_1 \\ \sigma_3 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} (\sigma \pm \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}); \quad \tau_{\max, \min} = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2} = \pm \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2},$$

где  $\sigma$  и  $\tau$  определяем по известным формулам для соответствующих точек сечения:

$$\sigma = -\frac{M_x}{I_x} \cdot y; \quad \tau = \frac{Q \cdot S_x^{\text{отс}}}{I_x \cdot b}$$

При этом  $Q$ ,  $M$ ,  $y$  необходимо подставить в формулы с учетом их знаков.

$$\text{Точка 1:} \quad \sigma = -\frac{M_x}{W_x} = \frac{50 \cdot 10^3}{254 \cdot 10^{-6}} = 196,8 \text{ МПа;}$$

$$\tau = 0 \text{ т.к. } S_{X'}^{отс} = 0; \sigma_1 = 196,8 \text{ МПа};$$

$$\sigma_3 = 0; \tau_{\max, \min} = \pm \frac{\sigma_1}{2} = \pm 98,4 \text{ МПа};$$

$$\text{Точка 2: } \sigma = \frac{50 \cdot 10^3}{2790 \cdot 10^{-8}} \cdot 10,11 \cdot 10^{-2} = 181,2 \text{ МПа};$$

$$\tau^{\text{полк}} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 112,7 \cdot 10^{-6}}{2790 \cdot 10^{-8} \cdot 12 \cdot 10^{-2}} = 2,4 \text{ МПа};$$

$$\tau^{\text{ст}} = \frac{70 \cdot 10^3 \cdot 112,7 \cdot 10^{-6}}{2790 \cdot 10^{-8} \cdot 0,54 \cdot 10^{-2}} = 52,4 \text{ МПа}$$

Дальнейший ход вычислений сводим в таблицу 1 и по полученным результатам строим эпюры напряжений (рис. 1.6).

Таблица 1

Точка сечения	У см	$S_{X,2}^{отс}$ см <sup>3</sup>	$\sigma$ МПа	$\tau$ МПа	$\sqrt{\sigma^2 + 4\tau^2}$ МПа	$\sigma_1$ МПа	$\sigma_3$ МПа	$\tau_{\max, \min}$ МПа
1	11	0	196,8	0	196,8	196,8	0	$\pm 98,4$
2	полка	10,11	181,2	2,4	181,5	181,4	-0,15	$\pm 90,8$
	стенка	10,11	181,2	52,4	209,5	195,4	-14,2	$\pm 104,8$
3	0	143	0	66,4	132,8	66,4	-66,4	$\pm 66,4$
2'	полка	-10,11	-181,2	2,4	181,5	0,15	-181,4	$\pm 90,8$
	стенка	-10,11	-181,2	52,4	209,5	14,2	-195,4	$\pm 104,8$
1'	11	0	-196,8	0	196,8	0	-196,8	$\pm 98,4$

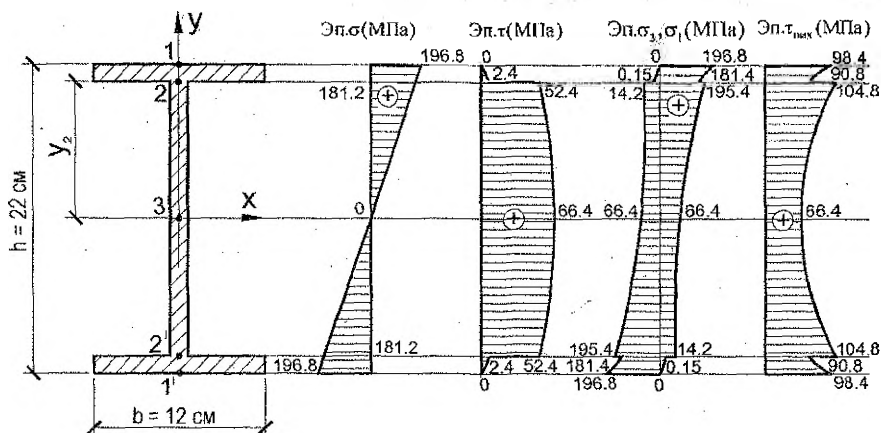


Рисунок 1.6 – Эпюры напряжений в сечении А (справа)

## 6. Построение эпюры прогибов балки

Начало координат выбираем на левом конце балки (т. О). Продлим равномерно распределенную нагрузку  $q$  до правого конца балки и уравновесим её компенсирующей распределённой нагрузкой обратного направления (см. рис. 1.2).

Составим универсальное уравнение прогибов для последнего силового участка ВС.

$$E \cdot I_X \cdot Y_Z = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot z - \frac{m \cdot z^2}{2} + \frac{R_A \cdot (z - 0,25a)^3}{6} - \frac{q \cdot (z - 0,25a)^4}{24} + \frac{R_B \cdot (z - 4,25a)^3}{6} + \frac{q \cdot (z - 4,25a)^4}{24},$$

где  $\theta_O$  и  $Y_O$  начальные параметры (угол поворота и прогиб сечения в начале координат), которые определим из условий для опорных сечений:

При  $z = 0,25a$ ,  $Y_A = 0$

$$E \cdot I_X \cdot Y_A = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 0,25a - \frac{m \cdot (0,25a)^2}{2} = 0;$$

при  $z = 4,25a$ ,  $Y_B = 0$ ,

$$E \cdot I_X \cdot Y_B = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 4,25a - \frac{m \cdot (4,25a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4a)^4}{24} = 0.$$

Решаем систему уравнения:  $Y_A = 0$ ;  $Y_B = 0$ .

$$\begin{cases} E \cdot I_X \cdot Y_O + 0,25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O - \frac{50 \cdot 0,25^2}{2} = 0; \\ E \cdot I_X \cdot Y_O + 4,25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O - \frac{50 \cdot 4,25^2}{2} + \frac{70 \cdot 4^3}{6} - \frac{30 \cdot 4^4}{24} = 0. \end{cases}$$

После упрощения получим:

$$\begin{cases} E \cdot I_X \cdot Y_O + 0,25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O = 1,5625 \text{ кНм}^3; \\ E \cdot I_X \cdot Y_O + 4,25 \cdot E \cdot I_X \cdot \theta_O = 24,8965 \text{ кНм}^3. \end{cases}$$

Тогда

$$E \cdot I_X \cdot \theta_O = 5,8335 \text{ кНм}^2; \quad E \cdot I_X \cdot Y_O = 0,1041 \text{ кНм}^3.$$

Проверка:

$$E \cdot I_X \cdot Y_A = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 0,25a - \frac{m \cdot (0,25a)^2}{2} = 1,5625 - 1,5625 = 0;$$

$$E \cdot I_X \cdot Y_B = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 4,25a - \frac{m \cdot (4,25a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4a)^4}{24} =$$

$$= 771,5631 - 771,5625 \approx 0.$$

Для построения эпюры прогибов балки, в нашем случае, вычислим прогибы только следующих сечений:

В сечении O, ( $z = 0$ )

$$E \cdot I_X \cdot Y_O = 0,1041 \text{ кНм}^3; \quad E \cdot I_X = 2 \cdot 10^{11} \cdot 2790 \cdot 10^{-8} = 5580 \text{ кНм}^3.$$

$$Y_O = \frac{0,1041}{5580} = 0,02 \text{ мм}$$

В сечении A, ( $Z = a/4$ ),  $Y_A = 0$ . В сечении D, (середина пролета,  $Z = 2,25a$ ).

$$E \cdot I_X \cdot Y_D = E \cdot I_X \cdot Y_O + E \cdot I_X \cdot \theta_O \cdot 2,25a - \frac{m \cdot (2,25a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (2a)^3}{6} - \frac{q \cdot (2a)^4}{24} = -40 \text{ кНм}^3;$$

$$Y_D = -\frac{40}{5580} = -0,72 \text{ см}$$

В сечении В, ( $Z = 4,25a$ ),  $Y_B = 0$ . В сечении С, ( $Z = 4,5a$ ).

$$E \cdot I_x \cdot Y_C = E \cdot I_x \cdot Y_0 + E \cdot I_x \cdot \theta_0 \cdot 4,5a - \frac{m \cdot (4,5a)^2}{2} + \frac{R_A \cdot (4,25a)^3}{6} - \frac{q \cdot (4,25a)^4}{24} + \frac{R_B \cdot (0,25a)^3}{6} + \frac{q \cdot (0,25a)^4}{24} = 0,1041 + 5,8335 \cdot 4,5 - \frac{50 \cdot 4,5^2}{2} + \frac{70 \cdot 4,25^3}{6} - \frac{30 \cdot 4,25^4}{24} + \frac{90 \cdot 0,25^3}{6} + \frac{30 \cdot 0,25^4}{24} = 812 \text{ кНм}^3;$$

$$Y_C = \frac{812}{5580} = 0,15 \text{ см}$$

По данным расчёта построена эпюра прогибов балки (см. рис. 1.2).

Примечание. В расчетно-проектировочной работе необходимо еще определить прогибы двух сечений в пролете балки, т.е. при  $Z = 2a$ ;  $Z = 4a$ , для более точного построения эпюры прогибов.

## 7. Проверка балки на жёсткость

В пролёте:  $l = 4a = 4 \text{ м}$ ;

$$\frac{Y_D}{l} = \frac{0,72}{400} = \frac{1}{555} < \left[ \frac{f}{l} \right] = \frac{1}{500}$$

На правой консоли:  $l = \frac{a}{4} = 0,25 \text{ м}$ ;

$$\frac{Y_C}{l} = \frac{0,15}{25} = \frac{1}{167} < \left[ \frac{f}{l} \right] = \frac{1}{100}$$

Условие жёсткости выполняется. Окончательно принимаем двутавр №22.

## 8. Определение коэффициентов запаса по прочности и жёсткости

Запас по напряжениям:

- по нормальным напряжениям  $K_{\sigma} = \frac{R}{\sigma_{\max}} = \frac{210}{196,8} = 1,07;$

- по касательным напряжениям  $K_{\tau} = \frac{R_s}{\tau_{\max}} = \frac{120}{66,4} = 1,81;$

- по главным напряжениям  $K_{\sigma_{\tau_3}} = \frac{R}{\sigma_{\tau_3}} = \frac{210}{209,5} = 1,00.$

Запас по жёсткости:  $K_{Y_D} = \frac{[Y_D]}{Y_D} = \frac{0,8}{0,72} = 1,1;$

$$K_{Y_C} = \frac{[Y_C]}{Y_C} = \frac{0,25}{0,15} = 1,67;$$

где  $[Y_D] = \frac{l}{500} = 0,8 \text{ см}$ ,  $[Y_C] = \frac{l}{100} = 0,25 \text{ см}$ .



## 2. СЛОЖНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ

### 2.1 Общие сведения

В реальных конструкциях часто встречаются случаи, когда в поперечных сечениях действуют два или более внутренних силовых фактора, вызывающих два или более простых вида деформации. В таких случаях элементы конструкций испытывают сложное сопротивление (сложную деформацию). Имеют место следующие виды сложного сопротивления: косоу изгиб; внецентренное сжатие (растяжение); кручение с изгибом и др.

### 2.2 Косоу изгиб

Косоу изгиб возникает тогда, когда силовая плоскость, проходящая через продольную ось бруса, не совпадает ни с одной из главных осей инерции поперечного сечения, или одновременное сочетание двух прямых изгибов, действующих во взаимно перпендикулярных плоскостях.

При поперечном косоу изгибе в поперечных сечениях балок действуют четыре внутренних силовых фактора: поперечные силы  $Q_x$ ,  $Q_y$  и изгибающие моменты  $M_x$ ,  $M_y$ . Однако, как правило, влияние поперечных сил незначительно и в расчетах ими пренебрегают. При определении напряжений и перемещений при косоу изгибе используют принцип независимости действия сил. Так, суммарные нормальные напряжения определяют по следующей формуле:

$$\sigma = \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \pm(M_x / I_x)y \pm (M_y / I_y)x,$$

где:  $M_x$ ,  $M_y$  – изгибающие моменты;  $x, y$  – координаты точек, в которых определяется  $\sigma$ ;  $I_x$ ,  $I_y$  – главные центральные моменты инерции поперечного сечения. Знаки слагаемых напряжений целесообразнее устанавливать исходя из характера деформирования продольных слоёв балки.

Расчет на прочность при косоу изгибе сводится к составлению условия прочности для опасного сечения балки:

$$\sigma_{\max/\min} = \pm \frac{M_x}{W_x} \pm \frac{M_y}{W_y} \leq R,$$

где:  $W_x$ ,  $W_y$  – осевые моменты сопротивления поперечного сечения при изгибе;  $R$  – расчетное сопротивление материала балки на растяжение и сжатие.

По условию прочности, как обычно, можно решить три типа задач. Наибольший интерес представляет проектная задача, т.к. в условии прочности входит две неизвестные величины:  $W_x$ ,  $W_y$ . Поэтому при решении проектной задачи предварительно задаются соотношением  $k = W_x / W_y$ . Тогда, условие прочности примет вид:

$$\sigma_{\max} = \frac{1}{W_y} (M_x + kM_y) \leq R,$$

отсюда

$$W_x = (M_x + kM_y) / R; \quad W_y = \frac{W_x}{k} = \frac{M_x + kM_y}{kR}$$

При этом, коэффициент соотношения осевых моментов сопротивления поперечного сечения зависит от формы сечения. Так, например, для прямоугольного сечения  $k=h/b$ , для двутавровых  $k=8÷10$ ; швеллеров  $K=6÷9$  и т.д.

### 2.3 Внецентренное сжатие

Внецентренное сжатие (растяжение) возникает в том случае, когда брус нагружен в продольном направлении силой, приложенной внецентренно, т.е. на некотором расстоянии от центра тяжести поперечного сечения. Деформация внецентренного сжатия является более характерной для элементов строительных конструкций.

В любом поперечном сечении бруса при внецентренном сжатии возникают три внутренних силовых фактора:

$$N=-F; \quad M_x = F \cdot y_F; \quad M_y = F \cdot x_F,$$

где  $x_F, y_F$  — координаты точки приложения внешней силы.

Следовательно, общий случай внецентренного сжатия сводится к центральному сжатию ( $N$ ) и чистому косому изгибу ( $M_x, M_y$ ), который, как описано в пункте 2.2, можно представить в виде двух чистых прямых изгибов, действующих во взаимно перпендикулярных плоскостях. С учетом принципа независимости действия сил, нормальные напряжения в поперечном сечении бруса равны алгебраической сумме напряжений от каждого внутреннего силового фактора:

$$\sigma = \sigma_N + \sigma_{M_x} + \sigma_{M_y} = \frac{N}{A} + \frac{M_x y}{I_x} + \frac{M_y x}{I_y},$$

Данная формула позволяет определить напряжения в любой точке поперечного сечения, характеризуемой координатами:  $x, y$ . Путем преобразования полученную формулу для определения напряжений можно представить в виде

$$\sigma = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right),$$

где  $F$  — внешняя нагрузка (при внецентренном сжатии следует приписывать знак “-”, а при внецентренном растяжении — “+”);  $i_x^2, i_y^2$  — квадраты главных радиусов инерции поперечного сечения;  $x, y$  — координаты точки в которой определяется напряжение;  $x_F, y_F$  — координаты точки приложения внешней нагрузки. При этом координаты точек:  $x, y, x_F, y_F$  следует учитывать с их знаками.

Расчет на прочность при внецентренном сжатии сводится к составлению условия прочности для опасных точек поперечного сечения. Положения опасных точек определяются при помощи нулевой линии, т.е. линии в точках которой нормальные напряжения ( $\sigma$ ) равны нулю. Для определения положения нулевой линии вычисляют отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат:

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F}; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F}.$$

По полученным отрезкам изображают в сечении нулевую линию, а проведя две касательные к сечению параллельно нулевой линии, находят две наибо-

лее напряженные (наиболее удаленные) точки поперечного сечения в растянутой и сжатой зонах, условия прочности для которых получают вид:

$$\sigma_{\max} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right) \leq R_p;$$

$$\sigma_{\min} = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x}{i_y^2} + \frac{y_F y}{i_x^2} \right) \leq R_c,$$

где  $x, y$  – координаты опасных точек сечения;  $R_p, R_c$  – расчетные сопротивления материала бруса на растяжение и сжатие соответственно. При решении проектной задачи (подбор сечений) в общем случае приходится пренебрегать либо деформацией центрального сжатия, либо деформацией чистого косоугольного изгиба из-за трудностей решения кубического уравнения. При этом полученные результаты округляют в большую сторону и окончательно проверяют по общему условию прочности. Но в тех случаях, когда можно выразить размеры поперечного сечения через один неизвестный параметр (например, “ $b$ ”), решение задачи несколько упрощается.

#### 2.4 Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под внецентренным сжатием (растяжением)?
2. Какие простые деформации возникают при внецентренном растяжении?
3. Что понимают под нулевой линией? Какие свойства нулевой линии?
4. Какие используют способы определения положения нулевой линии при внецентренном сжатии?
5. Как устанавливают опасные точки в сечениях при внецентренном сжатии?
6. Как производится расчет на прочность и подбор сечений?
7. Что понимают под ядром сечения. Способы его построения?
8. В каких случаях строят ядро сечения?

#### 2.5 Задание по расчетно-проектировочной работе №5

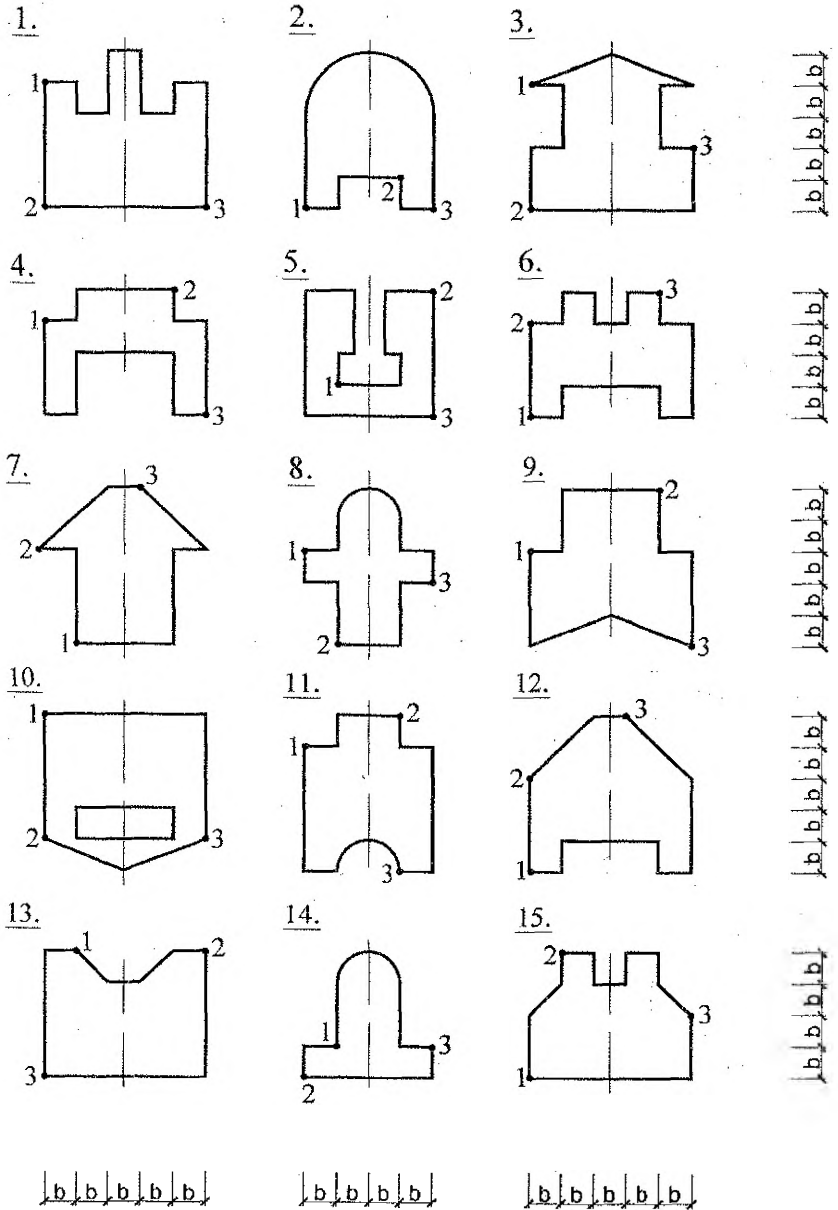
##### “Расчет внецентренно сжатой колонны”

Дано: колонна (принять по номеру схемы) сложной формы поперечного сечения подвергнута внецентренному сжатию внешней нагрузкой  $F$  (величину нагрузки и точку нагружения принять по номеру варианта). Расчетное сопротивление материала колонны на сжатие  $R_c=10$  МПа, на растяжение  $R_p=1$  МПа.

Требуется:

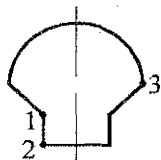
- 1) определить геометрические характеристики поперечного сечения колонны;
- 2) определить положение нулевой линии и опасных точек сечения;
- 3) вычислить наибольшие сжимающее и растягивающее напряжения;
- 4) подобрать размеры поперечного сечения из расчёта на прочность;
- 5) построить эпюры нормальных напряжений;
- 6) построить и исследовать ядро сечения;
- 7) проверить правильность построения ядра сечения с помощью ЭВМ.

2.6 Схемы поперечных сечений колонны с точками приложения F

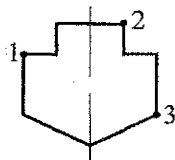


Продолжение схем поперечных сечений

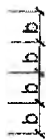
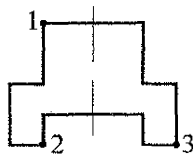
16.



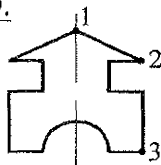
17.



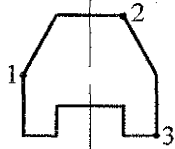
18.



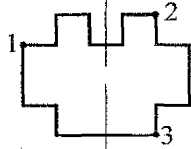
19.



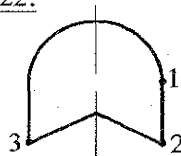
20.



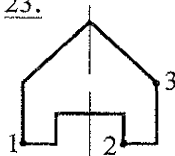
21.



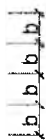
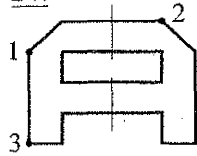
22.



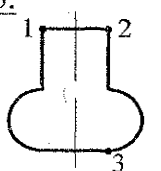
23.



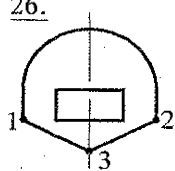
24.



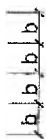
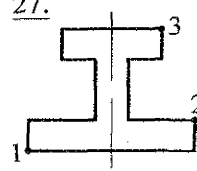
25.



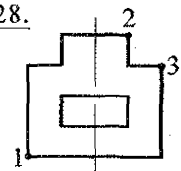
26.



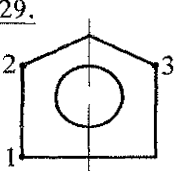
27.



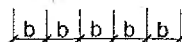
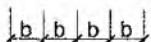
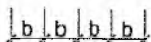
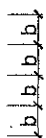
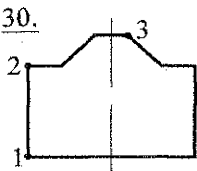
28.



29.



30.



## 2.7 Числовые значения нагрузок и точки их приложения

Номер варианта	F, кН	Точка приложения силы	Номер варианта	F, кН	Точка приложения силы
1	450	1	26	710	2
2	480	2	27	750	3
3	490	3	28	775	1
4	460	1	29	740	2
5	440	2	30	700	3
6	430	3	31	310	1
7	420	1	32	320	2
8	470	2	33	330	3
9	410	3	34	340	1
10	550	1	35	350	2
11	530	2	36	360	3
12	540	3	37	370	1
13	505	1	38	380	2
14	515	2	39	390	3
15	525	3	40	40	1
16	535	1	41	200	2
17	640	2	42	220	3
18	620	3	43	230	1
19	610	1	44	240	2
20	630	2	45	250	3
21	660	3	46	260	1
22	680	1	47	270	2
23	655	2	48	280	3
24	745	3	49	290	1
25	720	1	50	300	2

## 2.8 Пример расчета внецентренно сжатой колонны

Дано: колонна сложной формы поперечного сечения (схема №), подвергнута внецентренному сжатию внешней нагрузкой  $F=250$  кН (вариант №). Расчетное сопротивление материала колонны на сжатие  $R_c=10$  МПа, на растяжение  $R_p=1$  МПа.

Требуется: (см. п.п.1-7)

### Решение

#### 1. Определение геометрических характеристик поперечного сечения колонны

Покажем поперечное сечение колонны в масштабе и выберем вспомогательные оси координат X, Y. Разбиваем сечение на два простых и определим координаты центров тяжести простых сечений, их площади.

1. Для первого сечения (полукруг)

$$x_1 = 3b + \frac{4b}{3\pi} = 3,43b; \quad y_1 = 0; \quad A_1 = 1,57b^2.$$

2. Для второго сечения (прямоугольник)

$$x_2 = 1,5b; \quad y_2 = 0; \quad A_2 = 6b^2.$$

Ось X совпадает с осью симметрии сечения, следовательно, она является одной из главных центральных осей инерции.

Определим статический момент сечения относительно оси Y

$$S_y = S_y^I + S_y^{II} = A_1 x_1 + A_2 x_2 = 1,57b^2 \cdot 3,43b + 6b^2 \cdot 1,5b = 14,38b^3,$$

общая площадь

$$A = A_1 + A_2 = 1,57b^2 + 6b^2 = 7,57b^2.$$

Определим координату центра тяжести сечения  $x_c$

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{14,38b^3}{7,57b^2} = 1,9b.$$

Изобразим на схеме сечения главные центральные оси  $X_c, Y_c$  и определим координаты центров тяжести простых сечений относительно главных центральных осей

$$x_{c_1} = x_1 - x_c = 1,53b; \quad y_{c_1} = 0; \quad x_{c_2} = x_2 - x_c = -0,4b; \quad y_{c_2} = 0.$$

Вычислим главные центральные моменты инерции всего сечения

$$I_{X_c} = I_{X_c}^I + I_{X_c}^{II} = \frac{\pi(2b)^4}{128} + \frac{3b(2b)^3}{12} = 2,39b^4;$$

$$I_{Y_c} = I_{Y_c}^I + I_{Y_c}^{II} = I_{Y_c}^I + x_{c_1}^2 \cdot A_1 + I_{Y_c}^{II} + x_{c_2}^2 \cdot A_2 = 0,11b^4 + (1,53b)^2 \cdot 1,57b^2 + \frac{2b \cdot (3b)^3}{12} + (0,4b)^2 \cdot 6b^2 = 9,2b^4$$

Определим квадраты радиусов инерции

$$i_x^2 = \frac{I_{X_c}}{A} = \frac{2,39b^4}{7,57b^2} = 0,32b^2; \quad i_y^2 = \frac{I_{Y_c}}{A} = \frac{9,2b^4}{7,57b^2} = 1,22b^2.$$

## 2. Определение положения нулевой линии и опасных точек сечения.

Координаты точки приложения внешней нагрузки:  $x_F = -1,9b$ ;  $y_F = b$ . Вычислим отрезки, отсекаемые нулевой линией на осях координат

$$a_x = -\frac{i_y^2}{x_F} = \frac{1,22b^2}{1,90b} = 0,64b; \quad a_y = -\frac{i_x^2}{y_F} = -\frac{0,32b^2}{b} = -0,32b.$$

Нулевая линия показана на рис. 2.1.

Найдём положение опасных точек. Проведя касательные к сечению параллельно нулевой линии, устанавливаем, что наиболее напряжённые точки сечения, это точки F и D, которые наиболее удалены от нулевой линии. В точке F действует наибольшее сжимающее напряжение, а в точке D – наибольшее растягивающее.

## 3. Вычисление наибольших напряжений

Напряжения в опасных точках определим по следующим формулам

$$\sigma_F = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_F}{i_x^2} + \frac{x_F x_F}{i_y^2} \right); \quad \sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_D}{i_x^2} + \frac{x_F x_D}{i_y^2} \right),$$

где  $x_F = -1,9b$ ;  $y_F = b$ ;  $x_D = (3b - x_c) + b \cdot \cos \alpha$ ;  $y_D = -b \cdot \sin \alpha$ ;

$$\operatorname{tg} \alpha = \left| \frac{a_x}{a_y} \right| = \frac{0,64b}{0,32b} = 2; \quad \alpha = 63,4^\circ; \quad \cos \alpha = 0,447; \quad \sin \alpha = 0,894;$$

$$x_D = 1,1b + 0,447b = 1,547b; \quad y_D = -0,894b.$$

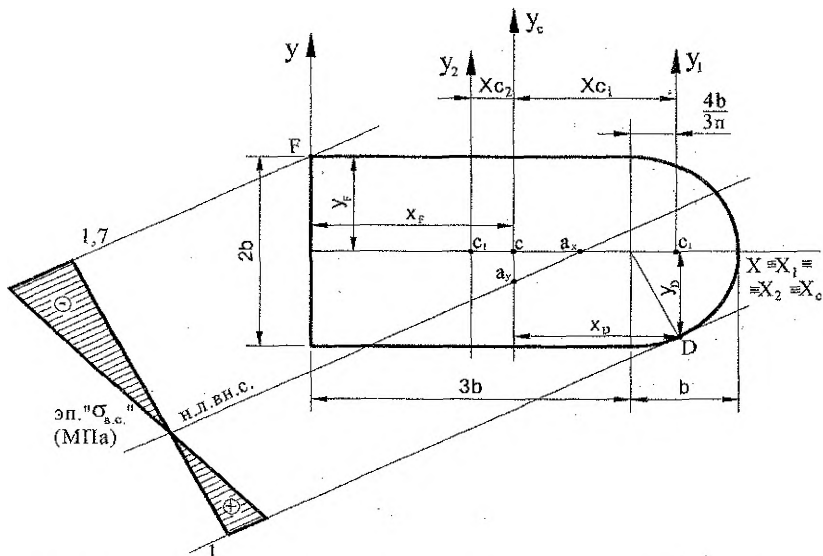


Рисунок 2.1 – Схема сечения колонны, нулевая линия и эпюра напряжений

#### 4. Подбор размеров поперечного сечения из расчёта на прочность

Составим условие прочности для опасной точки в сжатой области сечения.

$$\sigma_F = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F^2}{i_x^2} + \frac{x_F^2}{i_y^2} \right) \leq R_c;$$

Перепишем условие прочности следующим образом

$$\sigma_F = -\frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{1}{i_x^2} \left( y_F^2 + i_x^2 \frac{x_F^2}{i_y^2} \right) \right] \leq R_c$$

Обозначим  $k = \frac{i_x^2}{i_y^2} = \frac{0,32b^2}{1,22b^2} = 0,26,$

тогда  $\sigma_F = -\frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{1}{i_x^2} (y_F^2 + kx_F^2) \right] \leq R_c$

Перепишем через неизвестный параметр «b»

$$\sigma_F = -\frac{F}{7,57b^2} \left[ 1 + \frac{1}{0,32b^2} (b^2 + 0,26 \cdot 1,9^2 b^2) \right] \leq R_c;$$

$$\sigma_F = -\frac{F}{7,57b^2} 7,058 = -0,93 \frac{F}{b^2} \leq R_c,$$

$$b = \sqrt{\frac{0,93F}{R_c}} = \sqrt{\frac{0,93 \cdot 250 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^6}} = 15,3 \text{ см.}$$



Составим условие прочности для наиболее удалённой точки в растянутой области сечения

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_D}{i_x^2} + \frac{x_F x_D}{i_y^2} \right) \leq R_p.$$

Перепишем

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left[ 1 + \frac{1}{i_x^2} (y_F y_D + k \cdot x_F x_D) \right] \leq R_p,$$

$$\sigma_D = -\frac{F}{7,57 \cdot b^2} \left[ 1 + \frac{1}{0,32 \cdot b^2} \left( b \cdot (-0,894b) + +0,26 \cdot (-1,9b) \cdot 1,547b \right) \right] \leq R_p,$$

$$\sigma_D = \frac{F}{7,57b^2} \cdot 4,18 = 0,55 \frac{F}{b^2} \leq R_p, \text{ откуда}$$

$$b = \sqrt{\frac{0,55F}{R_p}} = \sqrt{\frac{0,55 \cdot 250 \cdot 10^3}{1 \cdot 10^6}} = 37,2 \text{ см.}$$

За расчётную величину принимаем большее значение  $b = 37,2$  см.

Определим напряжения в опасных точках сечения и выполним проверку прочности.

$$\sigma_F = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F^2}{i_x^2} + \frac{x_F^2}{i_y^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} \times \left( 1 + \frac{b^2}{0,32b^2} + \frac{(1,9b)^2}{1,22b^2} \right) =$$

$$= -1,7 \text{ МПа} < R_c = 10 \text{ МПа};$$

$$\sigma_D = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{y_F y_D}{i_x^2} + \frac{x_F x_D}{i_y^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} \times$$

$$\left( 1 + \frac{b(-0,894b)}{0,32b^2} + \frac{(-1,9b) \cdot 1,547b}{1,22b^2} \right) = 1 \text{ МПа} \leq R_p = 1 \text{ МПа.}$$

Эпюра напряжений при внецентренном сжатии показана на рис. 2.1.

## 5. Построение эпюры нормальных напряжений

Для построения эпюры  $\sigma$  воспользуемся графическим способом, построив предварительно эпюры  $\sigma$  для простых деформаций. Строим эпюры нормальных напряжений от чистых прямых изгибов относительно главных центральных осей  $X_c$  и  $Y_c$ . Величины напряжений от моментов  $M_x = F y_F$  и  $M_y = F x_F$  в точках сечения В, F, D, С равны соответственно:

$$\sigma_{M_x}^B = -\frac{F \cdot y_F}{I_x} y_B = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 37,2 \cdot (-37,2) \cdot 10^{-4}}{2,39 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_x}^F = -\sigma_{M_y}^B = -0,75 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_x}^D = -\frac{F \cdot y_F}{I_x} y_D = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 37,2 \cdot (-0,894) \cdot 10^{-4}}{2,39 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,57 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_y}^O = -\frac{F \cdot x_F}{I_y} x_0 = -\frac{250 \cdot 10^3 (-1,9) \cdot 37,2 \cdot 2,1 \cdot 37,2 \cdot 10^{-4}}{9,2 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,78 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_y}^F = -\frac{F \cdot x_F}{I_y} x_F = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot (-1,9)^2 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}}{9,2 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = -0,71 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{M_y}^D = -\frac{F \cdot x_F}{I_y} x_D = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot (-1,9) \cdot 37,2 \cdot 1,547 \cdot 37,2 \cdot 10^{-4}}{9,2 \cdot 37,2^4 \cdot 10^{-8}} = 0,57 \text{ МПа}.$$

Накладывая эпюр  $\sigma_{M_x}$  на эпюр  $\sigma_{M_y}$  находим нулевую точку  $i$ , соединив которую с центром тяжести поперечного сечения  $C$  получим положение нейтральной оси чистого косоугольного изгиба. Суммируя ординаты эпюр  $\sigma_{M_x}$  и  $\sigma_{M_y}$ , в точках  $F$  и  $D$  получим эпюру напряжений чистого косоугольного изгиба  $\sigma_{ч.к.и.}$  (см. рис. 2.2).

Строим эпюру нормальных напряжений от центрального сжатия, при котором  $N = -F$ .

$$\sigma_N = -\frac{F}{A} = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,24 \text{ МПа}.$$

Складывая эпюры  $\sigma_{ч.к.и.}$  и  $\sigma_N$  получаем эпюру нормальных напряжений от внецентренного сжатия (рис. 2.2). Через нулевую точку на эпюре  $\sigma_{в.с.}$  проводим нулевую линию при внецентренном сжатии параллельно нейтральной оси при чистом косоугольном изгибе. Для контроля необходимо сравнить эпюру  $\sigma_{в.с.}$  с эпюрой нормальных напряжений, полученную аналитически (рис. 2.1).

## 6. Построение и исследование ядра сечения

Для построения ядра сечения определим отрезки, отсекаемые нулевой линией:

1. Нулевая линия 1-1:  $a_x = -1,9b$ ;  $a_y = \infty$ .

Координаты точки приложения силы (точка 1):

$$x_{F_1} = -\frac{i_y^2}{a_x} = \frac{1,22b^2}{1,9b} = \frac{1,22 \cdot 37,2}{1,9} = 23,9 \text{ см}; \quad y_{F_1} = -\frac{i_x^2}{a_y} = 0.$$

2. Нулевая линия 2-2:  $a_x = \infty$ ;  $a_y = -b$

$$x_{F_2} = -\frac{i_y^2}{a_x} = 0; \quad y_{F_2} = -\frac{i_x^2}{a_y} = \frac{0,32 \cdot b^2}{b} = 12 \text{ см}.$$

3. Нулевая линия 3-3:  $a_x = 2,1b$ ;  $a_y = \infty$ ;

$$x_{F_3} = -\frac{i_y^2}{a_x} = -\frac{1,22b^2}{2,1b} = -0,58b = -21,6 \text{ см}.$$

4. Нулевая линия 4-4:  $a_x = \infty$ ;  $a_y = b$ ;

$$x_{F_4} = -\frac{i_y^2}{a_x} = 0; \quad y_{F_4} = -\frac{i_x^2}{a_y} = -\frac{0,32b^2}{b} = -12 \text{ см}.$$

Соединяя полученные точки прямыми или кривыми линиями, получаем ядро сечения (см. рис. 2.2).

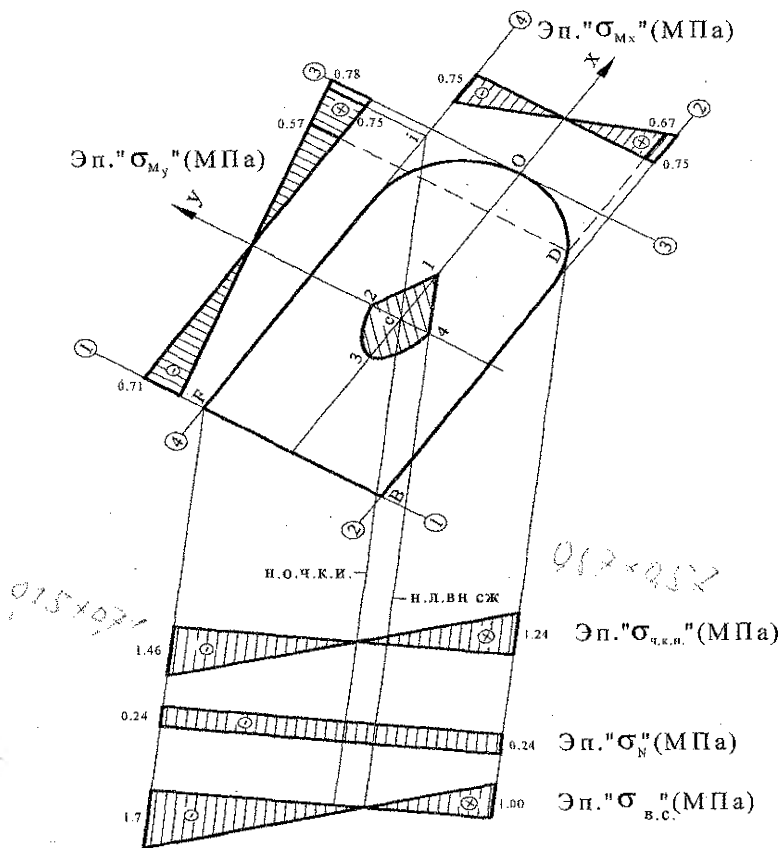


Рисунок 2.2 – Эпюры напряжений. Ядро сечения

Для исследования ядра сечения прикладываем силу поочередно в точках С, 1, 2, 3 (см. рис. 2.3).

а) силу прикладываем в центре тяжести сечения (точка С).

$$\sigma = -\frac{F}{A} = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,24 \text{ МПа};$$

б) силу прикладываем в области ядра сечения (точка 1),  $x_F = 0,32b$ ;  $y_F = 0$ .

Напряжения в крайних точках сечения будут

$$\sigma_E = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_E}{i_y^2} \right) = \frac{250 \cdot 10^3}{7,57b^2} \left( 1 + \frac{0,32b \cdot (-1,9b)}{1,22b^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,12 \text{ МПа};$$

$$\sigma_0 = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_0}{i_y^2} \right) = \frac{250 \cdot 10^3}{7,57b^2} \left( 1 + \frac{0,32b \cdot 2,1b}{1,22b^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 1,67}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,40 \text{ МПа}$$

в) силу прикладываем на границе ядра сечения (точка 2),  $x_F = 0,64b$ ;  $y_F = 0$ .

$$\sigma_E = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_E}{i_y^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57b^2} \left( 1 + \frac{0,64b \cdot (-1,9b)}{1,22b^2} \right) = 0;$$

$$\sigma_0 = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_0}{i_y^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57b^2} \left( 1 + \frac{0,64b \cdot 2,1b}{1,22b^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 2,1}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,5 \text{ МПа}$$

г) силу прикладываем за ядром сечения (точка 3),  $x_F = 1,1b$ ;  $y_F = 0$ .

$$\sigma_E = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_E}{i_y^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57b^2} \left( 1 + \frac{1,1b \cdot (-1,9b)}{1,22b^2} \right) = \frac{250 \cdot 10^3 \cdot 0,71}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = 0,17 \text{ МПа};$$

$$\sigma_0 = -\frac{F}{A} \left( 1 + \frac{x_F x_0}{i_y^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} \left( 1 + \frac{1,1b \cdot 2,1b}{1,22b^2} \right) = -\frac{250 \cdot 10^3 \cdot 2,89}{7,57 \cdot 37,2^2 \cdot 10^{-4}} = -0,69 \text{ МПа}$$

По полученным значениям напряжений строим их эпюры, (см. рис. 2.3).

Анализ эпюр напряжений, при различном расположении сжимающей силы  $F$ , показывает, что наиболее выгодным является загрузка колонны центрально-приложенной сжимающей силой. Для получения напряжений одного знака во всех точках поперечного сечения, силу следует прикладывать в зоне ядра сечения.

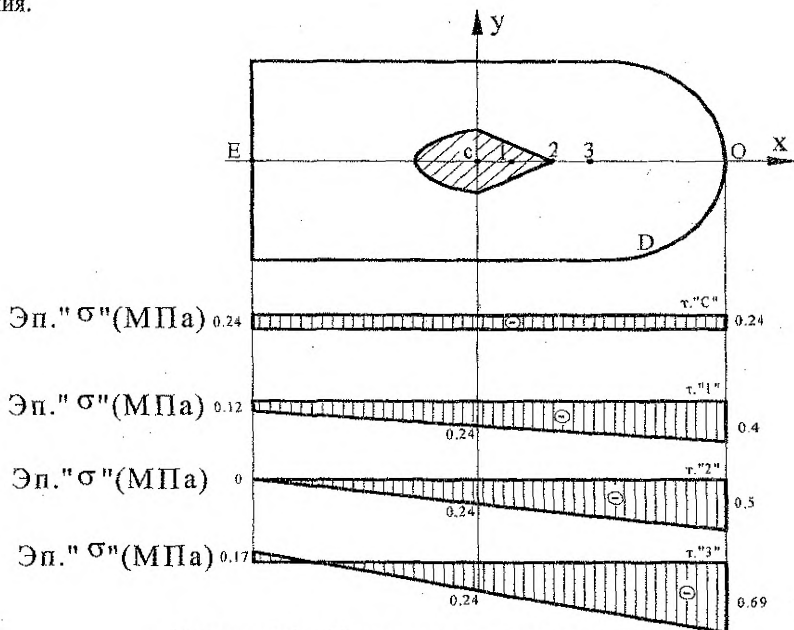


Рисунок 2.3 – Исследование ядра сечения

### 3. УСТОЙЧИВОСТЬ СЖАТЫХ БРУСЬЕВ

#### 3.1 Понятие об устойчивости первоначальной формы равновесия

Оказывается, что несущая способность сжатого бруса может оказаться исчерпанной вследствие потери устойчивости, т.е. в результате искривления (выпучивания), которое происходит раньше, чем брус выйдет из строя непосредственно от деформации сжатия. Из теоретической механики известно, что равновесие абсолютно твердого тела бывает устойчивым, безразличным и неустойчивым. Аналогичное явление имеет место и в механике деформируемого тела (сопротивлении материалов), с той лишь разницей, что вид равновесия зависит от величины прикладываемой внешней нагрузки. Примером может служить равновесие бруса, испытывающего центральное сжатие. При сравнительно небольшом значении сжимающей нагрузки  $F$  брус испытывает сжатие и находится в состоянии устойчивого равновесия, т.к., получив малое искривление геометрической оси за счёт поперечного "возмущающего" усилия, брус быстро возвращается в исходное положение. По мере увеличения сжимающей нагрузки  $F$  брус все медленнее возвращается в первоначальное положение после "возмущения" и при некотором критическом значении  $F_{кр}$  наступает состояние как бы безразличного равновесия: после самостоятельного искривления брус приобретает равновесие и в искривленном состоянии. Происходит раздвоение равновесия: прямолинейная форма теряет устойчивость, а криволинейная еще не успевает ее приобрести, которая теоретически становится устойчивой при  $F > F_{кр}$ . Однако такое состояние практически не приемлемо, т.к. брус работает уже не на сжатие, а на сжатие с изгибом, а, следовательно, возникают большие перемещения и напряжения, которые связаны между собой нелинейной зависимостью, что приводит к разрушению.

Изгиб, связанный с потерей устойчивости прямолинейной формы равновесия, называют продольным, т.к. возникает от продольной нагрузки. Наибольшее значение продольной сжимающей силы, до которой сохраняется прямолинейная форма равновесия стоек, называется критической силой.

#### 3.2 Критическая сила. Формула Эйлера

Формулу для определения величины критической силы для стойки, шарнирно закрепленной обоими концами, впервые (1744 г.) получил Л. Эйлер, поэтому ее и назвали формулой Эйлера, а силу часто называют эйлеровой силой. Формула имеет вид:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{l^2},$$

т.е. величина критической силы прямо пропорциональна жесткости ( $EI$ ) и обратно пропорциональна квадрату длины стойки ( $l$ ).

Для различных случаев закрепления концов сжатых стоек величину критической силы определяем по формуле в виде:

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(\mu \cdot l)^2},$$

где  $\mu$  — коэффициент приведенной длины, а величина  $\mu \cdot l = l_{пр}$  — приведенная длина.

### 3.3 Критические напряжения. Гибкость стержней

С учетом формулы Эйлера получим:

$$\sigma_{кр.} = \frac{F_{кр.}}{A} = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I}{(\mu \cdot l)^2 \cdot A} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2},$$

где  $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$  гибкость стержня, зависит от его геометрических размеров;

$i = \sqrt{I/A}$  – радиус инерции поперечного сечения стоек.

Из полученного выражения следует, что критические напряжения зависят от упругой константы материала ( $E$ ) и гибкости бруса ( $\lambda$ ).

Учитывая, что критические напряжения не должны превышать предела пропорциональности ( $\sigma_{пр.}$ ), легко можно определить предельную гибкость, т.е.

$$\sigma_{кр.} = \frac{\pi^2 \cdot E}{\lambda^2} \leq \sigma_{пр.}; \quad \lambda_{пр.} = \pi \cdot \sqrt{\frac{E}{\sigma_{пр.}}}.$$

В отличие от геометрической гибкости предельная гибкость ( $\lambda_{пр.}$ ) зависит от физико-механических свойств материала, из которого изготовлена стойка, т.е. модуля продольной упругости ( $E$ ) и предела пропорциональности ( $\sigma_{пр.}$ ).

Формула Эйлера применяется в тех случаях, когда действительная гибкость ( $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$ ) больше предельной ( $\lambda_{пр.}$ ). Если же гибкость сжатого бруса меньше предельной гибкости ( $\lambda < \lambda_{пр.}$ ), то критические напряжения и сила определяются по эмпирической формуле Ясинского:

$$\sigma_{кр.} = a - b \cdot \lambda; \quad F_{кр.} = \sigma_{кр.} \cdot A,$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, зависящие от материала (например, для стали  $a=310$  МПа,  $b=1,14$  МПа).

### 3.4 Расчет на устойчивость

Для центрально сжатых стоек используется следующее условие устойчивости:

$$\sigma_{кр.} = \frac{N}{A} \leq \varphi R,$$

где  $N$  – нормальная сила от расчетной сжимающей нагрузки;  $A$  – площадь поперечного сечения стойки;  $\varphi$  – коэффициент продольного изгиба или коэффициент, уменьшающий расчетное сопротивление сжатию  $R$  до значения, которое гарантирует устойчивость прямолинейной формы равновесия.

Условие устойчивости позволяет выполнить три вида расчета, аналогично расчетам на прочность. Наибольший интерес представляет проектная задача, т.е. подбор сечений по заданной нагрузке и расчетному сопротивлению материала  $R$ , длине стоек  $l$  и способах закрепления ее концов:

$$A \geq \frac{N}{\varphi R}.$$

Использование этого неравенства затруднено тем, что в него входят две неизвестные величины  $A$  и  $\varphi$ . Поэтому подбор сечения производят способом последовательных приближений. Первоначально задается значение коэффициента  $\varphi \approx 0,5$ , определяют величину площади  $A$ , конструируют сечение таким

образом, чтобы главные центральные моменты инерции были примерно равными:  $I_x \approx I_y$  (допускаются отклонения до 10%). Далее, определяется гибкость  $\lambda$ , а по таблицам устанавливают величину коэффициента  $\phi$  с учетом интерполирования. После этого определяется фактическое напряжение и сравнивается с расчетным сопротивлением  $R$  с учетом коэффициента  $\phi$ . Если отклонение составляет более 5 %, то расчет следует повторить.

### 3.5 Вопросы для самопроверки

1. Что понимают под потерей устойчивости сжатого бруса?
2. Дайте определение устойчивого и неустойчивого состояния стоек.
3. Дайте определение критической силы.
4. Какое дифференциальное уравнение используется при выводе формулы Л.Эйлера?
5. Как определяются критические силы и напряжения?
6. Какие влияния оказывают жесткость поперечного сечения и длина стойки на величину критической силы?
7. Что понимают под гибкостью бруса? Приведите формулу определения геометрической гибкости.
8. Что понимают под приведенной (расчетной) длиной бруса? Как определяется и чему равен коэффициент приведения длины для различных условий закрепления стоек?
9. В каких случаях используют формулу Л. Эйлера?
10. Когда применяется при расчетах формула Ясинского?
11. К чему сводится расчет на устойчивость?
12. Что понимают под коэффициентом продольного изгиба и как определяется его величина?
13. Как осуществляется подбор сечений стоек при расчете на устойчивость?
14. Для чего используются условия равноустойчивости и что это такое?
15. Приведите график критических напряжений ( $\sigma_{кр} - \lambda$ ).

### 3.6 Задание по расчетно-проектировочной работе №6

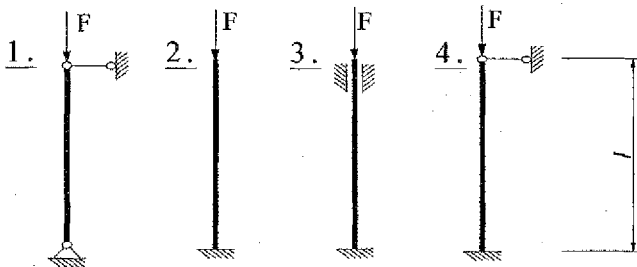
#### “Расчет сжатой стойки на устойчивость”

Дано: стальная стойка длиной  $l$  (принять по номеру варианта) нагружена продольной сжимающей нагрузкой  $F$ . Расчетное сопротивление материала стойки  $R=210$  МПа; модуль продольной упругости материала  $E=200$  ГПа.

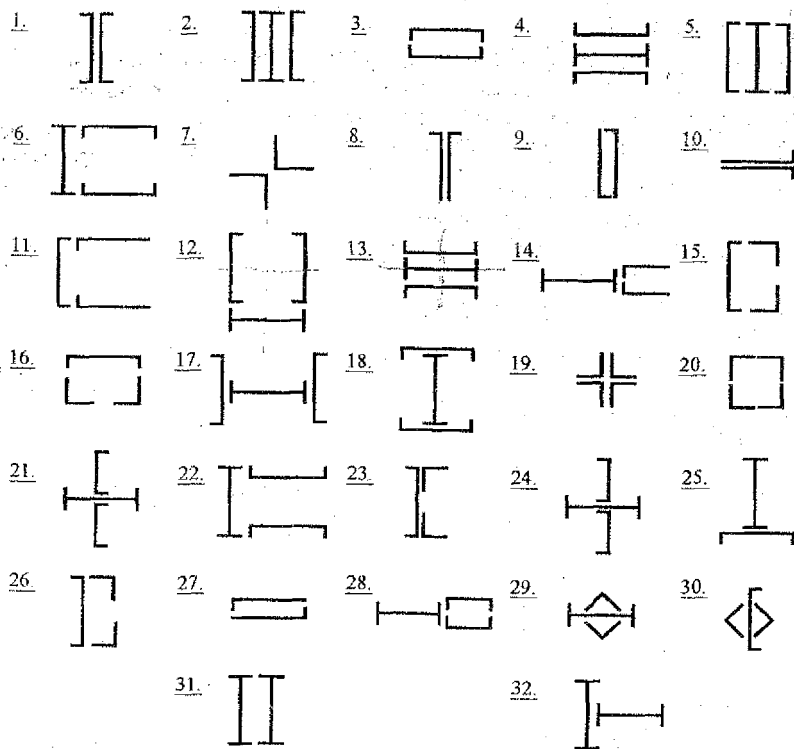
Требуется: 1) подобрать размеры поперечного сечения составной стойки (поперечное сечение стойки принять по номеру схемы);

2) определить величину критической силы и сравнить ее с заданной нагрузкой  $F$ .

### 3.7 Схемы закрепления стоек



### 3.8 Схемы поперечного сечения составных стоек



### 3.9 Числовые значения длины стоек и нагрузок

Номер варианта	Схема стойки	$l, \text{ м}$	$F, \text{ кН}$	Номер варианта	Схема стойки	$l, \text{ м}$	$F, \text{ кН}$
1	3	2,4	450	26	1	2,4	710
2	1	2,4	480	27	2	3	750
3	2	3	490	28	3	3,2	775
4	3	3,2	460	29	1	3	740
5	1	2,6	440	30	2	2,1	700
6	2	2,5	430	31	3	2,2	310
7	3	3,2	420	32	1	3,2	320
8	1	3,3	470	33	2	3,3	330
9	2	2,9	410	34	3	3	340
10	3	2,6	550	35	1	2,6	350
11	1	3,3	530	36	2	2,8	360
12	2	2,8	540	37	3	3,1	370
13	3	2,85	505	38	1	2,8	380
14	1	2,45	515	39	2	2,1	390
15	2	3	525	40	3	3,1	400
16	3	3,3	535	41	1	3,2	200
17	1	3	640	42	2	3,3	220
18	2	2,55	620	43	3	1,6	230
19	3	2,6	610	44	1	2,5	240



Продолжение таблицы

20	1	3,25	630	45	2	3,4	250
21	2	2,9	660	46	3	3,2	260
22	3	2,5	680	47	1	1,7	270
23	1	2,7	655	48	2	2,6	280
24	2	3,4	745	49	3	3,3	290
25	3	2,95	720	50	1	2,9	190

### 3.10 Пример расчета на устойчивость

Дано: стальная стойка длиной  $l=4$  м; нагружена продольной сжимающей нагрузкой  $F=540$  кН. Расчетное сопротивление материала стойки  $R=210$  МПа; модуль упругости  $E=200$  ГПа.

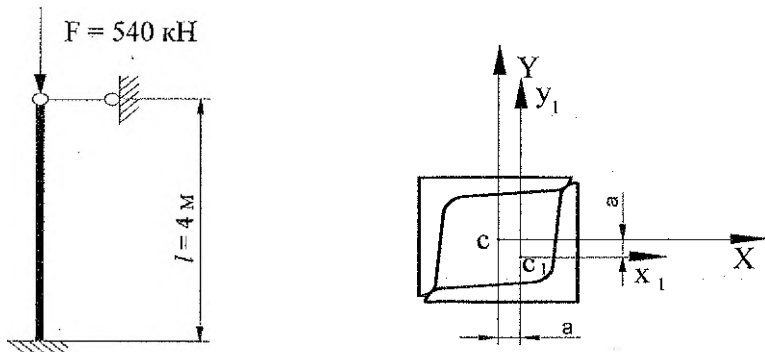


Рисунок 3.1 – Расчетная схема стойки и ее поперечное сечение  
Требуется: (см. п.п. 1-2)

#### Решение

#### 1. Подбор размеров поперечного сечения

Первое приближение. Принимаем  $\varphi_1 = 0,5$ . Тогда из условия устойчивости

$$A_1 = \frac{F}{\varphi_1 R} = \frac{540 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 210 \cdot 10^5} = 51,4 \text{ см}^2.$$

По таблицам принимаем два равнобоких уголка  $125 \times 125 \times 10$ ;

$$A_1 = 24,3 \text{ см}^2, A = 48,6 \text{ см}^2, I_x = 360 \text{ см}^4; z_0 = 3,45 \text{ см}.$$

Определим геометрические характеристики сечения

$$I_x = I_y = 2(I_{x1} + z_0^2 A_1) = 2(360 + 2,8^2 \cdot 24,3) = 1101 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I}{A}} = \sqrt{\frac{1101}{48,6}} = 4,76 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{\mu \cdot l}{i_{\min}} = \frac{0,7 \cdot 400}{4,76} = 58,8.$$

По таблице  $\varphi$  принимаем

$$\varphi_1^* = 0,89 - \frac{0,89 - 0,86}{10} \cdot 8,8 = 0,864;$$

$$\varphi_1^* = 0,864 \gg \varphi_1 = 0,5.$$

Второе приближение. Принимаем

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_1^*}{2} = \frac{0,5 + 0,864}{2} = 0,682.$$

$$\text{Тогда: } A_2 = \frac{F}{\varphi_2 R} = \frac{540 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,682 \cdot 210 \cdot 10^6} = 37,7 \text{ см}^2.$$

Принимаем два равнобоких уголка  $100 \times 100 \times 10$ ,  $A_1 = 19,2 \text{ см}^2$ ,

$$I_{x_1} = I_{y_1} = 179 \text{ см}^4, z_0 = 2,83 \text{ см}.$$

Определим геометрические характеристики

$$I_x = 2(I_{x_1} + a^2 A_1) = 2(179 + 2,17^2 \cdot 19,2) = 539 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{539}{2 \cdot 19,2}} = 3,75 \text{ см}, \quad \lambda = \frac{0,7 \cdot 400}{3,75} = 74,7.$$

По таблице  $\varphi$  принимаем

$$\varphi_2^* = 0,81 - \frac{0,81 - 0,75}{10} \cdot 4,7 = 0,782;$$

$$\varphi_2^* = 0,782 > \varphi_2 = 0,682.$$

*Третье приближение.* Принимаем

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_2^*}{2} = \frac{0,682 + 0,782}{2} = 0,732.$$

$$\text{Тогда: } A_3 = \frac{540 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,732 \cdot 210 \cdot 10^6} = 35,13 \text{ см}^2.$$

Принимаем два равнобоких уголка  $110 \times 110 \times 8$ ,  $A_1 = 17,2 \text{ см}^2$ ,

$$I_{x_1} = 198 \text{ см}^4, z_0 = 3 \text{ см}.$$

Определим геометрические характеристики

$$I_x = 2(I_{x_1} + a^2 A_1) = 2(198 + 2,5^2 \cdot 17,2) = 611 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{I_x}{A}} = \sqrt{\frac{611}{34,4}} = 4,21 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{0,7 \cdot 400}{4,21} = 66,5.$$

По таблице  $\varphi$  находим

$$\varphi_3^* = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 6,5 = 0,827;$$

$$\varphi_3^* = 0,827 > \varphi_3 = 0,732 \text{ на } 13,2\%$$

*Четвёртое приближение.* Принимаем

$$\varphi_4 = \frac{\varphi_3 + \varphi_3^*}{2} = \frac{0,732 + 0,827}{2} = 0,78.$$

$$\text{Тогда: } A_4 = \frac{540 \cdot 10^3 \cdot 10^4}{0,78 \cdot 210 \cdot 10^6} = 33 \text{ см}^2.$$

Принимаем два равнобоких уголка

$$110 \times 110 \times 7, \quad A_1 = 15,2 \text{ см}^2, \quad I_{x_1} = 176 \text{ см}^4, \quad z_0 = 2,96 \text{ см}.$$

Определим геометрические характеристики

$$I_x = 2(I_{x_1} + a^2 A_1) = 2(176 + 2,54^2 \cdot 15,2) = 548,1 \text{ см}^4;$$

$$i_{\min} = \sqrt{\frac{548,1}{30,4}} = 4,25 \text{ см}; \quad \lambda = \frac{0,7 \cdot 400}{4,25} = 65,9.$$

По таблице  $\phi$  определим

$$\phi_4^* = 0,86 - \frac{0,86 - 0,81}{10} \cdot 5,9 = 0,83.$$

Проверим прочность

$$\sigma = \frac{F}{A} = \frac{540 \cdot 10^3}{30,4 \cdot 10^{-4}} = 177,6 \text{ МПа};$$

$$\sigma = 177,6 \text{ МПа} > \phi R = 0,83 \cdot 210 = 174,3 \text{ МПа}.$$

Перенапряжение составляет

$$\frac{177,6 - 174,3}{174,3} \cdot 100 = 1,9\%,$$

что допустимо.

Окончательно принимаем сечение из двух уголков  $110 \times 110 \times 7$ .

$$A = 30,4 \text{ см}^2, I_x = I_y = 548,1 \text{ см}^4.$$

## 2. Определение критической силы

Для принятой стойки  $\lambda = 65,9 < \lambda_{\text{пр}} = 100$ , следовательно, для определения критической силы используем формулу Ясинского

$$\sigma_{\text{кр.}} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 65,9 = 234,9 \text{ МПа},$$

тогда  $F_{\text{кр.}} = \sigma_{\text{кр.}} \cdot A = 234,9 \cdot 10^6 \cdot 30,4 \cdot 10^{-4} = 714 \text{ кН}$ .

Коэффициент отношения  $F_{\text{кр.}}/F$  составляет:

$$n = \frac{F_{\text{кр.}}}{F} = \frac{714}{540} = 1,32.$$

Таблица значения коэффициентов  $\phi$

Гибкость элементов $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Коэффициент $\phi$ для стали марки Ст.3	Гибкость $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Коэффициент $\phi$ для стали марки Ст.3
0	1,00	120	0,45
10	0,99	130	0,40
20	0,96	140	0,36
30	0,94	150	0,32
40	0,92	160	0,29
50	0,89	170	0,26
60	0,86	180	0,23
70	0,81	190	0,21
80	0,75	200	0,19
90	0,69	210	0,16
100	0,60	220	0,15
110	0,52	230	0,13

## ЛИТЕРАТУРА

1. Сопротивление материалов / А.Ф. Смирнов и др. – М.: Высш. шк., 1972. – 480 с.
2. Дарков А.В., Шпиро Г.С. Сопротивление материалов. – М.: Высш.шк., 1969.
3. Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
4. Сборник задач по сопротивлению материалов / Под ред. А.В.Александрова. – М.: Стройиздат, 1977.
5. Терегулов И.С. Сопротивление материалов и основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш.шк., 1984.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

**Составители:**

Соловей Павел Иванович  
Хвисевич Виталий Михайлович

## **ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ**

к выполнению расчетно-проектировочных работ  
по курсу **“Сопротивление материалов”**  
для студентов строительных специальностей

Часть II

Ответственный за выпуск: Соловей П.И.  
Редактор: Строкач Г.В.  
Компьютерная верстка: Карман Е.Л.  
Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано к печати 30.11.2009 г. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Гарнитура Times New Roman.  
Усл. печ. л. 2,09. Уч. изд. л. 2,25. Заказ № 1076. Тираж 250 экз. Отпечатано на ризо-  
графе учреждения образования «Брестский государственный технический универси-  
тет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.