

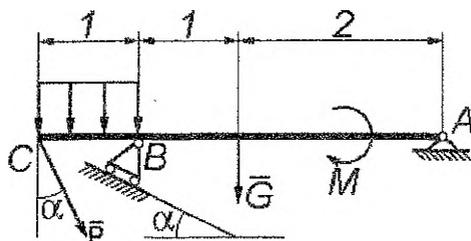
**МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ**

*УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ*  
**«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ  
УНИВЕРСИТЕТ»**

**Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики**

## **РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Методические указания  
для студентов специальности  
1- 27 01 01 – «Экономика и организация производства»



**Брест 2016**

Методические указания содержат индивидуальные задания, исходные данные и примеры решения задач статики по определению реакций связей, расчету ферм, определению положения центра тяжести фигуры, расчету статически неопределимых стержневых систем на прочность при осевом растяжении-сжатии, расчету балочных систем на прочность при прямом поперечном изгибе, расчетам на устойчивость. В указаниях приведены также требования к оформлению расчетно-графических работ и краткие теоретические сведения по темам заданий.

Составители: **А. И. Веремейчик**, доцент  
**И. Г. Томашев**, ст. преподаватель  
**В. В. Гарбачевский**, ст. преподаватель  
**В. М. Хвисевич**, к.т.н., доцент

## СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения .....	3
Требования к оформлению расчетно-графических работ.....	3
1. Теоретическая механика .....	3
1.1. Примеры решения задач .....	3
1.2. Задание для выполнения расчетно-графической работы № 1.....	13
2. Сопротивление материалов .....	17
2.1. Примеры решения задач .....	17
2.2. Задание для выполнения расчетно-графической работы № 2.....	25
3. Приложение.....	30
Список литературы .....	31

## ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

В своей трудовой деятельности квалифицированный инженер должен обладать элементами фундаментальных знаний по общетехническим дисциплинам. К таким дисциплинам относится техническая механика. Умение построить модели силовых нагружений, определить реактивные силы опорных устройств элементов конструкций, а также оценить их прочностные и жесткостные характеристики приобретает студентами после изучения основных разделов технической механики: теоретической механики и сопротивления материалов.

Типовым планом для подготовки инженеров-экономистов предусмотрено небольшое количество учебного времени, в течение которого можно рассмотреть только основные разделы технической механики.

В процессе изучения дисциплины студенты дневной формы обучения должны выполнить две расчетно-графические работы. Выполнение заданий позволит студентам научиться самостоятельно определять реакции опорных устройств (связей) для плоских и пространственных конструкций, находить положение центра тяжести плоских однородных тел, производить прочностные и жесткостные расчеты статически определимых и неопределимых систем на растяжение, сжатие и плоский поперечный изгиб.

## 1. ТЕОРЕТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА

### 1.1 Примеры решения задач

#### Пример 1

Дано: схема составной рамы (рисунок 1.1),  $F=20$  кН;  $q=6$  кН/м;  $M=18$  кН·м;  $\alpha=60^\circ$ ;  $\beta=30^\circ$ ;  $a=2$  м. На составную конструкцию наложены связи в точках  $A$  (подвижный шарнир) и  $B$  (жесткая заделка).

Определить: реакции связей в точках  $A$  и  $B$ , а также давление в шарнире  $C$ .

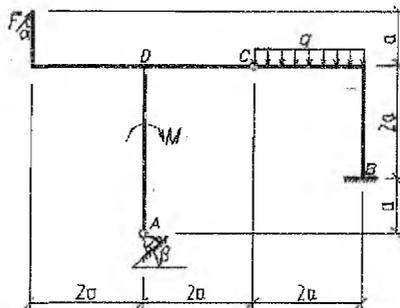


Рисунок 1.1 – Исходная схема составной рамы

**Решение:**

Рассмотрим равновесие рамы под действием заданных сил и реакций опор. Для этого выберем оси координат  $x$  и заменим связи в точках  $A$  и  $B$  соответствующими реакциями (рисунок 1.2). Реакция  $\vec{R}_A$  шарнирно-подвижной опоры  $A$  приложена в точке  $A$  и направлена перпендикулярно опорной плоскости, реакцию жесткой заделки в точке  $B$  заменяем двумя ее составляющими  $\vec{X}_B, \vec{Y}_B$  и реактивным моментом  $M_B$ . Действующую на раму распределенную нагрузку интенсивностью  $q$  заменим равнодействующей  $\vec{Q}$ , модуль которой равен:

$$Q = q \cdot 2a = 6 \cdot 2 \cdot 2 = 24 \text{ кН.}$$

Рама находится в равновесии под действием произвольной плоской системы сил, для которой можно составить три уравнения равновесия, в то время как определению подлежат четыре неизвестные реакции. Расчленим раму на части и рассмотрим равновесие каждой из них. При этом действие частей рамы друг на друга заменим составляющими реакции внутренней связи в шарнире  $C$   $\vec{X}_C, \vec{Y}_C$  (рисунок 1.3).

По аксиоме равенства действия и противодействия эти реакции противоположно направлены и равны по модулю:

$$\vec{X}_C = -\vec{X}'_C; \vec{Y}_C = -\vec{Y}'_C \quad (1.1)$$

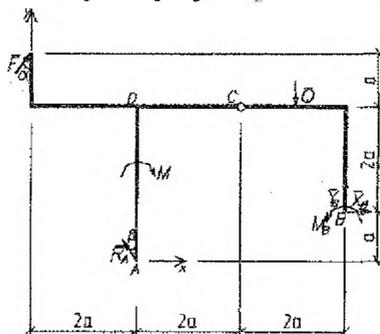


Рисунок 1.2 – Расчетная схема

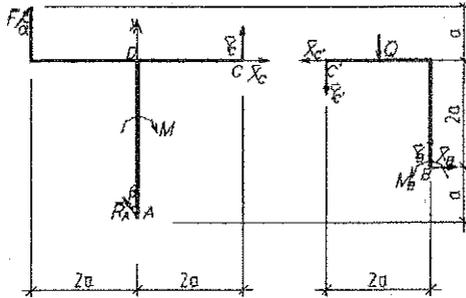


Рисунок 1.3 – Расчетные схемы элементов составной рамы

Составим уравнения равновесия плоской произвольной системы сил, приложенных к левой части рамы (рисунок 1.3):

$$\begin{aligned} \sum F_{kx}^{лев.} &= 0; F \sin \alpha + X_C - R_A \sin \beta = 0; \\ \sum F_{ky}^{лев.} &= 0; F \cos \alpha + Y_C + R_A \cos \beta = 0; \\ \sum M_C^{лев.} &= 0; -F \cos \alpha \cdot 4a - F \sin \alpha \cdot a - R_A \cos \beta \cdot 2a - R_A \sin \beta \cdot 3a - M = 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь при определении моментов сил  $\vec{F}$  и  $\vec{R}_A$  была применена теорема Вариньона (момент силы относительно точки равен сумме моментов составляющих этой силы относительно этой же точки).

Выразив из последнего уравнения  $R_A$  и подставив полученное значение в два предыдущих, получим:

$$\begin{aligned} R_A &= \frac{F \cos \alpha \cdot 4a + F \sin \alpha \cdot a + M}{a(2 \cos \beta + 3 \sin \beta)} = \frac{20 \cdot \cos 60^\circ \cdot 4 \cdot 2 + 20 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 + 18}{2(2 \cdot \cos 30^\circ + 3 \cdot \sin 30^\circ)} = -20,52 \text{ кН}; \\ X_C &= -F \sin \alpha + R_A \sin \beta = -20 \cdot \sin 60^\circ + (-20,52) \sin 30^\circ = -27,58 \text{ кН}; \\ Y_C &= -F \cos \alpha - R_A \cos \beta = -20 \cdot \cos 60^\circ - (-20,52) \cos 30^\circ = 7,77 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Составим теперь уравнения равновесия для плоской произвольной системы сил, приложенных к правой части рамы (рисунок 1.3):

$$\begin{aligned} \sum F_{kx}^{прав.} &= 0; -X_C + X_B = 0; \\ \sum F_{ky}^{прав.} &= 0; -Y_C - Q + Y_B = 0; \\ \sum M_B^{прав.} &= 0; X_C \cdot 2a + Y_C \cdot 2a + Q \cdot a + M_B = 0. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Выражая из уравнений (1.3) неизвестные реакции и подставляя числовые значения, будем иметь:

$$\begin{aligned} X_B &= X_C = -27,58 \text{ кН}; \\ Y_B &= Y_C + Q = 7,77 + 24 = 31,77 \text{ кН}; \\ M_B &= -X_C \cdot 2a - Y_C \cdot 2a - Q \cdot a = (-27,52) \cdot (-2) \cdot 2 - 7,77 \cdot 2 \cdot 2 - 24 \cdot 2 = 31 \text{ кН} \cdot \text{м}. \end{aligned}$$

Для проверки правильности решения составим уравнение равновесия для системы сил, приложенных ко всей раме (уравнение моментов относительно точки D):

$$\begin{aligned} \sum M_D &= -F \cos \alpha \cdot 2a - F \sin \alpha \cdot a - R_A \sin \beta \cdot 3a - Q \cdot 3a + X_B \cdot 2a + Y_B \cdot 4a - M + M_B = \\ &= 20 \cdot \cos 60^\circ \cdot (-2) \cdot 2 - 20 \cdot \sin 60^\circ \cdot 2 - (-20,52) \cdot \sin 30^\circ \cdot 3 \cdot 2 - 3 \cdot 24 \cdot 2 + \\ &+ (-27,58) \cdot 2 \cdot 2 + 31,77 \cdot 4 \cdot 2 - 18 + 31 = 346,72 - 346,96 = 0,24 \approx 0. \end{aligned}$$

Проверка показала, что реакции определены верно.

**Ответ:**  $R_A = -20,52$  кН;  $X_B = -27,58$  кН;  $Y_B = 31,77$  кН;  $M_B = 31$  кН·м;  
 $X_C = -27,58$  кН;  $Y_C = 7,77$  кН.

Знаки показывают, что реакции  $R_A$ ,  $X_B$ ,  $X_C$  имеют направление, противоположное показанному на рисунках 1.2, 1.3.

### Пример 2

**Дано:** плоская ферма (рисунок 1.4) нагружена силами; на ферму наложены связи (подвижный и неподвижный шарниры);  $P=90$  кН;  $Q=40$  кН;  $F=66$  кН;  $\alpha=55^\circ$ .

**Определить:** реакции связей и усилия в стержнях.

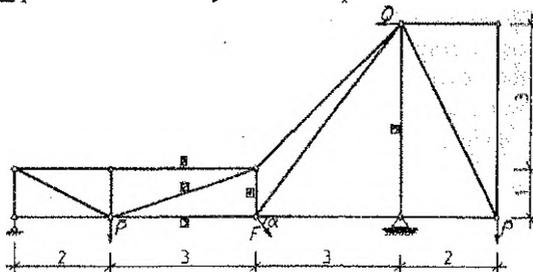


Рисунок 1.4 – Исходная схема фермы

### Решение:

#### **A. Определяем реакции связей.**

Изобразим расчетную схему фермы в соответствии с исходными данными, обозначив реакции опор –  $\bar{R}_A$ ,  $\bar{X}_B$ ,  $\bar{Y}_B$  (рисунок 1.5).

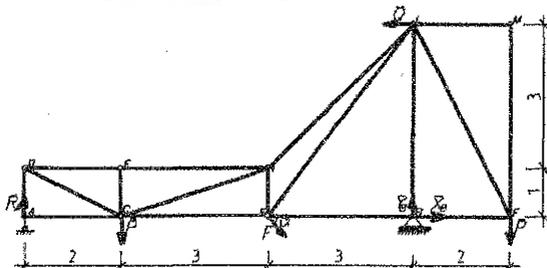


Рисунок 1.5 – Расчетная схема для определения реакций внешних связей

Составим уравнения равновесия, используя основную систему уравнений равновесия плоской произвольной системы сил:

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; & F \cos \alpha + X_B - Q = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; & R_A - 2 \cdot P - F \sin \alpha + Y_B = 0; \\ \sum M_B(\vec{F}_K) = 0; & -P \cdot 2 + Q \cdot 4 + F \sin \alpha \cdot 3 + P \cdot 6 - R_A \cdot 8 = 0. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Решаем полученную систему уравнений:

$$\begin{aligned} 66 \cdot \cos 55^\circ + X_B - 40 = 0 & \Rightarrow X_B = 40 - 37,86 = 2,14 \text{ кН}, \\ -180 + 160 + 66 \cdot \sin 55^\circ \cdot 3 + 540 - R_A \cdot 8 = 0 & \Rightarrow R_A = 85,27 \text{ кН}, \\ R_A - 180 - 66 \cdot \sin 55^\circ + Y_B = 0 & \Rightarrow Y_B = 148,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Проверка:

$$\begin{aligned} \sum M_M(\vec{F}_K) = 0: & P \cdot 8 + F \cos \alpha \cdot 4 + F \sin \alpha \cdot 5 - R_A \cdot 10 + X_B \cdot 4 - Y_B \cdot 2 = 0, \\ & 720 + 151,4 + 270,3 - 852,8 + 8,56 - 297,6 = 0, \\ & 1150,26 - 1150,4 = 0. \end{aligned}$$

Значит, реакции опор определены верно.

### Б. Определяем усилия в стержнях методом вырезания узлов.

Построим расчетную схему фермы для определения усилий в стержнях (рисунок 1.6). Рассматриваем равновесие каждого узла в отдельности. Узлы находятся в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил.

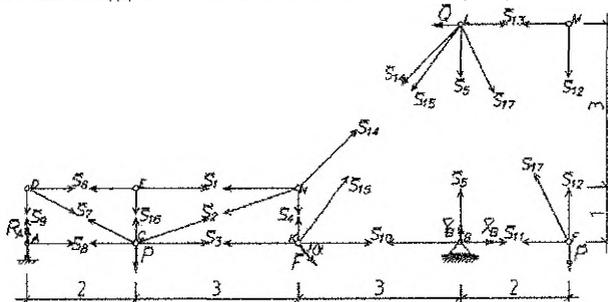


Рисунок 1.6 – Расчетная схема для определения усилий в стержнях методом вырезания узлов

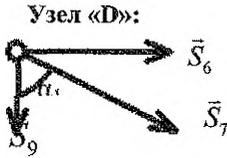
Усилия в стержнях определяем аналитически и геометрически. Аналитический расчет заключается в составлении уравнений равновесия, геометрический – в построении силовых многоугольников. Расчет начинаем с узла «А», где имеется два неизвестных усилия.

Составим два уравнения равновесия – уравнения проекций на оси  $x$  и  $y$  (при рассмотрении всех узлов ось  $x$  направлена горизонтально вправо, ось  $y$  – вертикально вверх):

$$\begin{aligned} \sum F_{ix} = 0; & S_8 = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; & R_A + S_9 = 0; \Rightarrow S_9 = -R_A = -85,27 \text{ кН}. \end{aligned}$$



Проверку осуществляем геометрическим способом:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{2}{1} = 2 \Rightarrow \alpha_1 = 63,43^\circ; \\ \cos \alpha_1 &= 0,447; \\ \sin \alpha_1 &= 0,894. \end{aligned}$$

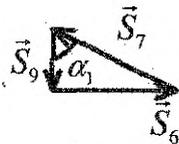
Составим уравнения равновесия:

$$\sum F_{ix} = 0; S_6 + S_7 \sin \alpha_1 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; -S_9 - S_7 \cos \alpha_1 = 0; \Rightarrow S_7 = -S_9 / \cos \alpha_1 = 189,4 \text{ кН};$$

$$S_6 = -189,4 \cdot 0,89 = -169 \text{ кН}.$$

Проверку осуществляем геометрическим способом:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \alpha_1 &= \frac{S_9}{S_6} = 1,98 \approx 2; \\ \cos \alpha_1 &= \frac{S_9}{S_7} = 0,45. \end{aligned}$$

Узел «E»:

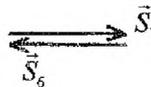


Составим 2 уравнения равновесия:

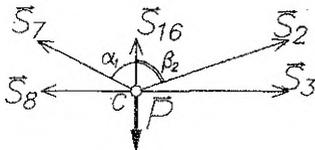
$$\sum F_{ix} = 0; -S_6 + S_1 = 0 \Rightarrow S_1 = S_6 = -169 \text{ кН};$$

$$\sum F_{iy} = 0; -S_{16} = 0.$$

Проверку осуществляем геометрическим способом:



Узел «C»:



$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \beta_2 &= \frac{3}{1} = 3 \Rightarrow \beta_2 = 71,57^\circ; \\ \cos \beta_2 &= 0,316; \\ \sin \beta_2 &= 0,949. \end{aligned}$$

Составим уравнения равновесия:

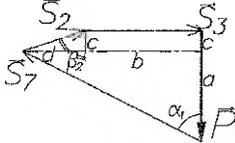
$$\sum F_{ix} = 0; -S_8 - S_7 \sin \alpha_1 + S_2 \sin \beta_2 + S_3 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; S_7 \cos \alpha_1 + S_{16} + S_2 \cos \beta_2 - P = 0;$$

$$S_2 = (90 - 189,4 \cdot 0,45) / 0,316 = 15 \text{ кН},$$

$$S_3 = 189,4 \cdot 0,89 - 15 \cdot 0,949 = 154,4 \text{ кН}.$$

Проверку осуществляем геометрическим способом:



Из геометрии рисунка:

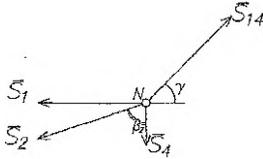
$$\cos \alpha_1 = \frac{a}{S_7} \Rightarrow a = 189,4 \cdot 0,45 = 85,23;$$

$$\sin \alpha_1 = \frac{b}{S_7} \Rightarrow b = 189,4 \cdot 0,89 = 168,6.$$

$$c = P - a = 90 - 85,23 = 4,77; \quad \cos \beta_2 = \frac{c}{S_2} \Rightarrow S_2 = \frac{4,77}{0,32} = 14,91 \text{ кН};$$

$$\sin \beta_2 = \frac{d}{S_2} \Rightarrow d = 15 \cdot 0,95 = 14,25; \quad S_3 = b - d = 168,6 - 14,25 = 154,35 = 154,4 \text{ кН}.$$

Узел «N»:



$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{3}{3} = 1;$$

$$\gamma = 45^\circ;$$

$$\cos \gamma = \sin \gamma = 0,707.$$

Составим уравнения равновесия:

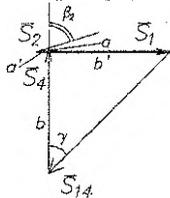
$$\sum F_{ix} = 0; -S_1 + S_{14} \cos \gamma - S_2 \sin \beta_2 = 0;$$

$$\sum F_{iy} = 0; -S_2 \cos \beta_2 - S_4 + S_{14} \sin \gamma = 0;$$

$$S_{14} = 15 \cdot 0,95 - 169 / 0,707 = -218,9 \text{ кН};$$

$$S_4 = -15 \cdot 0,32 - 218,9 \cdot 0,707 = -159,6 \text{ кН}.$$

Проверку осуществляем геометрическим способом:



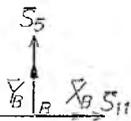
$$\cos \beta_2 = \frac{a}{S_2} \Rightarrow a = 15 \cdot 0,32 = 4,8;$$

$$\sin \beta_2 = \frac{a'}{S_2} \Rightarrow a' = 15 \cdot 0,95 = 14,25;$$

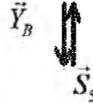
$$b' = S_1 - a' = 169 - 14,25 = 154,75; \quad S_4 = 154,75 + 4,8 = 159,55 = 159,6 \text{ кН};$$

$$\cos \gamma = \frac{b}{S_{14}} \Rightarrow S_{14} = 154,75 / 0,707 = 218,9 \text{ кН}.$$

Рассмотрим узел «В», определяя только  $S_5$ : составим уравнение равновесия в проекции на вертикальную ось:

$$\sum F_{iy} = 0; Y_B + S_5 = 0; \Rightarrow S_5 = -Y_B = -148,8 \text{ кН}.$$


Проверку решения осуществляем геометрическим способом:



**В. Определяем усилия в стержнях методом сечений (Риттера).**

Определяем усилия методом Риттера в стержнях 1, 2, 3.

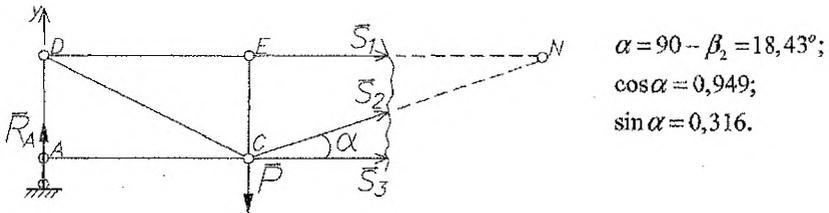


Рисунок 1.7 – Расчетная схема для определения усилий в стержнях методом Риттера

Составляем уравнения равновесия, из которых можно сразу определить одно из неизвестных усилий. Это будут два уравнения моментов относительно точек Риттера – в которых попарно пересекаются два стержня. В данном случае это точки N и C. Оставшееся неизвестное определим из уравнения проекций сил на ось, перпендикулярную параллельным стержням.

Составим уравнение моментов относительно точки C:

$$\sum M_C(\vec{F}_K) = 0; -R_A \cdot 2 - S_1 \cdot 1 = 0 \Rightarrow S_1 = -85,27 \cdot 2 = -170,54 \text{ кН}.$$

Составим уравнение моментов относительно точки N:

$$\sum M_N(\vec{F}_K) = 0; P \cdot 3 + S_3 \cdot 1 - R_A \cdot 5 = 0 \Rightarrow S_3 = 85,27 \cdot 5 - 90 \cdot 3 = 156,35 \text{ кН}.$$

Составим уравнение проекций на вертикальную ось y:

$$\sum F_{iy} = 0; R_A - P + S_2 \cdot \sin \alpha = 0 \Rightarrow S_2 = (90 - 85,27) / 0,316 = 14,97 \text{ кН}.$$

Сравнивая значения усилий в стержнях, найденные методом вырезания узлов, с найденными методом Риттера, убеждаемся, что они совпадают. Небольшие расхождения в результатах вызваны округлениями в промежуточных вычислениях (составляют менее 3%).

Ответ:

$$S_1 = -169 \text{ кН}; S_2 = 15 \text{ кН}; S_3 = 154,4 \text{ кН}; S_4 = -159,6 \text{ кН}; S_5 = -148,8 \text{ кН}.$$

### Пример 3

Определить координаты центра тяжести составного сечения, приведенного на рисунке.

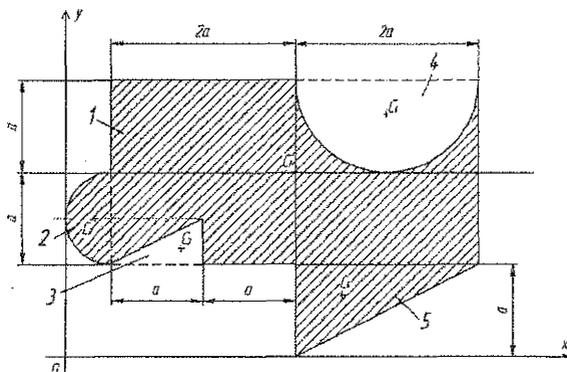


Рисунок 1.8 – Схема составного сечения

Решение:

1. Для решения задачи используем методы разбиения на части и отрицательных площадей. Разбиваем фигуру на пять простых элементов: прямоугольник 1 размерами  $4a \times 2a$ ; полукруг 2 радиуса  $R_2 = 0,5a$ ; треугольник 3 (вырез); полукруг 4 радиуса  $R_4 = a$  (вырез); треугольник 5. Вводим систему координат  $xu$  с началом в точке  $O$ .

2. Определяем площади  $A_k$  и координаты  $x_k, y_k$  центров тяжести  $C_1, C_2, C_3, C_4, C_5$  составных элементов.

Прямоугольник 1:

$$A_1 = 4a \cdot 2a = 8a^2;$$

$$x_1 = 2,5a;$$

$$y_1 = 2a.$$

Треугольник 3:

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot a \cdot 0,5a = -0,25a^2;$$

$$x_3 = 1,5a - \frac{1}{3}a = 1,17a;$$

$$y_3 = a + \frac{1}{3} \cdot 0,5a = 1,17a.$$

Полукруг 2:

$$A_2 = \frac{\pi R_2^2}{2} = \frac{\pi \cdot \left(\frac{a}{2}\right)^2}{2} = 0,39a^2;$$

$$x_2 = a - \frac{4}{3} \frac{1}{\pi} a = 0,79a;$$

$$y_2 = a + 0,5a = 1,5a.$$

Полукруг 4:

$$A_4 = \frac{\pi R_4^2}{2} = \frac{\pi \cdot (a)^2}{2} = -1,57a^2;$$

$$x_4 = 3,5a;$$

$$y_4 = 3a - \frac{4}{3} \frac{a}{\pi} = 2,58a.$$

Треугольник 5:

$$A_5 = \frac{1}{2} a \cdot 2a = a^2;$$

$$x_5 = 2,5a + \frac{1}{3} \cdot 2a = 3,17a;$$

$$y_5 = \frac{2}{3} a = 0,67a.$$

3. Находим статические моменты сечения относительно осей  $x, y$ :

$$S_x = A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3 + A_4 y_4 + A_5 y_5 = 8a^2 \cdot 2a + 0,39a^2 \cdot 1,5a + (-0,25a^2) \times \\ \times 1,17a + (-1,57a^2) \cdot 2,58a + a^2 \cdot 0,67a = 12,91a^3;$$

$$S_y = A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3 + A_4 x_4 + A_5 x_5 = 8a^2 \cdot 2,5a + 0,39a^2 \cdot 0,79a + (-0,25a^2) \times \\ \times 1,17a + (-1,57a^2) \cdot 3,5a + a^2 \cdot 3,17a = 17,69a^3.$$

Площадь сечения:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 = 8a^2 + 0,39a^2 + (-0,25a^2) + (-1,57a^2) + a^2 = 7,57a^2.$$

4. Находим координаты центра тяжести:

$$x_c = \frac{S_y}{A} = \frac{17,69a^3}{7,57a^2} = 2,34a;$$

$$y_c = \frac{S_x}{A} = \frac{12,91a^3}{7,57a^2} = 1,71a.$$

Наносим центр тяжести на чертеж (рисунок 1.9).

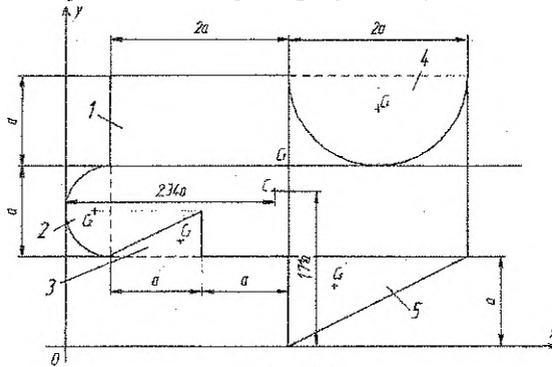


Рисунок 1.9

**Примечание.** Для проверки результатов расчетов необходимо воспользоваться условием равенства нулю статических моментов сечения относительно центральных осей:

$$S_{x_c} = A_1 y_{c1} + A_2 y_{c2} + A_3 y_{c3} + A_4 y_{c4} + A_5 y_{c5} = \\ = A_1 \cdot (y_1 - y_c) + A_2 \cdot (y_2 - y_c) + A_3 \cdot (y_3 - y_c) + A_4 \cdot (y_4 - y_c) + A_5 \cdot (y_5 - y_c) = 0;$$

$$S_{y_c} = A_1 x_{c1} + A_2 x_{c2} + A_3 x_{c3} + A_4 x_{c4} + A_5 x_{c5} = \\ = A_1 \cdot (x_1 - x_c) + A_2 \cdot (x_2 - x_c) + A_3 \cdot (x_3 - x_c) + A_4 \cdot (x_4 - x_c) + A_5 \cdot (x_5 - x_c) = 0.$$

## 1.2. Задания для выполнения расчетно-графической работы № 1

Расчетно-графическая работа № 1 (по теоретической механике) включает задания 1.1 и 1.2. Номер варианта определяется порядковым номером студента в журнале.

### ЗАДАНИЕ 1.1

Составная рама состоит из 2-х жестких частей, шарнирно соединенных между собой. С помощью внешних связей (шарнирно-неподвижной, шарнирно-подвижной опор или жесткой заделки) рама крепится к неподвижному основанию. Рама загружена сосредоточенными силами  $\vec{P}_1$  и  $\vec{P}_2$ , равномерно распределенной нагрузкой интенсивностью  $q$  и парой сил с моментом  $M$ .

Требуется:

- 1) определить реакции внешних связей рамы;
- 2) определить давление в промежуточном шарнире;
- 3) проверить правильность решения.

Исходные данные для расчета принять согласно схемам (рисунок 1.10).

**Числовые данные к расчету составных рам:**

$P_1 = 20$  кН,  $P_2 = 10$  кН,  $q = 8$  кН/м,  $M = 5$  кН·м.

*Примечание.* По указанию преподавателя числовые данные могут быть изменены.

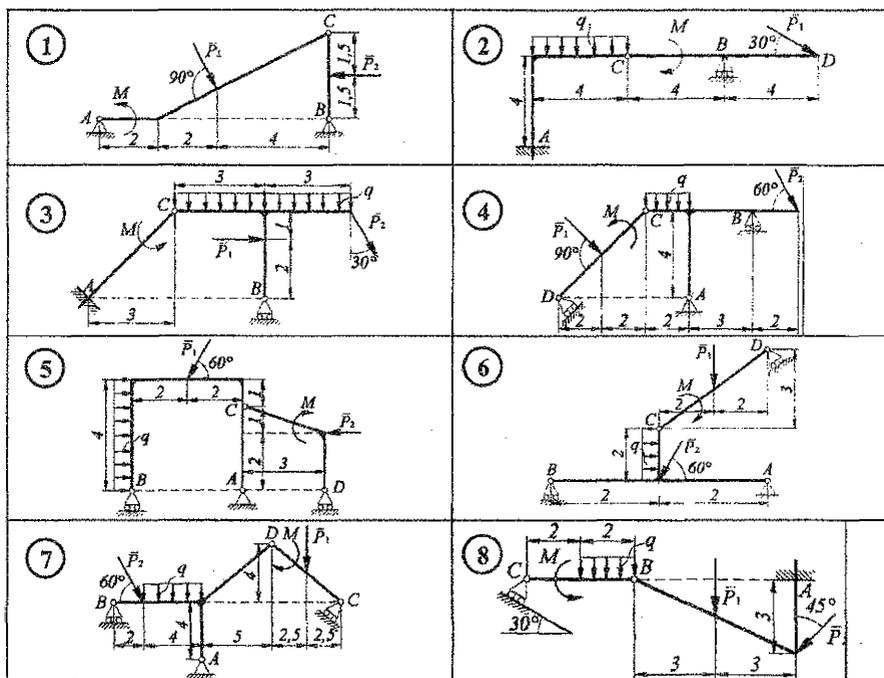
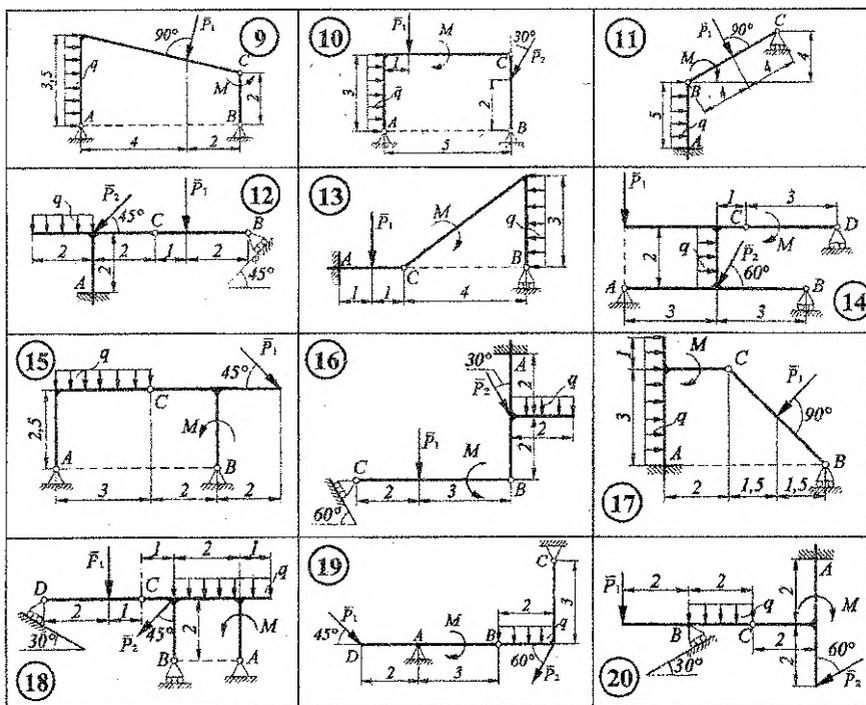


Рисунок 1.10 – Схемы составных конструкций



Продолжение рисунка 1.10

## ЗАДАНИЕ 1.2

### Определение координат центра тяжести плоского сечения

На рисунке 1.11 изображены плоские сечения. Вычертить сечение в масштабе (на миллиметровой бумаге). Определить координаты его центра тяжести. Показать на чертеже центр тяжести сечения. Выполнить проверку.

**Примечание** Сечения могут иметь дополнительные отверстия. Формы отверстий выбираются по рисунку 1.12, номер схемы выбирается в соответствии с последней цифрой номера группы. Привязка к сечению проводится по точке  $A$ , указанной на рисунках. Размеры  $b$ ,  $s$ ,  $d$ ,  $h$  необходимо принять самостоятельно, или согласно указанию преподавателя.

**Числовые данные к заданию 1.2:**  $a = 6$  см,  $b = 14$  см,  $c = 18$  см.

**Примечание** По указанию преподавателя числовые данные могут быть изменены.

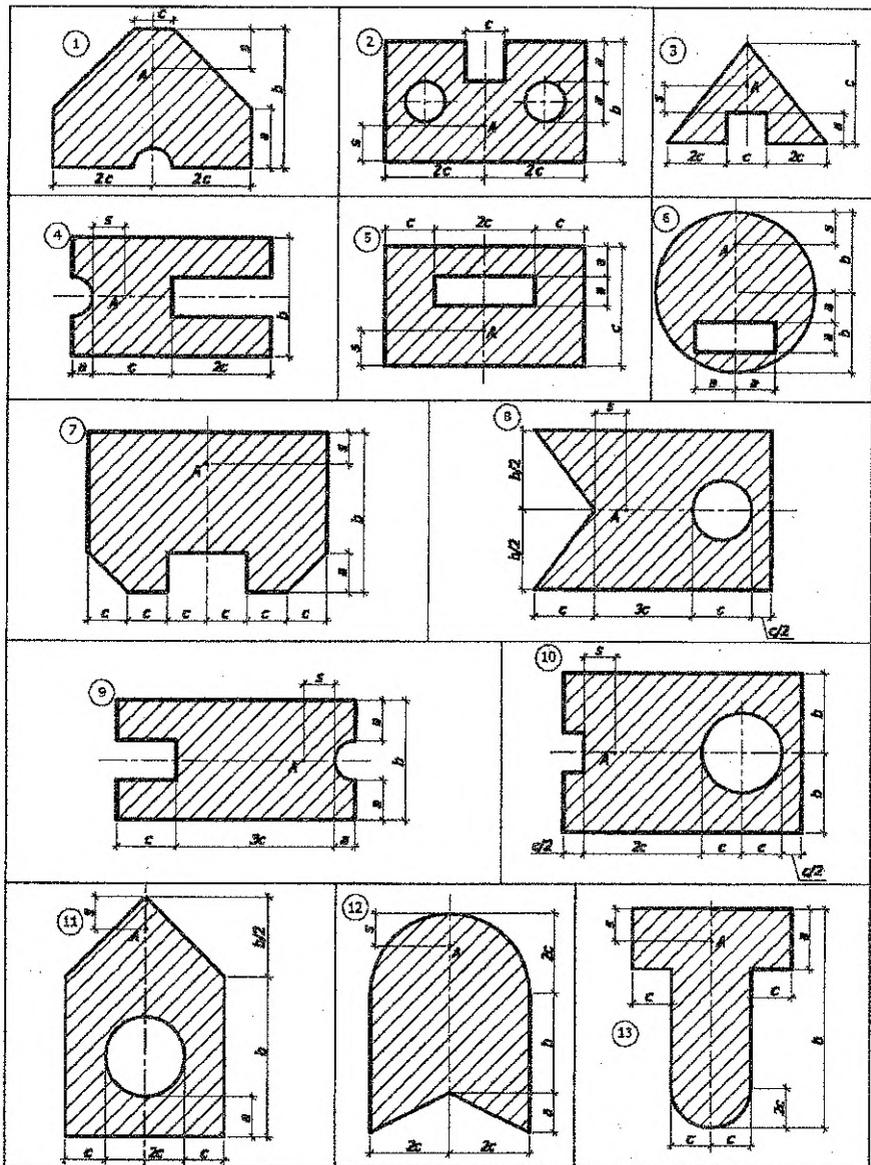
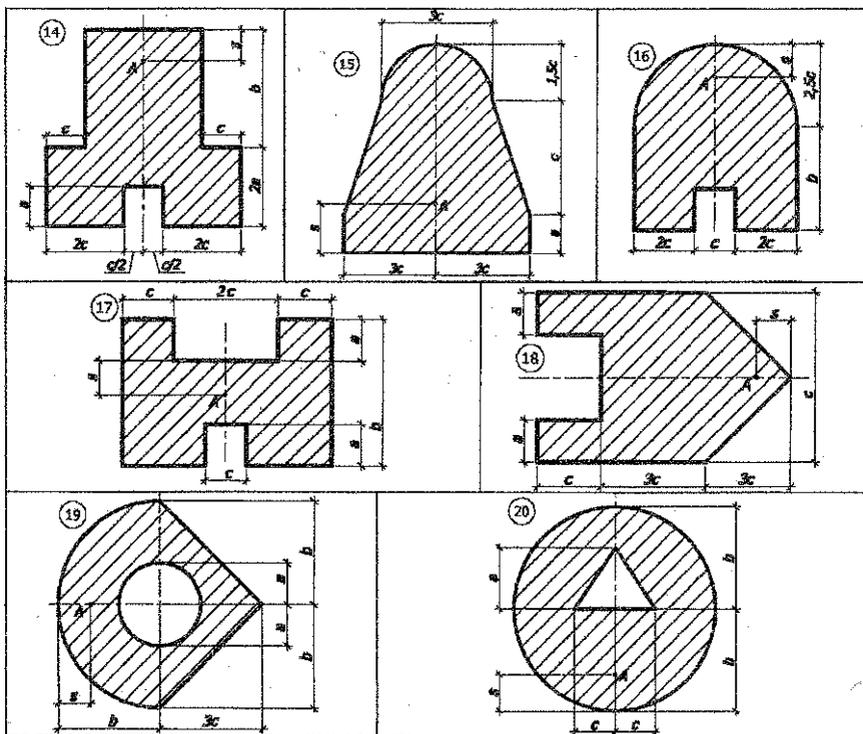


Рисунок 1.11 – Схемы сечений к заданию 1.2



Продолжение рисунка 1.11

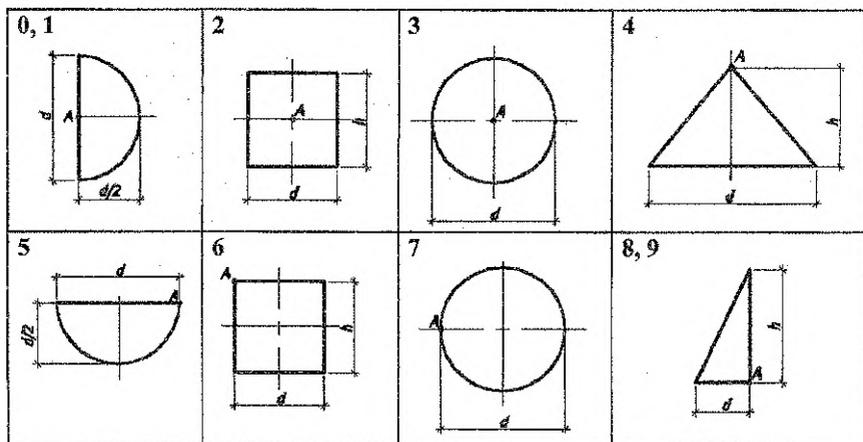


Рисунок 1.12 – Формы отверстий

## 2. СОПРОТИВЛЕНИЕ МАТЕРИАЛОВ

### 2.1. Примеры решения задач

#### Пример 1

Для ступенчатого бруса, нагруженного продольными осевыми нагрузками, требуется:

- 1) построить эпюру продольных сил  $N$ ;
- 2) построить эпюру нормальных напряжений  $\sigma$ ;
- 3) построить эпюру перемещений  $\delta$ ;
- 4) произвести проверки прочности и жесткости бруса.

Дано:  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ;  $F_1 = 50 \text{ кН}$ ;  $F_2 = 40 \text{ кН}$ ;  $F_3 = 60 \text{ кН}$ ;  
 $q = 5 \text{ кН/м}$ ;  $a = 1,5 \text{ м}$ ;  $b = 4 \text{ м}$ ;  $c = 5 \text{ м}$ ;  $A_1 = 10 \text{ см}^2$ ;  $A_2 = 20 \text{ см}^2$ ;  $[\sigma_p] = 70 \text{ МПа}$ ;

$$[\sigma_c] = 90 \text{ МПа}; [\delta] = \frac{1}{500} \cdot l.$$

#### Решение:

Вычертим брус в масштабе с указанием необходимых нагрузок и размеров.

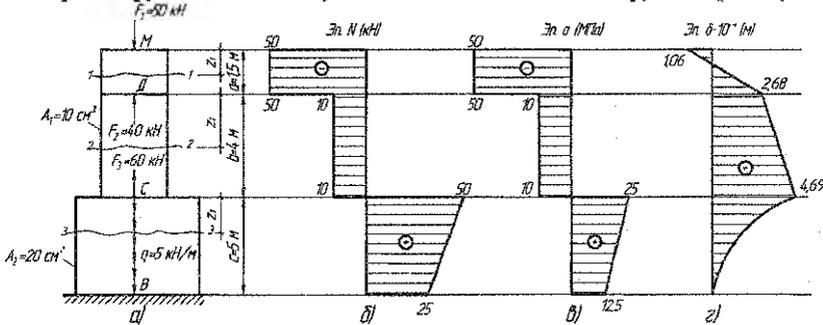


Рисунок 2.1 – Схема бруса. Эпюры продольных сил, нормальных напряжений и перемещений поперечных сечений

1. Разобьем брус на три силовых участка и запишем выражения для продольных сил и напряжений.

Участок 1  $0 \leq z_1 \leq a$ ,

$$N_1 = -F_1 = -50 \text{ кН};$$

$$\sigma_1 = \frac{N_1}{A_1} = \frac{-50 \cdot 10^3}{10 \cdot 10^{-4}} = -50 \text{ МПа} \text{ (где } A_1 = 10 \text{ см}^2 \text{ – площадь сечения первого участка).}$$

Участок 2  $0 \leq z_2 \leq b$ ,

$$N_2 = -F_1 + F_2 = -50 + 40 = -10 \text{ кН};$$

$$\sigma_2 = \frac{N_2}{A_2} = \frac{-10 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = -10 \text{ МПа} \text{ (где } A_2 = 20 \text{ см}^2 \text{ – площадь сечения второго участка).}$$

Участок 3  $0 \leq z_3 \leq c$

$$N_3 = -F_1 + F_2 + F_3 - q \cdot z_3,$$

при  $z_3 = 0$ :  $N_3 = -F_1 + F_2 + F_3 = -50 + 40 + 60 = 50 \text{ кН}$ ;

при  $z_3 = c$ :  $N_3' = -F_1 + F_2 + F_3 - q \cdot c = -50 + 40 + 60 - 5 \cdot 5 = 25 \text{ кН}$ ,

при  $z_3 = 0$ :  $\sigma_3 = \frac{N_3}{A_3} = \frac{50 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 25 \text{ МПа}$ ;

при  $z_3 = c$ :  $\sigma_3' = \frac{N_3'}{A_3} = \frac{25 \cdot 10^3}{20 \cdot 10^{-4}} = 12,5 \text{ МПа}$  (где  $A_3 = 20 \text{ см}^2$  – площадь сечения

бруса на третьем участке).

По данным расчета построены эпюры нормальных сил и напряжений (рисунки 2.1б и 2.1в).

2. Определяем абсолютное изменение длины стержня.

Участок 1: продольная сила на участке постоянна,  $\Delta l_1 = \frac{N_1 \cdot a}{E \cdot A_1}$ , тогда

$$\Delta l_1 = \frac{-50 \cdot 10^3 \cdot 1,5}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -3,75 \cdot 10^{-4} \text{ м (т.к. } \Delta l_1 < 0, \text{ участок испытывает деформацию сжатия)}.$$

Участок 2:  $\Delta l_2 = \frac{N_2 \cdot b}{E \cdot A_2}$ ,

$$\Delta l_2 = \frac{-10 \cdot 10^3 \cdot 4,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 10 \cdot 10^{-4}} = -2,0 \cdot 10^{-4} \text{ м (сжатие)}.$$

Участок 3: продольная сила изменяется по длине участка, поэтому

$$\Delta l_3 = \int_0^c \frac{N_3 \cdot dz}{E \cdot A_3} = \frac{\omega_N}{E \cdot A_3}, \text{ где } \omega_N \text{ – площадь эпюры } N,$$

$$\Delta l_3 = \frac{(50 + 25) \cdot 10^3 \cdot 5,0}{2 \cdot 10^{11} \cdot 20 \cdot 10^{-4}} = 4,69 \cdot 10^{-4} \text{ м (растяжение)}.$$

Абсолютное изменение длины:

$$\Delta l = \Delta l_1 + \Delta l_2 + \Delta l_3 = (-3,75 - 2,0 + 4,69) \cdot 10^{-4} = -1,06 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

Определяем перемещения. Перемещение сечения В:  $\delta_B = 0$ , т.к. брус жестко закреплен.

Перемещение сечения С:  $\delta_C = \Delta l_3 = 4,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ .

Перемещение сечения Д:  $\delta_D = \Delta l_3 + \Delta l_2 = (4,69 - 2,0) \cdot 10^{-4} = 2,69 \cdot 10^{-4} \text{ м}$ .

Перемещение сечения М:

$$\delta_M = \Delta l_3 + \Delta l_2 + \Delta l_1 = (4,69 - 2,0 - 3,75) \cdot 10^{-4} = -1,06 \cdot 10^{-4} \text{ м}.$$

По данным расчета построена эпюра перемещений поперечных сечений (рисунок 2.1г).

3. Проверка прочности бруса.

Анализ эпюры  $\sigma$  показывает, что опасными сечениями для заданного бруса являются: сечение  $C$  – в растянутой зоне и сечение  $D$  – в сжатой области бруса.

$$\sigma_D = 50 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 90 \text{ МПа};$$

$$\sigma_C = 25 \text{ МПа} < [\sigma_p] = 70 \text{ МПа}.$$

Условия прочности выполняются.

4. Проверка жесткости бруса.

Условие жесткости имеет вид:

$$\delta \leq [\delta];$$

$$\delta_M = 1,06 \cdot 10^{-4} \text{ м} < [\delta] = \frac{l}{500} = \frac{5+4+1,5}{500} = 21 \cdot 10^{-3} \text{ м}.$$

Условие жесткости выполняется.

### Пример 2

Двухопорная балка нагружена внешними нагрузками. Требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил ( $Q$ ) и изгибающих моментов ( $M$ );

2. Указать положение опасного сечения балки.

3. Для двутавровой балки подобрать номер прокатного профиля из условия прочности, а также произвести проверку прочности по касательным напряжениям. При расчетах принять для стали:  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ .

Дано:  $a = 2 \text{ м}$ ,  $b = 2 \text{ м}$ ,  $c = 2 \text{ м}$ ,  $F = 26 \text{ кН}$ ,  $q = 30 \text{ кН/м}$ ,  $M = 38 \text{ кН·м}$ .

Решение:

Составляем уравнение моментов относительно опоры А:

$$\sum m_A(\bar{F}_k) = 0, \quad -q \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right) - M + R_B \cdot (a + b + c) - F \cdot a = 0;$$

и находим реакцию опоры  $R_B$ :

$$R_B = \frac{M + F \cdot a + q \cdot b \cdot \left(a + \frac{b}{2}\right)}{a + b + c} = \frac{38 + 26 \cdot 2 + 30 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{2}{2}\right)}{2 + 2 + 2} = 45 \text{ кН}.$$

Составляем уравнение моментов относительно опоры В:

$$\sum m_B(\bar{F}_k) = 0, \quad q \cdot b \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right) - M - R_A \cdot (a + b + c) + F \cdot (b + c) = 0;$$

и находим реакцию опоры  $R_A$ :

$$R_A = \frac{F \cdot (b + c) - M + q \cdot b \cdot \left(c + \frac{b}{2}\right)}{a + b + c} = \frac{26 \cdot (2 + 2) - 38 + 30 \cdot 2 \cdot \left(2 + \frac{2}{2}\right)}{2 + 2 + 2} = 41 \text{ кН}.$$

Проверка:

$$\sum F_{ky} = 0, \quad -q \cdot b - F + R_A + R_B = -30 \cdot 2 - 26 + 41 + 45 = 0, \quad 0 = 0.$$

Разбиваем балку на 3 силовых участка.

Проводим произвольное сечение на каждом из участков на расстоянии  $z$  и рассматриваем условие равновесия отсеченной части:

Участок I,  $0 \leq z_1 \leq a$ .

$$Q_1 = R_A = 41 \text{ кН}, \quad M_1 = R_A \cdot z_1;$$

При  $z_1 = 0$ ,  $M_1 = R_A \cdot z_1 = 41 \cdot 0 = 0$ .

При  $z_1 = a = 2 \text{ м}$ ,  $M_1' = R_A \cdot z_1 = 41 \cdot 2 = 82 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

Участок II,  $0 \leq z_2 \leq b$ .

$$Q_2 = R_A - F - q \cdot z_2, \quad M_2 = R_A \cdot (a + z_2) - F \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2};$$

При  $z_2 = 0$ ,  $Q_2 = R_A - F - q \cdot z_2 = 41 - 26 - 30 \cdot 0 = 15 \text{ кН}$ ,

$$M_2 = R_A \cdot (a + z_2) - F \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = 41 \cdot (2 + 0) - 26 \cdot 0 - 30 \cdot \frac{0^2}{2} = 82 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

При  $z_2 = b = 2 \text{ м}$ ,  $Q_2' = R_A - F - q \cdot z_2 = 41 - 26 - 30 \cdot 2 = -45 \text{ кН}$ ,

$$M_2' = R_A \cdot (a + z_2) - F \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = 41 \cdot (2 + 2) - 26 \cdot 2 - 30 \cdot \frac{2^2}{2} = 52 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

$Q_2 > 0$ ,  $Q_2' < 0$ , следовательно на участке 2 экстремум. Находим его положение:

$$z_2 = \frac{Q_2}{q} = \frac{15}{30} = 0,5 \text{ м}.$$

Находим значение экстремального момента:

$$M_2 = R_A \cdot (a + z_2) - F \cdot z_2 - q \cdot \frac{z_2^2}{2} = 41 \cdot (2 + 0,5) - 26 \cdot 0,5 - 30 \cdot \frac{0,5^2}{2} = 85,75 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Участок III,  $0 \leq z_3 \leq c$ .

$$Q_3 = R_B = -45 \text{ кН}, \quad M_3 = R_B \cdot z_3;$$

При  $z_3 = 0$ ,  $M_3 = R_B \cdot z_3 = 45 \cdot 0 = 0$ .

При  $z_3 = c = 2 \text{ м}$ ,  $M_3' = R_B \cdot z_3 = 45 \cdot 2 = 90 \text{ кН} \cdot \text{м}$ .

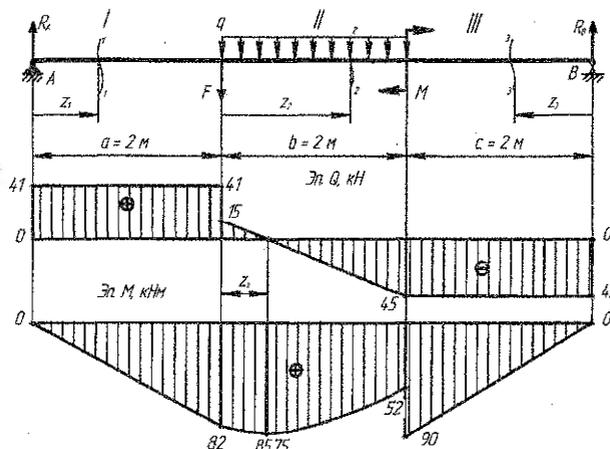


Рисунок 2.2 – Схема двухпропорной балки и эпюры внутренних силовых факторов

Опасное сечение: участок 3 при  $z_3 = 2$  м,  $M_{\max} = |M_3| = 90$  кН·м.

Находим требуемый момент сопротивления:

$$W_0 = \frac{M_{\max}}{[\sigma]} = \frac{90 \cdot 10^3}{160 \cdot 10^6} = 562,5 \cdot 10^{-6} \text{ м}^3 = 562,5 \text{ см}^3.$$

По сортаменту прокатной стали подбираем двутавр с ближайшим большим моментом сопротивления  $W_x = 597 \text{ см}^3$  (№33).

Т. к. принятое  $W_x = 597 \text{ см}^3$  больше требуемого  $562,3 \text{ см}^3$ , проверку прочности по нормальным напряжениям не выполняем.

Касательные напряжения при изгибе определяются по формуле Журавского:

$$\tau = \frac{Q \cdot S_x^{омс}}{I_x \cdot b(y)},$$

где  $Q$  – поперечная сила в рассматриваемом сечении;  $S_x^{омс}$  – статический момент отсеченной части поперечного сечения;  $I_x$  – момент инерции всего сечения относительно нейтральной оси;  $b$  – ширина поперечного сечения балки на том уровне, на котором определяются касательные напряжения.

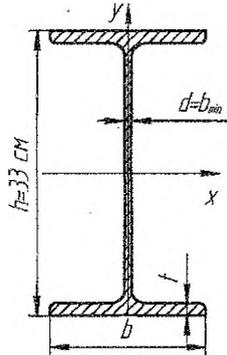


Рисунок 2.3 – Сечение двутавровой балки

Найдем  $\tau_{\max}$ :

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{x\max}^{омс}}{I_x \cdot b_{\min}}.$$

Статический момент отсеченной части поперечного сечения максимален для полусечения и по сортаменту для двутавра №33 равен  $S_{x\max}^{омс} = 339 \text{ см}^3$ . При этом ширина сечения на этом уровне минимальна и равна  $b_{\min} = d = 0,7$  см. Момент инерции двутаврового сечения относительно нейтральной оси  $I_x = 9840 \text{ см}^4$ . Максимальная поперечная сила действует на участке 3:  $Q_{\max} = |Q_3| = 45$  кН.

Тогда:

$$\tau_{\max} = \frac{Q_{\max} \cdot S_{x\max}^{омс}}{I_x \cdot d} = \frac{45 \cdot 10^3 \cdot 339 \cdot 10^{-6}}{9840 \cdot 10^{-8} \cdot 0,7 \cdot 10^{-2}} = 22,147 \cdot 10^6 \text{ Па} < [\tau] = 100 \text{ МПа}.$$

Условие прочности по касательным напряжениям выполняется.

### Пример 3

На стойку из стали Ст. 3 длиной  $l=1,5$  м с шарнирно опертыми концами действует сжимающая сила  $F=67$  кН (рисунок 2.4). Допускаемое напряжение на сжатие  $[\sigma_c]=160$  МПа. Определить размеры поперечного сечения стойки, выполнив расчет в двух вариантах:

- сечение в виде сплошного круга (рисунок 2.4а);
- сечение в виде двух равнобоких уголков (рисунок 2.4б).

Сравнить полученные стойки по расходу материала и для более рациональной определить критическую силу. Найти коэффициент запаса устойчивости.

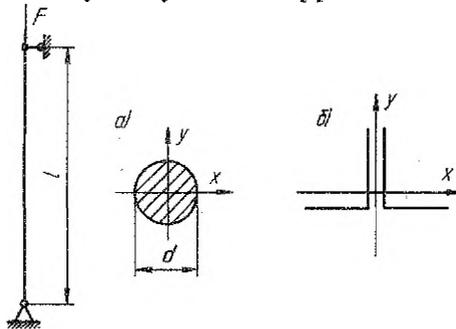


Рисунок 2.4 – Схема стойки и формы поперечных сечений

#### Решение:

##### А. Расчет стойки сплошного сечения (рисунок 2.4 а).

Принимаем предварительно коэффициент продольного изгиба  $\varphi_1=0,5$ .  
Определяем необходимую площадь сечения стойки:

$$A = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma_c]} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 8,37 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Диаметр стойки:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 8,37 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 3,3 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Радиус инерции круга:

$$i = \frac{d}{4} = \frac{3,3 \cdot 10^{-2}}{4} = 0,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 1,5}{0,8 \cdot 10^{-2}} = 187.$$

Коэффициент продольного изгиба определяем по таблице 3.1 Приложения методом интерполяции: при  $\lambda=180$ :  $\varphi=0,23$ ; при  $\lambda=190$ :  $\varphi=0,21$ ; следовательно, при  $\lambda=187$ :

$$\varphi_{\text{табл}} = 0,23 - \frac{0,23 - 0,21}{10} \cdot 7 = 0,22.$$

Получили значительное расхождение между принятым и полученным значениями коэффициента  $\varphi$ . Принимаем на втором приближении:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{\text{табл}}}{2} = \frac{0,5 + 0,22}{2} = 0,36.$$

Проводим перерасчет. Необходимая площадь сечения стойки:

$$A = \frac{F}{\varphi_2 [\sigma_c]} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,36 \cdot 160 \cdot 10^6} = 11,6 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Диаметр стойки:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 11,6 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 3,8 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Радиус инерции круга:

$$i = \frac{d}{4} = \frac{3,8 \cdot 10^{-2}}{4} = 0,95 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 1,5}{0,95 \cdot 10^{-2}} = 158.$$

Коэффициент продольного изгиба определяем по таблице 3.1 методом интерполяции: при  $\lambda = 150$ :  $\varphi = 0,32$ ; при  $\lambda = 160$ :  $\varphi = 0,29$ ; следовательно, при  $\lambda = 158$ :

$$\varphi_{\text{табл}} = 0,32 - \frac{0,32 - 0,29}{10} \cdot 8 = 0,296.$$

Принимаем для третьей попытки:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{\text{табл}}}{2} = \frac{0,36 + 0,296}{2} = 0,325.$$

Проводим перерасчет. Необходимая площадь сечения стойки:

$$A = \frac{F}{\varphi_3 [\sigma_c]} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,325 \cdot 160 \cdot 10^6} = 12,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2.$$

Диаметр стойки:

$$d = \sqrt{\frac{4A}{\pi}} = \sqrt{\frac{4 \cdot 12,9 \cdot 10^{-4}}{3,14}} = 4,04 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Радиус инерции круга:

$$i = \frac{d}{4} = \frac{4,04 \cdot 10^{-2}}{4} = 1,01 \cdot 10^{-2} \text{ м}.$$

Гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i} = \frac{1 \cdot 1,5}{1,01 \cdot 10^{-2}} = 149.$$

Коэффициент продольного изгиба определяем методом интерполяции: при  $\lambda = 140$ :  $\varphi = 0,36$ ; при  $\lambda = 150$ :  $\varphi = 0,32$ ; следовательно, при  $\lambda = 149$ :

$$\varphi_{\text{табл}} = 0,36 - \frac{0,36 - 0,32}{10} \cdot 9 = 0,324.$$

Принимаем  $\varphi = \varphi_{табл}$  и проверим прочность:

$$\sigma_y = \frac{F}{\varphi A} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,324 \cdot 12,9 \cdot 10^{-4}} \approx 160 \cdot 10^6 \text{ Па} = 160 \text{ МПа.}$$

Получили  $\sigma_y = [\sigma_c] = 160 \text{ МПа}$ .

Окончательно принимаем сплошную круглую стойку, имеющую площадь поперечного сечения  $A_{критич} = 12,9 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2$ .

**Б. Расчет стойки из равнобоких уголков (рисунок 2.4 б).**

Предварительно принимаем  $\varphi_1 = 0,5$ . Определяем необходимую площадь сечения стойки:

$$A = \frac{F}{\varphi_1 [\sigma_c]} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,5 \cdot 160 \cdot 10^6} = 8,38 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 8,38 \text{ см}^2.$$

Требуемая площадь одного уголка:

$$A_{ye} = \frac{A}{2} = \frac{8,38}{2} = 4,19 \text{ см}^2.$$

Из таблиц сортамента принимаем уголок  $56 \times 56 \times 4$  с  $A_{ye} = 4,38 \text{ см}^2$  и  $i_x = 1,73 \text{ см}$  (очевидно, для сечения из 2-х уголков  $i_y > i_x$ , т. е.  $i_x = i_{min}$ , и относительно оси x радиус инерции всего сечения равен радиусу инерции уголка).

Гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{\mu l}{i_x} = \frac{1 \cdot 1,5}{1,73 \cdot 10^{-2}} = 87.$$

С учетом таблицы 3.1 методом интерполяции (см. пример расчета стойки круглого сечения) определяем коэффициент продольного изгиба:

$$\varphi_{табл} = 0,768.$$

Для второй попытки принимаем:

$$\varphi_2 = \frac{\varphi_1 + \varphi_{табл}}{2} = \frac{0,5 + 0,768}{2} = 0,634.$$

Площадь сечения:

$$A = \frac{67 \cdot 10^3}{0,634 \cdot 160 \cdot 10^6} = 6,61 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 6,61 \text{ см}^2.$$

Площадь одного уголка:

$$A_{ye} = \frac{A}{2} = \frac{6,61}{2} = 3,3 \text{ см}^2.$$

Из таблиц сортамента принимаем уголок  $45 \times 45 \times 4$ , для которого  $A_{ye} = 3,48 \text{ см}^2$ ,  $i_x = 1,38 \text{ см}$ .

Тогда гибкость стойки:

$$\lambda = \frac{1 \cdot 1,5}{1,38 \cdot 10^{-2}} = 109.$$

С учетом таблицы 3.1 методом интерполяции определяем:

$$\varphi_{табл} = 0,528.$$

Для третьей попытки принимаем:

$$\varphi_3 = \frac{\varphi_2 + \varphi_{\text{табл}}}{2} = \frac{0,634 + 0,528}{2} = 0,581.$$

$$\text{Площадь сечения: } A = \frac{67 \cdot 10^3}{0,581 \cdot 160 \cdot 10^6} = 7,2 \cdot 10^{-4} \text{ м}^2 = 7,2 \text{ см}^2.$$

$$\text{Площадь одного уголка: } A_{\text{уг}} = \frac{A}{2} = \frac{7,2}{2} = 3,6 \text{ см}^2.$$

Из таблиц сортамента принимаем уголок  $50 \times 50 \times 4$ , для которого  $A_{\text{уг}} = 3,89 \text{ см}^2$ ,  $i_x = 1,54 \text{ см}$ .

$$\text{Тогда гибкость стойки: } \lambda = \frac{1 \cdot 1,5}{1,54 \cdot 10^{-2}} = 97,5.$$

Методом интерполяции определяем:  $\varphi_{\text{табл}} = 0,622$ .

Принимаем  $\varphi = \varphi_{\text{табл}} = 0,622$  и проверим принятый профиль:

$$\sigma_y = \frac{F}{\varphi A} = \frac{67 \cdot 10^3}{0,622 \cdot 2 \cdot 3,89 \cdot 10^{-4}} = 138 \cdot 10^6 \text{ Па} = 138 \text{ МПа} < [\sigma_c] = 160 \text{ МПа}.$$

Сечение принятого профиля недогружено на 13 %. Нетрудно убедиться, что при любом ином номере профиля из сортамента будет либо недопустимая перегрузка, либо еще большая недогрузка.

#### В. Сравнение полученных стоек по расходу материала.

Площадь сечения сплошной круглой стойки  $A_{\text{сплош}} = 12,9 \text{ см}^2$ , площадь сечения стойки из двух равнобоких уголков  $2A_{\text{уг}} = 7,78 \text{ см}^2$ . Сравнение результатов показывает, что более рациональной является стойка из двух уголков.

#### Г. Определение критической силы.

Для привятой стойки  $\lambda = 97,5 < \lambda_{\text{кр}} = 100$ , следовательно, для определения критической силы используем формулу Ф.С. Ясинского для стали:

$$\sigma_{\text{кр}} = a - b\lambda = 310 - 1,14 \cdot 97,5 = 199 \text{ МПа}.$$

Определим критическую силу:

$$F_{\text{кр}} = \sigma_{\text{кр}} \cdot A = 199 \cdot 10^6 \cdot 7,78 \cdot 10^{-4} = 155 \cdot 10^3 \text{ Н} = 155 \text{ кН}.$$

Примечание. Если для принятой стойки  $\lambda \geq \lambda_{\text{кр}}$ , то критическую силу необходимо определять по формуле Эйлера:  $F_{\text{кр}} = \frac{\pi^2 EI_{\text{min}}}{(\mu l)^2}$ .

#### Д. Определение коэффициента запаса устойчивости:

$$n_y = \frac{F_{\text{кр}}}{F} = \frac{155}{67} = 2,3.$$

## 2.2 Задания для выполнения расчетно-графической работы № 2

Расчетно-графическая работа № 2 (по сопротивлению материалов) включает задания 2.1 и 2.2. Номер варианта определяется у студентов дневной формы обучения порядковым номером в журнале.

### ЗАДАНИЕ 2.1

Для вертикального или горизонтального стержня, имеющего жесткую заделку на одном из концов, необходимо:

- 1) вычертить схему в произвольном масштабе;
- 2) определить значения нормальной силы на каждом участке стержня;
- 3) построить эпюру нормальной силы;
- 4) построить эпюру перемещений;
- 5) проверить прочность и жесткость бруса.

Схемы стержней приведены на рисунке 2.5. Площадь поперечного сечения узкого участка  $A = 0,002 \text{ м}^2$ , широкого участка  $2A$ . При расчетах принять: допускаемые напряжения на растяжение  $[\sigma_p] = 20 \text{ МПа}$ ; на сжатие  $[\sigma_c] = 80 \text{ МПа}$ ; допускаемая деформация  $[\delta] = 1/500$ , модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ .

Числовые данные к расчету ступенчатых брусьев:

$a = 1 \text{ м}$ ,  $q_1 = q_3 = 10 \text{ кН/м}$ ,  $q_2 = 25 \text{ кН/м}$ ,  $F_1 = 15 \text{ кН}$ ,  $F_2 = 30 \text{ кН}$ ,  $F_3 = 20 \text{ кН}$ .

*Примечание.* По указанию преподавателя числовые данные могут быть изменены.

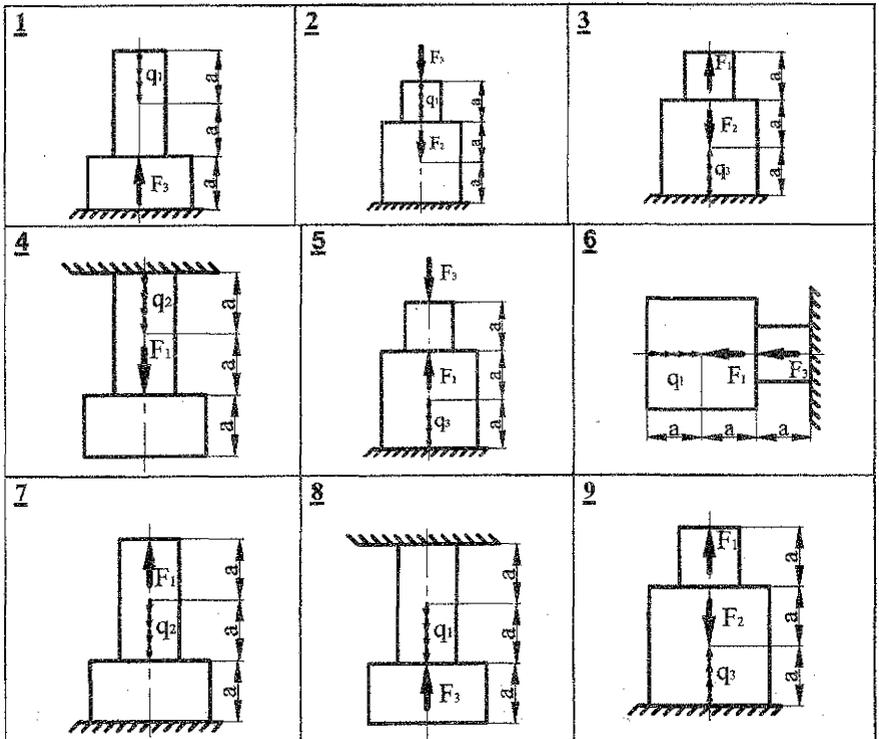
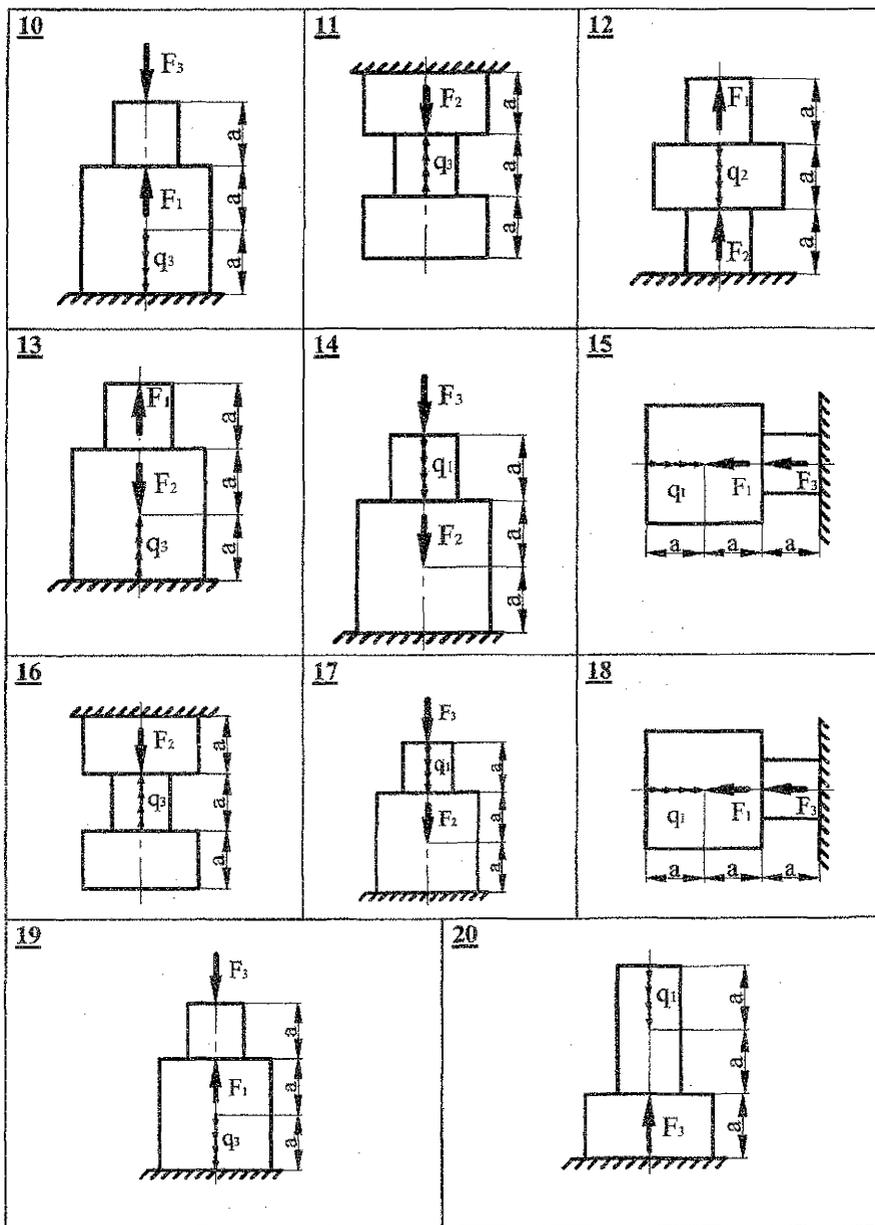


Рисунок 2.5 – Схемы ступенчатых брусьев



Продолжение рисунка 2.5

## ЗАДАНИЕ 2.2

Балки, закрепленные различным образом, загружены внешними нагрузками (сосредоточенной силой, парой сил, распределенной нагрузкой).

Требуется:

1. Построить эпюры поперечных сил  $Q$  и изгибающих моментов  $M$ .
2. Указать положение опасного сечения балок.
3. Для деревянной балки (а) подобрать размеры квадратного поперечного сечения из условия прочности, если  $[\sigma] = 10 \text{ МПа}$ .
4. Для стальной двутавровой балки (б) подобрать номер прокатного профиля из условия прочности, а также произвести проверку прочности по касательным напряжениям.

При расчетах принять для стали: модуль упругости  $E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$ ,  $[\sigma] = 160 \text{ МПа}$ ,  $[\tau] = 100 \text{ МПа}$ . Исходные данные принять согласно схемам (рисунок 2.6).

Числовые данные к расчету балок:

$a = 2 \text{ м}$ ,  $b = 3 \text{ м}$ ,  $F = 60 \text{ кН}$ ,  $M = 80 \text{ кН}\cdot\text{м}$ ,  $q = 80 \text{ кН/м}$ .

*Примечание.* По указанию преподавателя числовые данные могут быть изменены.

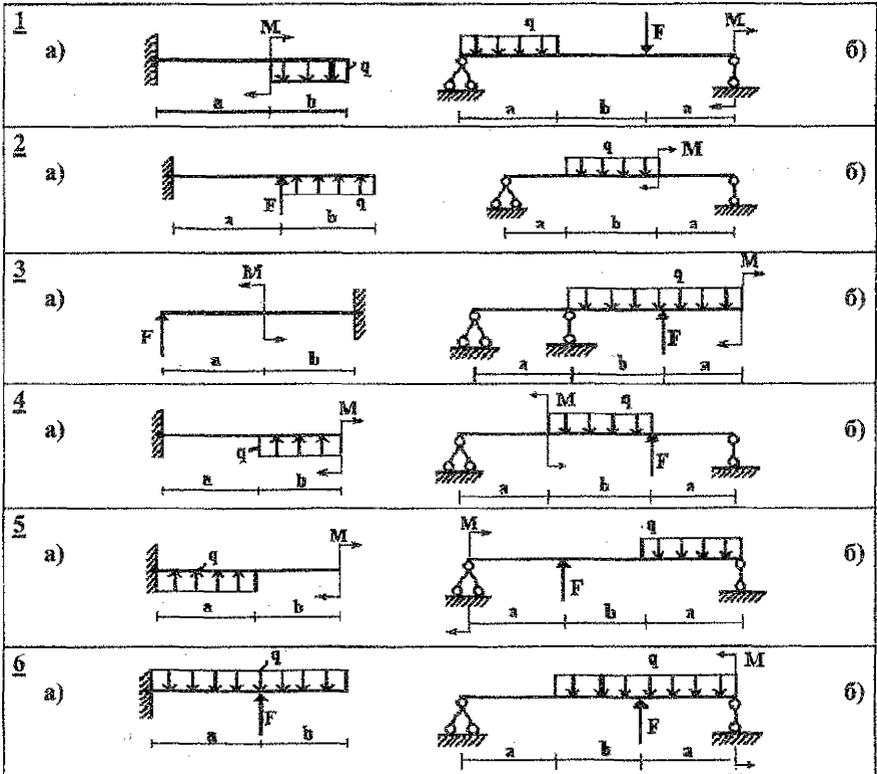
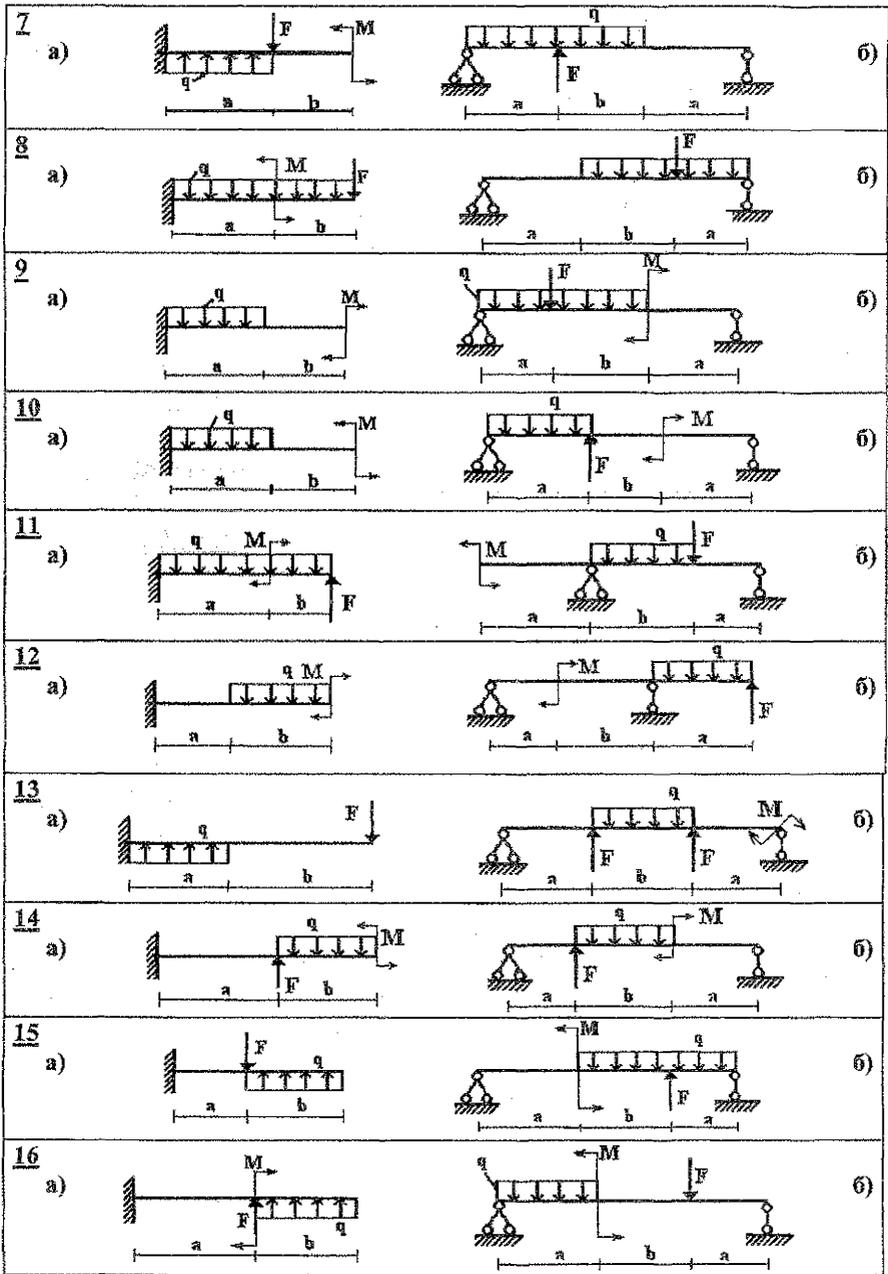
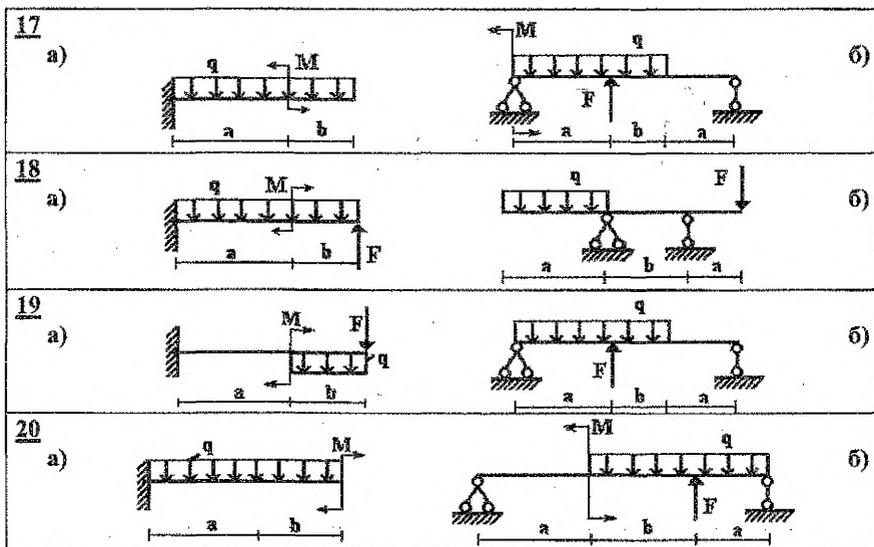


Рисунок 2.6 – Схемы балок



Продолжение рисунка 2.6



Продолжение рисунка 2.6

### 3. ПРИЛОЖЕНИЕ

Таблица 3.1 – Значения коэффициентов  $\varphi$  для различных материалов

Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Сталь марок Ст 3 с Ст.2,3,4	Стали		Чугун	Дерево независимо от породы	Дюр-алюминий	Бетон		Каменная кладка
		Ст.5	СПК				тяжёлый	лёгкий	
0	1,00	1,00	1,00	1,00	1,00	1,000	1,00	1,00	1,00
10	0,99	0,98	0,98	0,97	0,99	0,999	1,00	1,00	0,99
20	0,96	0,95	0,95	0,91	0,97	0,998	0,98	0,96	0,96
30	0,94	0,92	0,91	0,81	0,93	0,835	0,90	0,86	0,91
40	0,92	0,89	0,87	0,69	0,87	0,700	0,84	0,73	0,85
50	0,89	0,86	0,83	0,57	0,80	0,568	0,76	0,68	0,78
60	0,86	0,82	0,79	0,44	0,71	0,455	0,70	0,59	0,71
70	0,81	0,76	0,72	0,34	0,60	0,353	0,63	0,52	0,65
80	0,75	0,70	0,65	0,26	0,48	0,269	0,57	0,46	0,58
90	0,69	0,62	0,55	0,20	0,38	0,212	0,51	-	0,52
100	0,60	0,51	0,43	0,16	0,31	0,172	0,45	-	0,47
110	0,52	0,43	0,35	-	0,25	0,142	-	-	0,42

Гибкость стержня $\lambda = \frac{\mu \cdot l}{i}$	Сталь марок Ст 0 Ст.2,3,4	Стали		Чугун	Дереву независимо от породы	Дюр-алюми- ный	Бетон		Каменная кладка
		Ст.5	СПК				тяжёлый	лёгкий	
120	0,45	0,36	0,30	-	0,22	0,119	-	-	0,38
130	0,40	0,33	0,26	-	0,18	0,101	-	-	0,34
140	0,36	0,29	0,23	-	0,16	0,087	-	-	0,31
150	0,32	0,26	0,21	-	0,14	0,076	-	-	0,28
160	0,29	0,24	0,19	-	0,12	-	-	-	-
170	0,26	0,21	0,17	-	0,11	-	-	-	-
180	0,23	0,19	0,15	-	0,10	-	-	-	-
190	0,21	0,17	0,14	-	0,09	-	-	-	-
200	0,19	0,16	0,13	-	0,08	-	-	-	-
210	0,17	0,14	-	-	-	-	-	-	-
220	0,16	0,13	-	-	-	-	-	-	-

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Тарг, С. М. Краткий курс теоретической механики: учебник для вузов / С. М. Тарг. – 15 изд. стер. – М.: Высшая школа, 2005. – 416 с.
2. Путьга, Т. В. Прикладная механика / Т. В. Путьга, Н. С. Можаровский [и др.]. – Киев.: Вища школа, 1977. – 536 с.
3. Бутенин, П. В. Курс теоретической механики: в 2-х томах / П. В. Бутенин, Я. Л. Луцц, Д. Р. Меркин. – СПб.: Лань, 2002. – 736 с.
4. Мещеряков, И. В. Задачи по теоретической механике: учебное пособие. – 38 изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2001. – 448 с.
5. Айзенберг, Т. Б. Руководство к решению задач по теоретической механике / Т. Б. Айзенберг [и др.]. – М.: Наука, 1970. – 416 с.
6. Белиев, Н. М. Сопротивление материалов. — М.: Наука, 1976. – 607 с.
7. Феодосьев, В. И. Сопротивление материалов: учебник для вузов. – 9 изд., перераб. – М.: Наука, 1986. – 512 с.
8. Дарков, А. В. Сопротивление материалов: учебник для вузов. – Изд. 4-е / А. В. Дарков, Г. С. Шпиро. – Высш. школа, 1975.
9. Миролотов, И. Н. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И. Н. Миролотов [и др.]. – М.: Машиностроение, 1974. – 493 с.
10. Борисов, М. И. Основы технической механики и детали механизмов приборов / М. И. Борисов, Ф. Г. Зуев. – М.: Машиностроение, 1977. – 341 с.
11. Мовнин, М. С. Основы технической механики / М. С. Мовнин [и др.]. – Л.: Судостроение, 1969. – 568 с.
12. Яровая, А. В. Решение задач по технической механике / А. В. Яровая, Д. В. Леоненко, В. В. Талеский. – Гомель: БелГУТ, 2005. – 103 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: *Андрей Иванович Веремейчик*  
*Игорь Геннадьевич Томашев*  
*Виталий Владимирович Гарбачевский*  
*Виталий Михайлович Хаисевич*

## **РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИЕ РАБОТЫ ПО ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ**

Методические указания  
для студентов специальности  
2- 27 01 01 – «Экономика и организация производства»

Ответственный за выпуск: *Томашев И. Г.*  
Редактор: *Боровикова Е. А.*  
Компьютерная вёрстка: *Митлошук М. А.*  
Корректор: *Никитчик Е. В.*

---

Подписано в печать *13. 10* 2016 г. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub> Бумага писчая.  
Усл. п.л. 1,86. Уч. изд. л. 2. Заказ № 1043. Тираж 40 экз.  
Отпечатано на ризографе учреждения образования  
«Брестский государственный технический университет».  
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.