

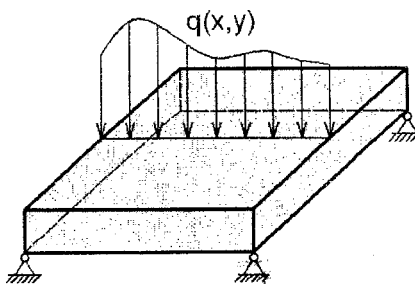
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
Учреждение образования
“Брестский государственный технический университет”
Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН

ЗАДАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-графической работы № 3
по дисциплине «Теория упругости и пластичности»

для студентов специальностей
1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”,
1- 70 03 01 – “Автомобильные дороги”



Брест 2009

УДК 539.3: 624.04

В инженерной практике часто возникают задачи, которые сводятся к расчету напряженно-деформированного состояния (НДС) панелей, плит перекрытий, настилов и т.д., что невозможно осуществить методами сопротивления материалов.

Настоящие методические указания дают возможность студентам ознакомиться с классическими методами теории упругости и, в частности, их применения для расчета пластинок, которые моделируют элементы указанных строительных конструкций.

Основная цель методических указаний – ознакомить студентов с основами методики расчета тонких пластин и привить им навыки самостоятельной работы при анализе напряженно-деформированного состояния элементов строительных конструкций с помощью ПЭВМ.

Составители: В. Л. Мартиновский, доцент
А. И. Веремейчик, ст. преподаватель
В.М. Хвисевич, доцент

цензент: директор филиала РУП «Институт БелНИИС» -
«Научно-технический центр», д-р техн. наук А.Я. Найчук

СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения	3
Требования к оформлению расчетно-графических работ	3
Краткие теоретические сведения	3
Условие задания	7
Пример расчета	10
Контрольные вопросы	19
Литература	19

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Пластины в настоящее время находят широкое применение в различных областях техники – строительстве (в виде настилов, панелей, плит покрытий, плит для фундаментов массивных зданий и т. д.), авиации, машиностроении, судостроении и т.д. Это объясняется тем, что присущие тонкостенным конструкциям легкость и рациональность форм сочетаются с их высокой несущей способностью, экономичностью и хорошей технологичностью.

Данные методические указания соответствуют базовым учебным планам специальностей 1 - 70 02 01, 1 - 70 03 01 и включают в себя краткие теоретические сведения по разделу «Расчет тонких пластин», условие задания и примеры расчета.

При защите расчетно-графической работы необходимо ответить на вопросы, связанные с ее выполнением, и уметь решать контрольные задачи по ее тематике.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

1. Расчетно-проектировочная работа выполняется на отдельных листах формата А4.
2. Порядок оформления: титульный лист; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; выводы; перечень литературы.
3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов согласно стандарту БрГТУ.
4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до сотых долей.
5. Эпюры необходимо строить на одном листе с расчетной схемой, на эпюрах указывать числовые значения характерных ординат и единицы расчетных величин.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

Пластинкой называется тело призматической или цилиндрической формы, у которого толщина мала по сравнению с другими размерами, т.е. $h \ll a \sim b$ (рис. 1).

Пластинки, которые будем рассматривать в данной работе, являются тонкими, жесткими, упругими и прямоугольными. Это значит, что толщина их h не превышает $1/5$ наименьшего размера в плане, а наибольший прогиб w не превышает $1/4$ толщины.

Задача о расчете пластинок является трехмерной, однако вследствие некоторых гипотез, она сводится к двумерной. Широкое практическое применение

получила техническая теория изгиба на основе гипотез, предложенных немецким физиком Г. Кирхгофом. Согласно этим допущениям, все напряжения и деформации можно выразить через функцию прогибов срединной поверхности пластинки $w(x, y)$.

Считаем, что пластинка находится под действием поперечной нагрузки, т.е. нормальной к срединной плоскости, а срединная плоскость совпадает с плоскостью XOY прямоугольной системы координат. Ось z направлена по вертикали вниз (рис. 1). Начало координат (т. O) выбирается в зависимости от конкретной задачи.

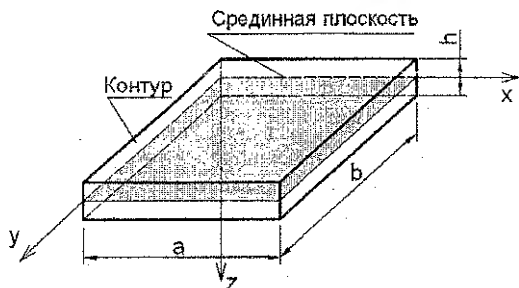


Рис. 1. Схема пластинки

Усилия в сечениях пластинки, нормальных к ее срединной плоскости, выраженные через функцию прогибов $w(x, y)$ (погонные, т. е. приходящиеся на единицу ширины сечения), определяются по формулам:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right), \quad M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right),$$

$$M_{xy} = M_{yx} = -D(1-\mu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y},$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right), \quad Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right),$$
(1)

где M_x, M_y – погонные изгибающие моменты в сечениях с нормалью x и y соответственно; $M_{xy} = M_{yx}$ – погонные крутящие моменты в тех же сечениях;

Q_x, Q_y – погонные перерезывающие (поперечные) силы в тех же сечениях;

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\mu^2)}$$

– цилиндрическая жесткость при изгибе.

Напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{zx}, \tau_{zy}$ связаны с M_x, M_y следующим образом:

$$\sigma_x = \frac{M_x \cdot z}{J}; \quad \sigma_y = \frac{M_y \cdot z}{J}; \quad \tau_{xy} = \frac{M_{xy} \cdot z}{J}; \quad \tau_{zx} = -\frac{Q_x \cdot S_x}{J}; \quad \tau_{zy} = -\frac{Q_y \cdot S_y}{J}; \quad (2)$$

где $J = \frac{h^3}{12}$ — погонный момент инерции сечения пластинки;

$S_x = S_y = \frac{1}{2} \left(\frac{h^2}{4} - z^2 \right)$ — статический момент отсеченной части площади сечения.

Эти формулы аналогичны формулам, полученным в сопротивлении материалов при изгибе балки прямоугольного сечения шириной, равной единице.

Действие силовых факторов и распределение напряжений в сечениях пластинки показаны на рис. 2, 3, 4.

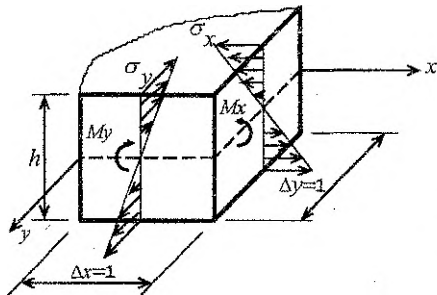


Рис.2. Эпюры напряжений σ_x, σ_y

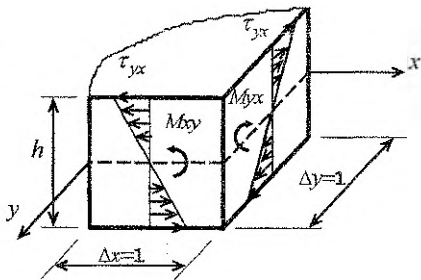


Рис.3. Эпюры напряжений τ_{yx}, τ_{xy}

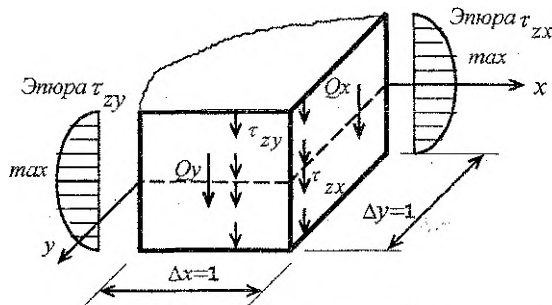


Рис.4. Эпюры напряжений τ_{zy}, τ_{zx}

Примечание. На рис. 2, 3, 4 показаны положительные направления указанных усилий.

Из формул (1) и (2) следует, что для определения усилий и напряжений необходимо знать функцию прогибов $w(x, y)$, которая должна в каждой точке пластинки удовлетворять следующим требованиям:

а) основному дифференциальному уравнению ее изогнутой поверхности (уравнению Софи Жермен);

б) условиям на опорном контуре (граничным условиям).

Уравнение Софи Жермен имеет вид:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D}, \quad (3)$$

или

$$\nabla^4 w = \frac{q}{D}, \quad (3')$$

где ∇ – оператор Лапласа, $q(x, y)$ – распределенная нормально к поверхности пластинки нагрузка.

Укажем, каковы должны быть граничные условия для функции $w(x, y)$ в различных случаях закрепления пластинки (рис.5).

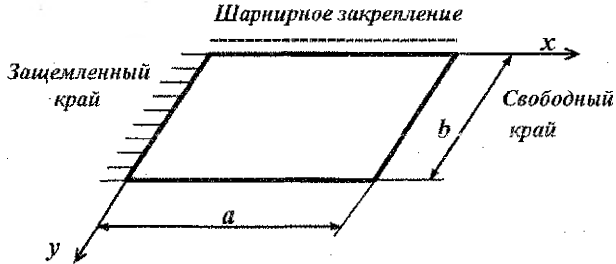


Рис. 5. Варианты закрепления граней пластинки

Согласно (3), для каждого края пластинки должно быть два граничных условия.

1. Зашемленный край:

при $x=0$: прогиб $w=0$,

угол поворота $\frac{\partial w}{\partial x}=0$.

2. Шарнирно опертый край:

при $y=0$: прогиб $w=0$,

изгибающий момент $M_y = \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$.

3. Свободный край:

при $x=a$: изгибающий момент $M_x = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$,

приведенная поперечная сила $Q_x^{прив} = \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0$.

Здесь рассмотрены три основных способа закрепления краев пластинки (зашемленный, опертый и свободный края) и показаны соответствующие граничные условия для функции w . На практике приходится встречаться и с другими (промежуточными) способами закрепления. Например, встречается такое закрепление края пластинки, когда прогиб по краю невозможен, поворот же края возможен, но сопровождается появлением изгибающих моментов пропорциональных повороту – упруго заделанный край ($w=0, \varphi \neq 0, M \neq 0$). Иногда край пластинки опирается не на жесткий контур, а на какую-либо балку – упруго опертый край ($w \neq 0, Q \neq 0$). Возможны, конечно, и другие способы закрепления. Составление граничных условий для различных случаев на основании того, что было сделано для трех основных способов закрепления, не представит никаких трудностей.

Задача об изгибе пластинки будет решена, если будет найдена функция $w(x, y)$, удовлетворяющая уравнению (3) и граничным условиям. Эта задача в некоторых случаях решается обратным методом, т. е. задается вид функции прогибов $w(x, y)$, а затем определяются нагрузки и условия закрепления, которым соответствует эта функция.

Очень часто расчет производится приближенным методом Бубнова-Галеркина. Он состоит в том, что для заданной нагрузки $q(x, y)$ задается вид функции $w(x, y)$, удовлетворяющей только граничным условиям. При подстановке $w(x, y)$ и $q(x, y)$ в уравнение Софи Жермен последнее может тождественно, для всех точек пластинки не удовлетворяться. Поэтому уравнение удовлетворяет в среднем для всей площади пластинки, т. е. в интегральном смысле.

Исходя из этого, получают следующее выражение, которое называется уравнением Бубнова-Галеркина:

$$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS, \quad (4)$$

где S – плоская область, ограниченная контуром пластинки.

УСЛОВИЕ ЗАДАНИЯ

Для указанных в таблице 1 схем пластинок, функций нагрузок $q(x, y)$ и функций прогибов $w(x, y)$ требуется:

- 1) установить граничные условия, которым удовлетворяет функция прогибов $w(x, y)$;
- 2) проверить, удовлетворяет ли функция $w(x, y)$ уравнению Софи Жермен

$\nabla^2 \nabla^2 w = \frac{q}{D}$, и если это не так, то использовать уравнение Бубнова-Галеркина:

$$\iint_S (\nabla^2 \nabla^2 w) w dS = \iint_S \frac{q}{D} w dS.$$

Из этих уравнений определить постоянную C и вычислить максимальный прогиб W_{max} :

- 3) по формулам для $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ составить их выражения для своего варианта;
- 4) в опасных сечениях пластинки построить эпюры M_x, M_{xy}, Q_x в сечении, перпендикулярном оси x , и эпюры M_y, M_{xy}, Q_y в сечении, перпендикулярном оси y ;
- 5) в этих же сечениях пластинки построить эпюры напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}$,

τ_{zx}, τ_{zy} по ее толщине;

- 6) исходя из энергетической теории прочности, подобрать толщину пластинки h .

Числовые данные приведены в таблице 2.

Таблица 1- Варианты пластин

№ п/п	Схема пластинки (рис. 6)	Уравнения поперечной нагрузки $q(x, y)$	Функции прогибов $w(x, y)$
1	1	$q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$w = C(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$
2	2	$q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2}$	$w = C(x^2 - a^2)(y^2 - b^2)$

№ п/п	Схема пластины (рис. 6)	Уравнения поперечной нагрузки $q(x, y)$	Функции прогибов $w(x, y)$
3	1	$q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$	$w=Cxy(x-a)(y-b)$
4	1	$q=q_0=\text{const}$	$w=Cxy(x^2-a^2)(y^2-b^2)$
5	1	$q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a}$	$w=Cxy(x^2-a^2)(y^2-b^2)$
6	2	$q=q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$w=C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
7	1	$q=q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$w=Cxy(x-a)(y-b)$
8	2	$q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$	$w=C \cdot (x^2-a^2)^2 (y^2-b^2)^2$
9	1	$q=q_0(x^2-y^2)$	$w=C(x-a)(y-b)xy$
10	1	$q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$	$w=C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
11	2	$q=q_0(x^2+y^2)$	$w=C(x^2-a^2)(y^2-b^2)$
12	1	$q=q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$w=C(x-a)^2(y-b)^2$
13	2	$q=q_0(x^2-a^2)(y^2-b^2)$	$w=C(x^2-a^2)(y^2-b^2)$
14	1	$q=q_0 \cos \frac{\pi y}{2b}$	$w=C(x^2-a^2)^2(y^2-b^2)^2$
15	2	$q=q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$w=C(x^2-a^2)(y^2-b^2)$
16	1	$q=q_0=\text{const}$	$w=C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
17	2	$q=q_0=\text{const}$	$w=C(x^2-a^2)(y^2-b^2)$
18	1	$q=q_0 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$	$w=C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
19	1	$q=q_0=\text{const}$	$w=C(x-a)^2(y-b)^2$
20	2	$q=q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$w=C \left(\cos \frac{\pi x}{2a} + \cos \frac{\pi y}{2b} \right)$
21	1	$q=q_0=\text{const}$	$w=Cx^2y^2(x-a)(y-b)$
22	2	$q=q_0 \left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} \right)$	$w=Cx^2y^2 \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right)$
23	1	$q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$	$w=Cx^2y^2(x-a)(y-b)$
24	1	$q=q_0 \cdot (x^2-a^2) \cdot (y^2-b^2)$	$w=C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
25	1	$q=q_0 \left[\frac{1}{b^4} - \left(\frac{1}{b^2} + \frac{4}{a^2} \right) \times \cos \frac{2\pi x}{a} \right] \sin \frac{\pi y}{b}$	$w=C \left(1 - \cos \frac{2\pi x}{a} \right) \sin \frac{\pi y}{b}$

№ п/п	Схема пластины (рис. 6)	Уравнения поперечной нагрузки $q(x, y)$	Функции прогибов $w(x, y)$
26	2	$q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$	$w=C \sin \frac{\pi x}{a} \cos \frac{\pi y}{2b}$
27	1	$q=q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$	$w=C \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{2\pi y}{b}$
28	2	$q=q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}$	$w=C \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{\pi y}{b}$
29	1	$q=q_0 \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$	$w=C \sin \frac{2\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b}$
30	2	$q=q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$	$w=C \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}$

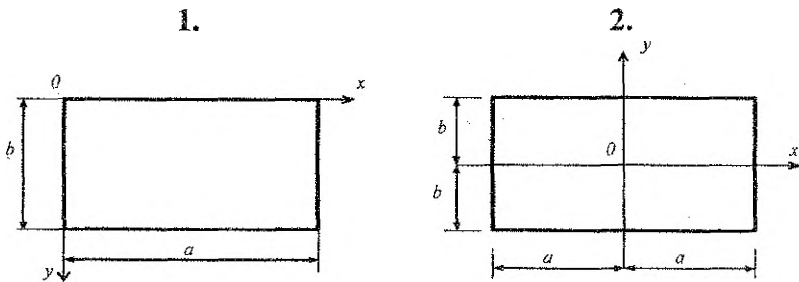


Рис. 6. Схемы пластин

Таблица 2. Числовые данные

№ п/п	a , м	b , м	μ	E , МПа	$[\sigma]$, МПа	q_0 , МПа
1	1,8	1,4	0,23	$1,9 \cdot 10^5$	160	1,8
2	2,0	1,6	0,22	$1,95 \cdot 10^5$	165	1,9
3	2,2	1,8	0,21	$2,0 \cdot 10^5$	170	2,1
4	2,4	1,6	0,20	$2,15 \cdot 10^5$	175	2,0
5	2,6	1,8	0,24	$2,20 \cdot 10^5$	180	2,2
6	2,8	1,4	0,25	$2,25 \cdot 10^5$	185	2,3
7	3,0	1,6	0,26	$2,30 \cdot 10^5$	190	2,5
8	2,8	1,8	0,27	$2,35 \cdot 10^5$	195	2,4
9	2,6	1,2	0,28	$2,40 \cdot 10^5$	200	2,6
10	2,4	1,4	0,29	$2,35 \cdot 10^5$	205	2,8
11	2,2	1,5	0,30	$2,30 \cdot 10^5$	210	2,7
12	2,0	1,7	0,31	$2,25 \cdot 10^5$	215	2,9
13	3,0	1,9	0,32	$2,20 \cdot 10^5$	200	3,0
14	2,8	1,6	0,33	$2,15 \cdot 10^5$	225	3,1
15	2,6	1,4	0,30	$2,10 \cdot 10^5$	230	3,2
16	1,6	2,8	0,29	$2,05 \cdot 10^5$	235	2,5
17	1,8	3,0	0,28	$2,00 \cdot 10^5$	240	2,1

№ п/п	a, м	b, м	μ	E, МПа	$[\sigma]$, МПа	q_0 , МПа
18	2,0	1,8	0,27	$1,95 \cdot 10^5$	235	2,3
19	1,4	2,6	0,26	$1,90 \cdot 10^5$	230	1,9
20	1,5	2,2	0,25	$1,95 \cdot 10^5$	225	2,4
21	1,7	2,7	0,24	$2,00 \cdot 10^5$	220	2,2
22	1,9	2,9	0,23	$2,05 \cdot 10^5$	215	2,6
23	1,5	2,8	0,22	$2,10 \cdot 10^5$	210	2,8
24	1,7	2,5	0,21	$2,15 \cdot 10^5$	205	2,7
25	1,9	2,3	0,20	$2,20 \cdot 10^5$	200	2,9
26	1,6	2,4	0,25	$2,25 \cdot 10^5$	195	3,1
27	1,8	2,6	0,26	$2,30 \cdot 10^5$	190	3,0
28	1,7	2,8	0,27	$2,35 \cdot 10^5$	185	3,2
29	1,5	2,2	0,28	$2,40 \cdot 10^5$	180	1,8
30	1,9	2,5	0,29	$2,30 \cdot 10^5$	175	2,0

ПРИМЕРЫ РАСЧЕТА

Пример 1

Установить, каким граничным условиям удовлетворяет функция прогибов

$$w = C \left[\cos \frac{\pi x}{2a} + \cos \frac{\pi y}{2b} \right] \text{ для заданной пластинки.}$$

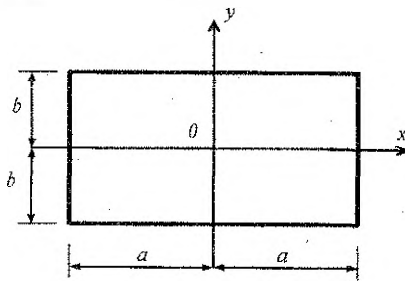


Рис. 7. Расчетная схема пластинки

Решение

Рассмотрим края пластинки, параллельные оси y , т.е. при $x = \pm a$.

Вычислим прогибы:

$$w = C \left[\cos \frac{\pi a}{2a} + \frac{\pi y}{2b} \right] = C \cdot \cos \frac{\pi y}{2b} \neq 0.$$

Углы поворота:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -C \cdot \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi x}{2a}; \text{ при } x = \pm a, \quad \frac{\partial w}{\partial x} = \pm C \cdot \frac{\pi}{2a} \neq 0.$$

Аналогично получим выражения для прогибов и углов поворота при $y = \pm b$:

$$w = C \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} \neq 0;$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = C \cdot \frac{\pi}{2b} \neq 0.$$

Из этого следует, что края пластинки могут прогибаться и поворачиваться, это дает возможность считать, что края пластинки свободны от закрепления, то

есть здесь имеет место свободный край. Для свободного края имеем следующие граничные условия:

$M_x=0$ или $M_y=0$ – изгибающие моменты;

$Q_x^{прив}=0$ или $Q_y^{прив}=0$ – приведенные поперечные силы.

Вычислим производные:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -C \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2a}; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = C \left(\frac{\pi}{2a} \right)^3 \sin \frac{\pi x}{2a}; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} = 0;$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -C \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \cos \frac{\pi y}{2b}; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = C \left(\frac{\pi}{2b} \right)^3 \sin \frac{\pi y}{2b}; \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0.$$

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) = D \cdot C \cdot \mu \left(\frac{\pi}{2b} \right)^2 \cos \frac{\pi y}{2b} \neq 0;$$

$$Q_x^{прив} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right] = D \cdot C \left(\frac{\pi}{2a} \right)^3 \neq 0;$$

при $y = \pm b$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = D \cdot C \cdot \mu \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2a} \neq 0;$$

$$Q_y^{прив} = -D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2-\mu) \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} \right] = D \cdot C \left(\frac{\pi}{2b} \right)^3 \neq 0.$$

Как видно из вычислений, граничные условия в данном случае не равны нулю, т.е. закрепление пластинки не установлено.

Так как пластинка должна быть закреплена, исследуем ее закрепление в углах.

То есть при $x = \pm a$ и $y = \pm b$ получим:

$$w=0; \quad \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0; \quad \frac{\partial w}{\partial y} \neq 0; \quad M_x=0; \quad M_y=0.$$

Отсюда следует, что пластинка шарнирно оперта в углах.

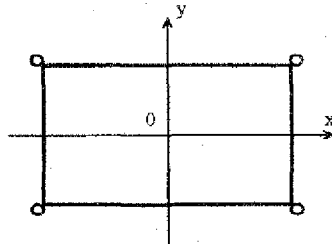
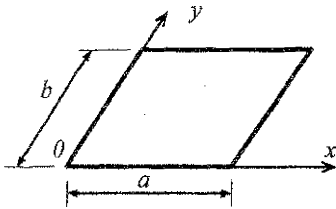


Рис. 8. Схема закрепления пластинки

Пример 2

Для данной пластинки определить максимальный прогиб пластинки w_{max} .

Дано:



$$q = q_0 \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b},$$

$$w = C \cdot xy(x-a)(y-b).$$

$$a=2 \text{ м}; \quad b=4 \text{ м};$$

$$q_0=1 \text{ МПа}; \quad h=0,1 \text{ м};$$

$$E=2 \cdot 10^5 \text{ МПа}; \quad \mu=0,3.$$

Рис. 9. Расчетная схема пластинки

Решение

Воспользуемся уравнением Софи Жермен (3). Для этого вычислим производные:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 0; \quad \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = 4C.$$

Подставим значения производных и $q(x, y)$ в уравнение (3)

$$8C \neq \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b};$$

видим, что оно не удовлетворяется, т.к. слева стоит постоянная величина $8C$, а справа – переменная.

Применим метод Бубнова-Галеркина (4):

$$\int_0^a \int_0^b 8C \cdot Cxy(x-a)(y-b) dx dy = \int_0^a \int_0^b \frac{q_0}{D} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} Cxy(x-a)(y-b) dx dy.$$

Выполняя интегрирование, получим:

а) левая часть уравнения:

$$\int_0^a \int_0^b xy(x-a)(y-b) dx dy = \int_0^a dx \int_0^b (x^2 y^2 - axy^2 - bx^2 y + abxy) dy;$$

$$\int_0^b (x^2 y^2 - axy^2 - bx^2 y + abxy) dy = \frac{b^3}{6} (ax - x^2);$$

$$\frac{b^3 a}{6} \int_0^a (ax - x^2) dx = \frac{a^3 b^3}{36}.$$

Итак, слева имеем:

$$\frac{8a^3 b^3}{36} C = \frac{2a^3 b^3}{9} C;$$

б) правая часть уравнения:

$$\int_0^a \int_0^b \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{\pi y}{b} (x^2 y^2 - axy^2 - bx^2 y + abxy) dx dy.$$

Проинтегрируем сначала по y :

$$(x^2 - ax) \int_0^{\frac{\pi}{\epsilon}} \left(y^2 \sin \frac{\pi y}{\epsilon} - \epsilon y \sin \frac{\pi y}{\epsilon} \right) dy.$$

Введем замену $\frac{\pi y}{\epsilon} = z$, получим:

$$\frac{\epsilon^3 \pi}{\pi^3} \int_0^{\pi} z^2 \sin z dz = \frac{\epsilon^3}{\pi^3} \int_0^{\pi} z^2 d(-\cos z) = \frac{\epsilon^3}{\pi^3} (\pi^2 - 4);$$

$$-\epsilon \int_0^{\frac{\pi}{\epsilon}} y \sin \frac{\pi y}{\epsilon} dy = -\frac{\epsilon^3 \pi}{\pi^3} \int_0^{\pi} z \sin z dz = -\frac{\epsilon^3}{\pi};$$

тогда

$$\int_0^{\frac{\pi}{\epsilon}} \left(y^2 \sin \frac{\pi y}{\epsilon} - \epsilon y \sin \frac{\pi y}{\epsilon} \right) dy = \frac{\epsilon^3}{\pi^3} (\pi^2 - 4) - \frac{\epsilon^3}{\pi} = -\frac{4\epsilon^3}{\pi^3}.$$

Теперь интегрируем по x :

$$\frac{4\epsilon^3 a}{\pi^3} \int_0^a (ax - x^2) \sin \frac{\pi x}{a} dx = \frac{4\epsilon^3 a}{\pi^3} \int_0^a \left(ax \sin \frac{\pi x}{a} - x^2 \sin \frac{\pi x}{a} \right) dx = \frac{16a^3 \epsilon^3}{\pi^6}.$$

Итак, справа имеем:

$$\frac{16q_0 a^3 \epsilon^3}{D \pi^6}$$

Приравняв правую и левую части, получим:

$$\frac{2a^3 \epsilon^3}{9} C = \frac{16q_0 a^3 \epsilon^3}{D \pi^6}.$$

Отсюда

$$C = \frac{72q_0}{D \pi^6}.$$

Цилиндрическая жесткость пластинки D вычисляется по формуле:

$$D = \frac{Eh^3}{12(1 - \mu^2)} = \frac{2 \cdot 10^5 \cdot 0,1^3}{12(1 - 0,3^2)} = 18,31 \text{ МПа} \cdot \text{м}^3.$$

Вычислим постоянную C :

$$C = \frac{72 \cdot 1}{18,31 \cdot 3,14^6} = 0,0041 \text{ м}^3.$$

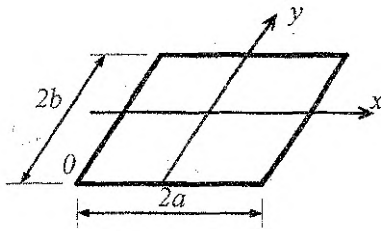
Анализ функции прогибов свидетельствует, что максимальный прогиб w_{\max} пластинка имеет в точке с координатами $x=a/2$, $y=\epsilon/2$.

Итак,

$$w_{\max} = \frac{0,0041}{16} \cdot a^2 b^2 = \frac{0,0041}{16} \cdot 2^2 \cdot 4^2 = 0,0164 = 16,4 \text{ мм}.$$

Пример 3

Для заданной пластинки, функции нагрузки и функции прогибов, произвести расчет пластинки согласно требованиям условия задания.



Дано:

$$q = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b},$$

$$w = C \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b},$$

$$a = 3 \text{ м},$$

$$\mu = 0,3,$$

$$b = 2 \text{ м},$$

$$E = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа},$$

$$q_0 = 2 \text{ МПа},$$

$$[\sigma] = 200 \text{ МПа}.$$

Рис. 10. Расчетная схема пластинки

Решение

1. Установим, каким граничным условиям удовлетворяет функция прогибов $w(x, y)$.

$$\text{При } x = \pm a, w = 0, \quad y = \pm b, w = 0.$$

Следовательно, пластинка оперта по всем четырем краям. Определим тип опирания. Углы поворота:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -C \frac{\pi}{2a} \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b},$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -C \frac{3\pi}{2b} \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b},$$

$$\text{при } x = \pm a, \frac{\partial w}{\partial x} \neq 0, \quad y = \pm b, \frac{\partial w}{\partial y} \neq 0.$$

Значит, пластинка не защемлена. Проверим шарнирное опирание.

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -C \left(\frac{\pi}{2a} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b},$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -C \left(\frac{3\pi}{2b} \right)^2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b},$$

$$\text{тогда при } x = \pm a, \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad y = \pm b, \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0.$$

Итак, пластинка шарнирно оперта по всем четырем краям (рис. 11).

2. Проверим, удовлетворяется ли уравнение Софи Жермен. Для этого вычислим производные:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = C \left(\frac{\pi}{2a} \right)^4 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b},$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} = C \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = C \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^4 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}.$$

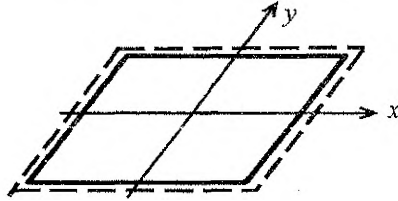


Рис.11. Схема закрепления пластинки

Подставим значения производных и $q(x, y)$ в уравнение (3):

$$C \cdot D \cdot \pi^4 \left[\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{3}{2b}\right)^2 \right]^2 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b} = q_0 \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

видим, что уравнение выполняется при соответствующем выражении для C .

Определяем постоянную C :

$$C = \frac{q_0}{D \cdot \pi^4 \left[\left(\frac{1}{2a}\right)^2 + \left(\frac{3}{2b}\right)^2 \right]^2}.$$

3. Составим выражения для $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x, Q_y$ по формулам (1).

Вычислим производные: $\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} = C \left(\frac{\pi}{2a}\right)^3 \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b};$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} = C \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^3 \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = C \left(\frac{\pi}{2a}\right) \left(\frac{3\pi}{2b}\right) \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = C \frac{\pi}{2a} \left(\frac{3\pi}{2b}\right)^2 \sin \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = C \left(\frac{\pi}{2a}\right)^2 \left(\frac{3\pi}{2b}\right) \cos \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b}.$$

Тогда с учетом выражения C , получим:

$$M_x = \frac{4q_0}{\pi^2} \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \mu \frac{9}{b^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2}\right)^2} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b}; \quad M_y = \frac{4q_0}{\pi^2} \frac{\left(\frac{9}{b^2} + \mu \frac{1}{a^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2}\right)^2} \cos \frac{\pi x}{2a} \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$M_{xy} = -\frac{12q_0(1-\mu)}{ab\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2}\right)^2} \sin \frac{\pi x}{2a} \sin \frac{3\pi y}{2b};$$

$$Q_x = -\frac{2q_0 \left(\frac{1}{a^3} + \frac{9}{ab^2}\right)}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2}\right)^2} \cdot \sin \frac{\pi x}{2a} \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b};$$

$$Q_y = -\frac{2q_0 \left(\frac{27}{b^3} + \frac{9}{a^2 b}\right)}{\pi \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2}\right)^2} \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} \cdot \sin \frac{3\pi y}{2b}.$$

4. Построим эпюры M_x , M_{yx} , Q_x в сечении $x=0$ и эпюры M_y , M_{xy} , Q_y в сечении $y=0$.

$$x=0, \quad M_x = \frac{4q_0}{\pi^2} \frac{\left(\frac{1}{a^2} + \mu \frac{9}{b^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2}\right)^2} \cos \frac{3\pi y}{2b} = 114 \cdot \cos \frac{3\pi y}{2b} \text{ (кН)}$$

$$M_{yx}=0; \quad Q_x=0;$$

при $y=\pm b$: $M_x=0,114 \cdot 10^6 \cdot 0 = 0$;

при $y=\pm b/2$: $M_x=0,114 \cdot 10^6 \cdot (-0,707) = -81 \text{ кН}$;

при $y=0$: $M_x=0,114 \cdot 10^6 \cdot 1 = 114 \text{ кН}$;

$$y=0, \quad M_y = \frac{4q_0}{\pi^2} \frac{\left(\frac{9}{b^2} + \mu \frac{1}{a^2}\right)}{\left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2}\right)^2} \cos \frac{\pi x}{2a} = 332 \cdot \cos \frac{\pi x}{2a} \text{ (кН)}$$

$$M_{xy}=0; \quad Q_y=0;$$

при $x=\pm a$: $M_y=332 \cdot 0=0$;

при $x=\pm a/2$: $M_y=332 \cdot (-1) = -332 \text{ кН}$;

при $x=0$: $M_y=332 \cdot 1 = 332 \text{ кН}$.

По полученным значениям строим эпюры M_x , M_y (рис. 12).

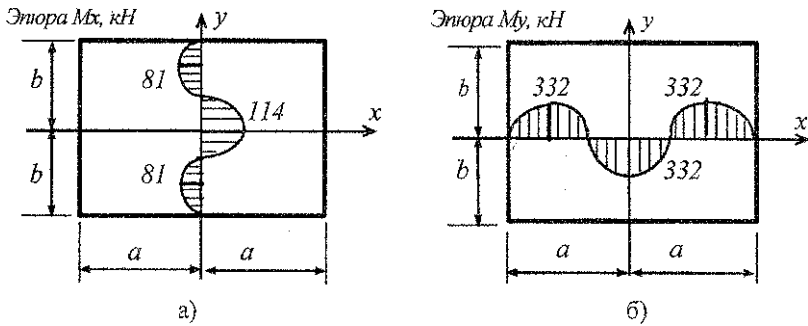


Рис. 12. Эпюры изгибающих моментов

5. Построим эпюры напряжений σ_x и σ_y в сечениях $x=0$; $y=0$. Так как в этих сечениях $M_{yx}=M_{xy}=Q_x=Q_y=0$, то напряжения τ_{xy} , τ_{yz} , τ_{zx} в них отсутствуют.

$$\sigma_x = \frac{M_x}{J} z = \frac{4q_0 \left(\frac{1}{a^2} + \mu \frac{9}{a^2} \right) \cdot 12}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \cdot h^3} z = \frac{1,368 \cdot 10^6}{h^3} z;$$

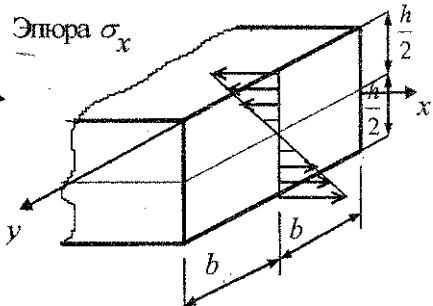
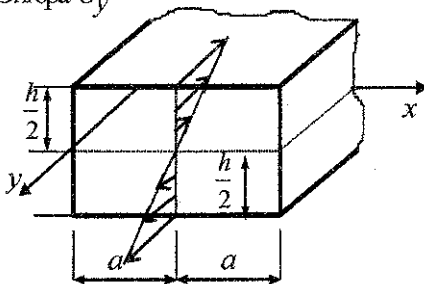
при $z = h/2$ $\sigma_x = \frac{0,684}{h^2} \cdot 10^6$.

$$\sigma_y = \frac{M_y}{J} z = \frac{4q_0 \left(\frac{9}{b^2} + \mu \frac{1}{a^2} \right) \cdot 12}{\pi^2 \left(\frac{1}{a^2} + \frac{9}{b^2} \right)^2 \cdot h^3} z = \frac{3,98 \cdot 10^6}{h^3} z;$$

при $z = 0$ $\sigma_y = 0$,

при $z = h/2$ $\sigma_y = \frac{1,99 \cdot 10^6}{h^2}$. По этим данным строим эпюры σ_x , σ_y (рис. 13).

Эпюра σ_y



6. Исходя из энергетической теории прочности, подберем толщину пластинки h . Условие прочности имеет вид:

$$\sigma_p = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \leq [\sigma].$$

Главные напряжения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ определяются как корни кубического уравнения:

$$\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma - J_3 = 0,$$

где J_1, J_2, J_3 — инварианты напряженного состояния.

$$\begin{cases} J_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z, \\ J_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2, \\ J_3 = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2. \end{cases}$$

При изгибе пластин напряжением σ_z пренебрегают. Кроме того, в нашем случае $\tau_{xy} = \tau_{zx} = \tau_{yz} = 0$. Поэтому инварианты имеют вид:

$$\begin{cases} J_1 = \sigma_x + \sigma_y, \\ J_2 = \sigma_x \sigma_y, \\ J_3 = 0. \end{cases}$$

Кубическое уравнение принимает вид: $\sigma^3 - J_1 \sigma^2 + J_2 \sigma = 0$.

Отсюда $\sigma_3 = 0$, $\sigma^2 - J_1 \sigma + J_2 = 0$.

$$\begin{aligned} \text{Тогда } J_1 &= \frac{2,674 \cdot 10^6}{h^2}, & J_2 &= \frac{1,361 \cdot 10^{12}}{h^4}, \\ \sigma_1 &= \frac{1,990 \cdot 10^6}{h^2}, & \sigma_2 &= \frac{0,684 \cdot 10^6}{h^2}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ в условие прочности, получим:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{(1,99 - 0,684)^2}{h^4} + \frac{1,99^2}{h^4} + \frac{0,684^2}{h^4}} = 200,$$

$$\frac{2,477}{h^2} = 282,8; \quad h = \sqrt{0,00875} = 0,0935 \text{ м.}$$

Окончательно толщину пластинки принимаем равной 10 см.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Что называется пластинкой?
2. Гипотезы теории изгиба тонких пластинок.
3. Какая пластинка называется тонкой?
4. Вид основного дифференциального уравнения изгиба пластинок?
5. Как выражаются внутренние силы в пластинке через функцию прогибов?
6. Формулы для напряжений в пластинке через внутренние условия?
7. Типы закрепления пластинок и граничные условия, которые соответствуют им.
8. Сущность метода Бубнова-Галеркина.
9. Условие прочности для определения толщины пластинки.
10. Сколько нужно граничных условий для каждого края пластинки и почему?
11. Что такое цилиндрическая жесткость пластинки?
12. Какую аналогию можно установить между уравнением изогнутой поверхности пластинки и бигармоническим уравнением плоской задачи?
13. В чем заключается сущность методов расчета пластинок Навье и Мориса Леви?
14. Какие внутренние усилия возникают в пластинке при изгибе?

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968. – 511 с.
2. Тимошенко С.П., Гудьер, Дж. Теория упругости. – М.: Наука, 1979. – 560 с.
3. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высшая школа, 1982. – 264 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители: Мартиновский Владимир Леонидович
Веремейчик Андрей Иванович
Хвисевич Виталий Михайлович

РАСЧЕТ ТОНКИХ ПЛАСТИН

ЗАДАНИЕ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-графической работы № 3
по дисциплине «Теория упругости и пластичности»

для студентов специальностей

1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”,

1- 70 03 01 – “Автомобильные дороги”

Ответственный за выпуск: Хвисевич В.М.

Редактор: Строкач Т.В.

Компьютерная верстка: Веремейчик А.И., Кармаш Е.Л.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 09.11.2009 г. Бумага писчая. Гарнитура Times New Roman.
Усл. печ. л. 1,16. Уч. изд. л. 1,25. Заказ № 1019. Тираж 250 экз. Отпечатано на
ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический
университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.