

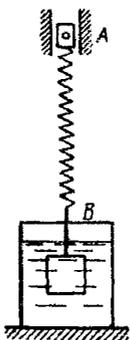
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ  
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ПРИКЛАДНОЙ МЕХАНИКИ

# ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОМАССОВОЙ СИСТЕМЫ

Задание и методические указания  
к выполнению расчетно-графической работы  
по теоретической механике  
для студентов механических специальностей



Брест 2017

Теоретическая механика является одной из основных общетехнических дисциплин, составляющих фундамент для изучения специальных дисциплин и подготовки квалифицированных инженеров технических специальностей. Для приобретения навыков инженерных расчетов студенты выполняют расчетно-графические работы по основным разделам курса.

Настоящие методические указания содержат краткий теоретический материал по теме «Колебательное движение материальной точки» раздела «Динамика», соответствующий программе курса, и условие задания для выполнения расчетно-графической работы.

Составители: А.И. Веремейчик, доцент  
А.Е. Желткович, доцент, к.т.н.  
В.М. Хвисевич, профессор, к.т.н.  
Б.Г. Холодарь, доцент, к.т.н.

## ВВЕДЕНИЕ

Задание и методические указания соответствуют базовым учебным планам технических специальностей и включают в себя краткие теоретические сведения, условия задания для выполнения расчетно-графической работы и примеры расчетов. При защите расчетно-графической работы необходимо ответить на вопросы, связанные с ее выполнением, и уметь решать контрольные задачи по ее тематике.

### УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИХ РАБОТ

1. Расчетно-графические работы выполняются на стандартных листах формата А4 (210×297 мм) со штампом 15 мм и указанием нумерации страниц.

2. Порядок оформления: титульный лист с указанием варианта; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст решения с необходимыми пояснениями и схемами; выводы; перечень литературы.

3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов стандарта УО «БрГТУ».

4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Расчеты выполняются в общем виде, в полученные выражения подставляются значения входящих в них величин, записывается числовой результат с указанием размерности ответа. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до трех-четырех значащих цифр.

5. Для наглядности и удобства схемы и графики можно выполнять на миллиметровой бумаге соответствующего формата.

6. Все рисунки (схемы, графики и т. д.) должны быть пронумерованы, обозначены, упомянуты в тексте.

## 1. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

**Колебания или колебательное движение** материальной точки – повторяющееся во времени отклонение точки относительно положения равновесия в двух противоположных направлениях. Необходимым условием такого движения является наличие **восстанавливающей силы**, которая возвращает точку в положение равновесия, если ее вывести из этого положения.

Такой силой является, например, сила упругости  $\overline{F_{уп}}$  упругих связей, наложенных на материальную точку: пружин (рисунки 1 а и 1 б), рессоры (рисунок 1 в), упругих оснований и т. п. Точкой  $O$  на рисунках отмечено положение равновесия.

Величина силы упругости принимается пропорциональной деформации (удлинению пружины или прогибу балки). Проекция этой силы на ось  $Ox$ , направленную в сторону отклонения  $x$ , равна:

$$F_{уп} = -cx \quad (1)$$

при выборе начала координат в конце недеформированной пружины (упругой связи) (см. рисунок 1 б) и

$$F_{уп} = -c(\lambda_{см} + x) \quad (2)$$

при выборе начала координат в положении статического равновесия (см. рисунок 1 а и 1 в).

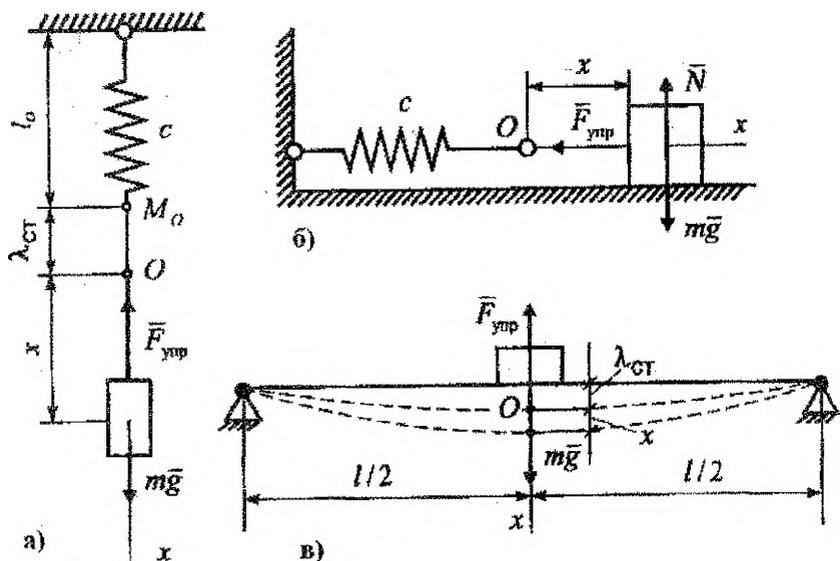


Рисунок 1 – Примеры колебательных систем

В указанных формулах  $c$  – коэффициент жесткости упругой связи;  $\lambda_{ст}$  – статическая деформация под действием постоянной силы, например, силы тяжести;  $x$  – отклонение точки от начала координат (текущая координата).

В положении равновесия:

$$F_{упр} = mg \text{ или } c\lambda_{ст} = mg. \quad (3)$$

При колебании на материальную точку могут кроме восстанавливающей силы действовать сила сопротивления  $\bar{R}$  и возмущающая сила  $\bar{F}_B$ .

**Сила сопротивления** – сила вязкого или сухого трения, препятствующая движению материальной точки и направленная всегда противоположно скорости точки. При небольших скоростях движения точки в вязких жидкостях, а также при учете демпфирования за счет внутреннего или конструкционного трения материала сила сопротивления пропорциональна первой степени скорости, т. е.

$$\bar{R} = -\mu\bar{V}, \quad (4)$$

где  $\mu$  – коэффициент сопротивления.

**Возмущающая сила** – сила, зависящая от времени. Во многих технических задачах наибольший интерес представляют возмущающие силы, которые изменяются с течением времени по периодическому закону, например:

$$F_B = F_0 \sin(pt + \delta), \quad (5)$$

где  $F_0$  – наибольшее значение силы (амплитуда);  $pt + \delta$  и  $p$  – фаза и частота возмущающей силы,  $\delta$  – начальная фаза ( $p = const, \delta = const$ ).

В зависимости от совокупности этих сил материальная точка может совершать свободные гармонические и затухающие (при наличии сухого трения или небольшом вязком сопротивлении) колебания, а также вынужденные колебания без учета и с учетом сопротивления.

### Вынужденные колебания материальной точки без учета сопротивления. Резонанс

Такого вида колебания материальная точка будет совершать при действии на нее восстанавливающей и возмущающей сил (рисунок 2, а). Возможно также кинематическое возмущение (рисунок 2, б).

В случае а) конец пружины (точка А) – неподвижен, действует возмущающая сила  $F_B = F_0 \sin(pt + \delta)$ ; в случае б) сила  $\bar{F}_B$  отсутствует, но точка А крепления пружины совершает гармонические колебания по закону  $\xi = b \sin(\omega t + \delta)$ .

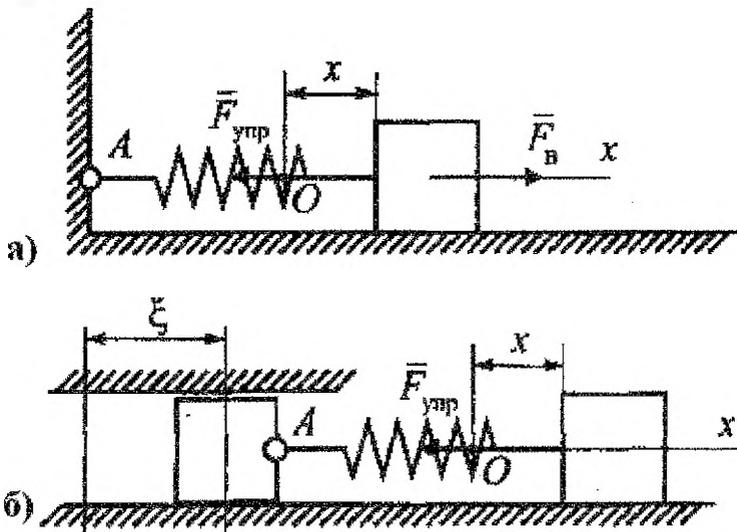


Рисунок 2 – Силовое и кинематическое возбуждение

Дифференциальное уравнение движения груза при наличии возмущающей силы:

$$m\ddot{x} = -F_{упр} + F_B = -cx + F_0 \sin(pt + \delta) \quad (6)$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt + \delta), \quad (7)$$

где  $k^2 = \frac{c}{m}$  – квадрат собственной частоты,  $h = \frac{F_0}{m}$  – характеризует действие возмущающей силы, по физическому смыслу соответствует ускорению.

В случае кинематического возбуждения

$$m\ddot{x} = -F_{\text{уп}} = -c(x - \xi) = -c \cdot (x - b \sin(\omega t + \delta)) \quad (8)$$

или

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(\omega t + \delta), \quad (9)$$

где  $k^2 = \frac{c}{m}$ ;  $h = \frac{cb}{m}$ .

Решение полученного неоднородного дифференциального уравнения состоит из суммы общего решения  $x_1$  однородного уравнения и частного решения  $x_2$  соответствующего неоднородного уравнения, т. е.  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1$  описывает свободные гармонические колебания, а  $x_2$  – вынужденные. Частное решение имеет вид:

$$x_2 = \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (10)$$

Выражение  $A_p = \frac{h}{k^2 - p^2}$  – амплитуда вынужденных колебаний без учета сопротивления.

Полное решение дифференциального уравнения (7) с учетом решения однородного уравнения

$$x_1 = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) \quad (11)$$

и частного решения (10) примет вид:

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta) \quad (12)$$

или

$$x = a \sin(kt + \alpha) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt + \delta). \quad (13)$$

Из этих уравнений при начальных условиях ( $t = 0$ :  $x = x_0$ ,  $\dot{x} = \dot{x}_0$ ) находим  $C_1$  и  $C_2$  или амплитуду  $a$  и начальную фазу  $\alpha$ . Аналогично можно записать полное решение уравнения (7) при  $p > k$  и определить  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $a$  и  $\alpha$ .

### Пример 1.

Груз массы  $m = 200$  г прикреплен к пружине, коэффициент жесткости которой  $9,8$  Н/см, может двигаться по гладкой горизонтальной плоскости под действием возмущающей силы  $F_B = F_0 \sin(pt)$ , где  $F_0 = 20$  Н,  $p = 50$  рад/с (рисунок 3). В начальный момент пружину растянули на  $0,05$  м и грузу сообщили скорость  $V_0 = 0,2$  м/с в сторону смещения. Найти уравнение движения груза по оси  $x$ , начало которой выбрано в конце недеформированной пружины.

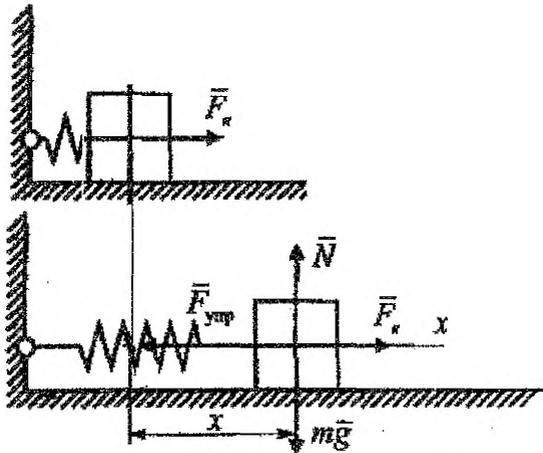


Рисунок 3 – Расчетная схема

**Решение.** Изобразим груз в произвольном положении на оси  $x$ , направив ее в сторону смещения груза. Покажем силы, действующие на груз: вес  $m\vec{g}$ , нормальную реакцию  $\vec{N}$  плоскости, силу упругости  $\vec{F}_{упр}$  пружины и возмущающую силу  $\vec{F}_B$  (рисунок 3). Дифференциальное уравнение движения груза по оси  $x$ :

$$m\ddot{x} = -F_{упр} + F_B = -cx + F_0 \sin(pt).$$

Разделим на  $m$  и обозначим  $\frac{c}{m} = k^2$ ;  $\frac{F_0}{m} = h$ , получим

$$\ddot{x} + k^2 x = h \sin(pt).$$

Циклическая частота колебаний

$$k = \sqrt{\frac{c}{m}} = \sqrt{\frac{9,8 \cdot 10^2}{200 \cdot 10^{-3}}} = 70 \text{ рад/с}.$$

Частота возмущающей силы  $p = 50$  рад/с. Следовательно,  $p < k$ . Решение полученного дифференциального уравнения на основании формулы (12)

$$x = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt) + \frac{h}{k^2 - p^2} \sin(pt).$$

Найдем производную по времени:

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x} = -C_1 k \sin(kt) + C_2 k \cos(kt) + \frac{hp}{k^2 - p^2} \cos(pt).$$

Постоянные интегрирования определим с учетом начальных условий движения:

при  $t = 0$   $x_0 = 0,05$  м,  $\dot{x}_0 = V_0 = 0,2$  м/с.

$$x_0 = C_1 = 0,05 \text{ м},$$

$$\dot{x}_0 = C_2 k + \frac{hp}{k^2 - p^2},$$

$$C_2 = \frac{\dot{x}_0 - \frac{hp}{k^2 - p^2}}{k} = \frac{\dot{x}_0 - \frac{F_0 p}{m k^2 - p^2}}{k} = \frac{0,20 - \frac{20 \cdot 50}{0,2 \cdot (70^2 - 50^2)}}{70} =$$

$$= \frac{0,2 - \frac{5000}{2400}}{70} = -0,0268 \text{ м},$$

$$\frac{h}{k^2 - p^2} = \frac{F_0}{m \cdot (k^2 - p^2)} = \frac{20}{0,2 \cdot (70^2 - 50^2)} = 0,0417 \text{ м}.$$

Уравнение движения груза:

$$x(t) = 0,05 \cos(70t) - 0,0268 \sin(70t) + 0,0417 \sin(50t), \text{ м}.$$

**Резонанс** – явление увеличения размаха колебания, которое наблюдается при совпадении или близости частоты собственных колебаний с частотой возмущающей силы, т. е.  $k = p$ . В этом случае частное решение  $x_2$  примет вид:

$$x_2 = -\frac{h}{2k} t \cos(kt) = \frac{h}{2k} t \sin\left(kt - \frac{\pi}{2}\right). \quad (14)$$

Из (14) следует, что фаза вынужденных колебаний при резонансе отстает от фазы возмущающей силы на  $\frac{\pi}{2}$ . Перемещения увеличиваются по линейному закону с течением времени (рисунок 4), а их огибающая описывается уравнением:

$$A_B = \pm \frac{h}{2k} t. \quad (15)$$

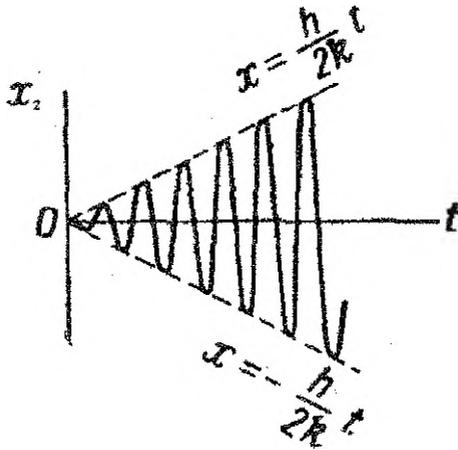


Рисунок 4 – График вынужденных колебаний точки при резонансе при отсутствии сопротивления среды

## Вынужденные колебания материальной точки с учетом действия сил сопротивления

Рассмотрим прямолинейное движение материальной точки вдоль горизонтальной оси  $x$  в вязкой среде под действием силы упругости  $\overline{F}_{\text{упр}}$ , возмущающей силы  $F_B = F_0 \sin(pt + \delta)$  и силы сопротивления  $\overline{R} = -\mu \overline{V}$ .

Дифференциальное уравнение движения

$$m\ddot{x} = -F_{\text{упр}} - R + F_0 = -cx - \mu\dot{x} + F_0 \sin(pt + \delta)$$

или

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = h \sin(pt + \delta), \quad (16)$$

$$\text{где } 2n = \frac{\mu}{m}, \quad k^2 = \frac{c}{m}, \quad h = \frac{F_0}{m}.$$

Полное решение этого уравнения  $x = x_1 + x_2$ , где  $x_1$  — общее решение однородного уравнения

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = 0, \quad (17)$$

описывающего затухающие колебания, которое в зависимости от соотношения  $n$  и  $k$  может быть записано в виде:

при  $n < k$ :

$$x = e^{-nt} (C_1 \cos(k_1 t) + C_2 \sin(k_1 t)), \quad k_1 = \sqrt{k^2 - n^2} \quad (18)$$

или

$$x = a_0 e^{-nt} \sin(k_1 t + \alpha), \quad (19)$$

при  $n > k$ :

$$x = e^{-nt} (C_1 e^{\sqrt{n^2 - k^2} t} + C_2 e^{-\sqrt{n^2 - k^2} t}), \quad (20)$$

при  $n = k$ :

$$x = e^{-nt} (C_1 + C_2 t). \quad (21)$$

При  $n < k$  точка совершает затухающие колебания, при  $n \geq k$  движение будет аperiодическим. Наличие множителя  $e^{-nt}$  в этих решениях указывает на то, что движения, описываемые этими уравнениями, достаточно быстро затухают и имеют место только на начальной стадии колебаний.

Ищем решение  $x_2$  в виде правой части уравнения (16):

$$x_2 = A_B \sin(pt + \varepsilon) = A_B \sin(pt + \delta - \varepsilon),$$

где  $A_B$  — амплитуда вынужденных колебаний с учетом сопротивления, определяемая по формуле:

$$A_B = \frac{h}{\sqrt{(k^2 - p^2)^2 + 4n^2 p^2}}, \quad (22)$$

где  $\varepsilon$  — величина сдвига фазы вынужденных колебаний по отношению к фазе возмущающей силы, которая находится по формуле:

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{2np}{k^2 - p^2}. \quad (23)$$

Исследование амплитуды:

1. Положим в (22)  $n = 0$ , получим

$$A_B = \frac{h}{k^2 - p^2} - \text{амплитуда вынужденных колебаний без учета сопротивления}$$

при  $p < k$  и  $A_B = \left| \frac{h}{p^2 - k^2} \right|$  — при  $p > k$  совпадают с полученными ранее выражениями.

2. При  $p = k$ ,  $n \neq 0$ :

$$A_{B \text{ рез}} = \frac{h}{2np} = \frac{h}{2nk}. \quad (24)$$

Амплитуда вынужденных колебаний с учетом сопротивления при резонансе имеет конечную величину.

3. Максимальная амплитуда колебаний имеет место при частоте возмущающей силы  $p = \sqrt{k^2 - 2n^2} = k \sqrt{1 - 2\left(\frac{n}{k}\right)^2}$  и определяется по формуле

$$A_{B \text{ max}} = \frac{h}{2n\sqrt{k^2 - n^2}}. \quad (25)$$

Сравним  $A_{B \text{ рез}}$  и  $A_{B \text{ max}}$ , преобразовав

$$A_{B \text{ max}} = \frac{h}{2nk \sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}} = \frac{A_{B \text{ рез}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2}}. \quad (26)$$

Так как  $\sqrt{1 - \left(\frac{n}{k}\right)^2} < 1$ , то из (26) и (27)  $A_{B \text{ max}} > A_{B \text{ рез}}$ . Однако при не-

большом сопротивлении, например  $\frac{n}{k} = 0,05$ , значения  $A_{B \text{ max}}$  и  $A_{B \text{ рез}}$  достаточно близки:  $A_{B \text{ max}} \approx A_{B \text{ рез}}$ . Заметим, что резонансная амплитуда имеет место при  $\frac{p}{k} = 1$ , а максимальная — при  $\frac{p}{k} < 1$ , что видно на графиках коэффициента динамичности (рисунок 5).

Коэффициент динамичности равен отношению амплитуды вынужденных колебаний  $A_B$  (22) к статическому отклонению точки от положения равновесия под действием амплитуды возмущающей силы, определяемому по формуле

$$A_{ст} = \frac{F_0}{c} = \frac{mh}{c} = \frac{h}{k^2}. \quad (27)$$

Тогда коэффициент динамичности:

$$\eta = \frac{A_B}{A_{ст}} = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{p}{k}\right)^2\right)^2 + 4\left(\frac{n}{k}\right)^2 \left(\frac{p}{k}\right)^2}} = f_2\left(\frac{n}{k}, \frac{p}{k}\right). \quad (28)$$

При отсутствии сопротивления ( $n = 0$ ) выражение (28) примет вид:

$$\eta = \frac{1}{\left|1 - \frac{p^2}{k^2}\right|}. \quad (29)$$

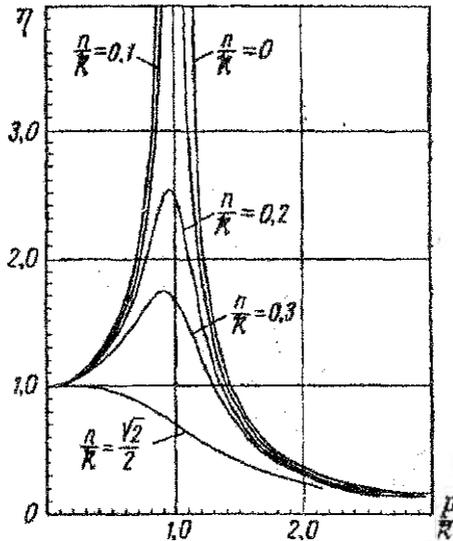


Рисунок 5 — Коэффициент динамичности

Из (29) видно, что при резонансе  $\left(\frac{p}{k} = 1\right)$  коэффициент динамичности равен бесконечности. Если колебания происходят в среде с сопротивлением ( $n \neq 0$ ), то коэффициент динамичности при резонансе имеет конечную величину

$$\eta_{\text{рез}} = \frac{1}{2 \frac{n}{k}} = \frac{1}{2} \frac{k}{n}. \quad (30)$$

Например, при  $\frac{n}{k} = 0,05$  получим  $\eta_{\text{рез}} = 10 \neq \infty$ , т. е. сопротивление в колебательной системе препятствует неограниченному увеличению амплитуды вынужденных колебаний.

## 2. УСЛОВИЕ ЗАДАНИЯ

Масса  $m = 3$  кг, установленная на системе пружин (рисунок 6), до момента времени  $t = 0$  находилась в состоянии статического равновесия. При

$t = 0$  механическая система получает возбуждение (силовое или кинематическое) и одновременно к массе добавляется  $(+\Delta m)$  или снимается с нее  $(-\Delta m)$  дополнительная масса  $\Delta m = 1$  кг. Закон кинематического или силового возбуждения задается преподавателем. Движение груза происходит в сопротивляющейся среде с линейным демпфированием  $\bar{R} = -\beta \bar{V}$ , пропорциональным скорости смещения груза относительно основания.

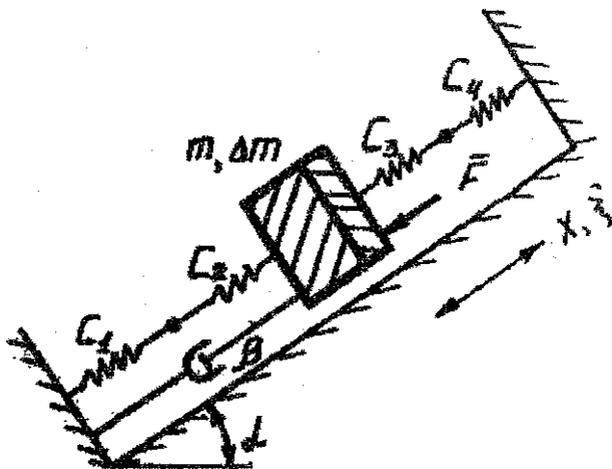


Рисунок 6 – Исходная схема

Кинематическое возбуждение задается одним из законов:  $\xi = \xi_0 \sin(\omega t)$ ,  $\dot{\xi} = \dot{\xi}_0 \cos(\omega t)$ ,  $\ddot{\xi} = \ddot{\xi}_0 \sin(\omega t)$ , причём  $\dot{\xi}_0 = \xi_0 \omega$ ,  $\ddot{\xi} = -\xi_0 \omega^2$ , а силовое – законом  $F = F_0 \sin(pt)$ . Параметры механической системы и возбуждения заданы в таблице 1. В таблице 1 прочерки в колонках  $c_2, c_3, c_4$  следует понимать как присутствие вместо пружины бесконечно жесткого элемента. Знак «+» в колонках  $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, F$  указывает на характер возбуждения.

При проведении расчетов принять:  $c_1 = 100$  Н/см,  $c_2 = 2c_1, c_3 = 0,5c_1, c_4 = 0,25c_1$ . Значения  $\xi_0$  и  $F_0$  равны одной второй части статического смещения движущегося груза и его веса соответственно.

При выдаче задания в группах преподаватель конкретизирует положительные направления осей  $x$  и  $\xi$ , значения частоты возбуждения  $\omega$  или  $p$  и коэффициента сопротивления  $\beta$ . Кроме того, по указанию преподавателя могут быть изменены и другие исходные данные, например  $\xi, \dot{\xi}, \ddot{\xi}, F, \alpha, c_1$ .

Пользуясь исходными данными, требуется определить:

- 1) частоту ( $\text{рад/с}$ ,  $\text{гц}$ ) и период собственных, свободных и вынужденных колебаний системы, частоту и период биений;
- 2) наибольшее и наименьшее значения абсолютного перемещения, скорости и ускорения груза во время движения;
- 3) наибольшее абсолютное смещение точек соединения пружин с жесткостями  $c_1$  и  $c_2$  (или  $c_3$  и  $c_4$ ) относительно своего исходного положения;
- 4) наибольшие значения усилий в пружинах и демпфере;
- 5) коэффициент динамичности.

Таблица 1 – Исходные данные

Вар.	$\alpha$	$\Delta m$	$c_2$	$c_3$	$c_4$	$\xi$	$\dot{\xi}$	$\ddot{\xi}$	$F$
1	90	+	-	+	+	+			
2	60		+	+	-		+		
3	30	+	-	-	+			+	
4	90	-	+	+	+				+
5	60	+	-	+	+	+			
6	30	-	+	-	+		+		
7	90	+	-	+	-			+	
8	60	-	+	+	-				+
9	30	+	-	-	+	+			
10	90	-	+	+	-		+		
11	60	+	-	+	+			+	
12	30	-	+	-	+				+
13	90	+	-	-	+	+			
14	60	-	+	+	-		+		
15	30	+	-	+	-			+	
16	90	-	+	-	+				+
17	60	+	-	+	-	+			
18	30	-	+	+	+		+		
19	90	+	-	-	+			+	
20	60	-	+	+	-				+
21	30	+	-	+	-	+			
22	90	-	+	-	+		+		
23	60	+	-	+	-			+	
24	30	-	+	+	-				+
25	90	+	-	-	+	+			
26	60	-	+	-	+		+		
27	30	+	-	+	+			+	
28	90	-	+	+	-				+
29	60	+	-	+	+	+			
30	30	-	+	-	+		+		

При подготовке к выполнению задания необходимо проработать следующие вопросы:

- абсолютное, относительное, переносное движения точки;
- теоремы о сложении скоростей и ускорений при сложном движении точки;
- основные уравнения динамики абсолютного и относительного движения точки;
- вывод дифференциального уравнения прямолинейных колебаний точки;
- решение линейных дифференциальных уравнений;
- основные положения теории колебательного движения точки (собственные, свободные и вынужденные колебания, их дифференциальные уравнения и их решения, частота, период, декремент колебаний, резонанс, биения, коэффициент динамичности).

Чтобы дать ответы на вопросы задачи, необходимо осуществить вывод и решение дифференциального уравнения (ДУ) колебаний точки при соответствующим образом сформулированных начальных условиях. К составлению ДУ можно подойти с двух точек зрения — считать ось  $x$  абсолютной, неподвижной в пространстве, или считать ее подвижной, смещающейся вместе с основанием. Соответственно под  $x$  будем тогда понимать или абсолютное, или относительное перемещения, а для вывода ДУ использовать либо формулировку второго закона Ньютона, либо формулировку динамической теоремы Кориолиса. В обоих случаях начало координат для оси  $x$  удобно поместить в точке, соответствующей равновесному состоянию системы грузов на пружинах, так как в этом случае правая часть ДУ будет наиболее простой. Непосредственно перед выводом уравнений необходимо систему пружин заменить одной пружиной эквивалентной жесткости по формулам:

$$\frac{1}{c_3} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{c_k} \quad (\text{последовательное соединение});$$

$$c_3 = \sum_{k=1}^n c_k \quad (\text{параллельное соединение}).$$

### 3. ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ ЗАДАНИЯ

К грузу массы  $m$ , установленному на пружине жесткости  $c$ , добавляется дополнительная масса  $\Delta m$  и одновременно основание начинает двигаться по закону  $\xi = \xi_0 \cos(\omega t)$ . Определить закон движения грузов.

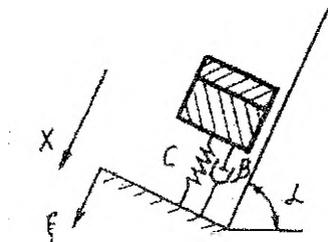


Рисунок 7 — Исходная схема

**Решение:**

Вначале рассмотрим первый способ, считая ось  $x$  абсолютной. На движущуюся массу  $m + \Delta m$  действуют силы веса, восстанавливающая сила в пружине  $F_{упр}$  и сила сопротивления  $R$ . Для удобства определения  $F_{упр}$  и начального условия  $x_0$  изобразим пружину в трех состояниях – исходном недеформированном, сжатой статической весомой нагрузкой и с дополнительным смещением верхнего конца на величину  $x$  (рисунок 9). Из рисунка видно, что смещение концов пружины друг относительно друга составит

$$\Delta = f_c + x = f_1(m) + f_2(\Delta m) + x.$$

Так как основание подвижное, то при  $\xi$  и  $x$ , совпадающих по направлению

$$\Delta = f_c + x - \xi,$$

и тогда восстанавливающая сила равна:  $F = c(f_c + x - \xi)$ .

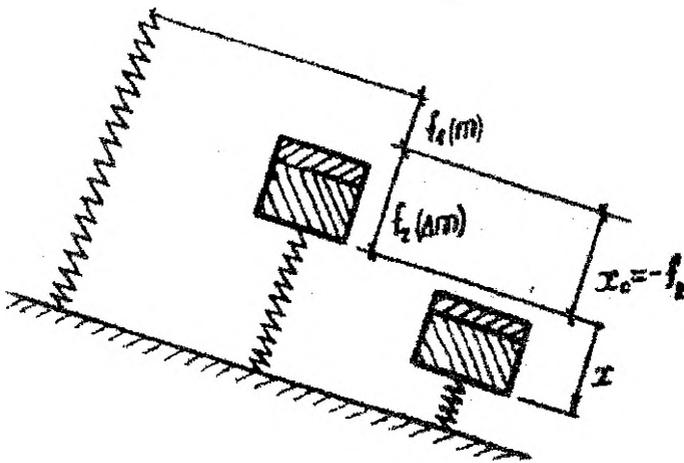


Рисунок 8 – Расчетная схема

Сила сопротивления будет пропорциональна скорости относительного смещения груза по отношению к основанию, т.е.  $R = \beta V_r = \beta(\dot{x} - \dot{\xi})$ .

Учитывая сказанное, находим:

$$(m + \Delta m)\ddot{x} = (m + \Delta m)g \sin \alpha - c(f_{cm} + x - \xi) - \beta(\dot{x} - \dot{\xi}).$$

В положении равновесия ( $x = \xi = \dot{x} = \dot{\xi} = 0$ ) имеем:

$$(m + \Delta m)g \sin \alpha - cf_{cm} = 0$$

поэтому эти слагаемые уходят из уравнения. Тогда получаем ДУ вида:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = k^2\xi + 2n\dot{\xi}, \quad (31)$$

где  $k^2 = \frac{c}{m + \Delta m}$ ,  $2n = \frac{\beta}{m + \Delta m}$ .

Сформулируем начальные условия. Так как при  $t=0$  грузам не была придана начальная скорость, то  $\dot{x}(0) = \dot{x}_0 = 0$ . Из рисунка 6 видно, что при  $t = 0$

грузы находились в отрицательной части оси  $x$  на расстоянии  $f_2 = \frac{\Delta mg \sin \alpha}{c}$ ,

поэтому  $x_0 = -\frac{\Delta mg \sin \alpha}{c}$ .

Так как уравнение (1) линейное, то его решение имеет вид:

$$x = x_1 + x_2,$$

где  $x$  может быть найдено по виду правой части уравнения (32):

$$x_2 = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t).$$

Подставив  $x_2$  в дифференциальное уравнение (32), получаем:

$$-A\omega^2 \cos(\omega t) - B\omega^2 \sin(\omega t) + 2n(-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)) + k^2 A \cos(\omega t) + k^2 B \sin(\omega t) = k^2 \xi_0 \cos(\omega t) - 2n\xi_0 \sin(\omega t),$$

откуда приходим к уравнениям для определения  $A$  и  $B$ :

$$(k^2 - \omega^2)A + 2n\omega B = k^2 \xi_0,$$

$$-2n\omega A + (k^2 - \omega^2)B = -2n\omega \xi_0.$$

Решение  $x_1$  удобно принять в виде:

$$x_1 = e^{-nt} (D_1 \cos(k_1 t) + D_2 \sin(k_1 t)),$$

где  $k_1 = \sqrt{k^2 - n^2}$  – круговая частота свободных затухающих колебаний.

При ранее найденных  $A$  и  $B$  можно найти теперь постоянные  $D_1$  и  $D_2$  из начальных условий задачи.

Используя числовые данные своего варианта, определяем величины  $k, \omega, n, f_{cm}, \xi_0, A, B, D_1, D_2$  и записываем выражения для кинематических параметров  $x, \dot{x}, \ddot{x}$ , сил  $F_{упр}$  и  $R$ , силы на основании  $F_{основ}$ , к которому прикреплен демпфер (в рассмотренном примере эта сила равна силе в пружинах 1 и 2 и демпфере  $F_{основ} = F_{1,2} + R$ ), и используя известные математические пакеты (например, MathCAD, Excel), строим графики соответствующих функций для участка времени  $0 < t \leq T_n$ , где время построения определяем как

$$T_n = (1, 5 \dots 2, 0) \frac{2\pi}{|k - \omega|} \quad (k \neq \omega).$$

При получении числовых значений следует проверять размерности используемых физических величин. Чтобы избежать ненужных ошибок, лучше всего перейти к размерности системы СИ при формулировке задачи.

Теперь рассмотрим решение задачи вторым способом, считая ось  $x$  подвижной (то есть, принимая, что  $x = x_r$  – относительное смещение точки). В этом случае по заданному движению основания находим переносное ускорение  $a_e = \ddot{x}_e = \ddot{\xi}$  и соответствующую ему переносную силу инерции  $\Phi_e$ , направленную противоположно ускорению  $\ddot{x}_e$ . Эту силу согласно основному уравнению динамики относительного движения следует добавить к действующим на точку силам, и тогда можно будет записать ДУ относительного движения в виде:

$$m\bar{a}_r = \bar{G} + \bar{F}_e + \bar{R} + \bar{\Phi}_e.$$

В отличие от рассмотренного выше способа здесь  $R = \beta V_r = \beta \dot{x}_r$ . В рассматриваемом примере  $\ddot{\xi} = -\xi_0 \omega^2 \cos(\omega t)$ , и поэтому получаем:

$$(m + \Delta m)\ddot{x}_r = (m + \Delta m)g \sin \alpha - c(f_{cm} + x_r) - \beta \dot{x}_r + (m + \Delta m)\xi_0 \omega^2 \cos(\omega t).$$

После упрощений ДУ примет вид:

$$\ddot{x}_r + 2n\dot{x}_r + k^2 x_r = \xi_0 \omega^2 \cos(\omega t).$$

Определение начального условия для  $x_r(0)$  понятно из предыдущего рассмотрения. При получении условия для  $\dot{x}_r(0)$  необходимо учесть, что для абсолютной скорости точки имеет место соотношение:

$$V(0) = \dot{x}_a(0) = \dot{x}_r(0) + \dot{x}_r(0) = \dot{\xi}(0) + \dot{x}_r(0) = 0,$$

откуда:

$$\dot{x}_r(0) = \dot{x}_a(0) - \dot{x}_r(0).$$

В рассматриваемом случае:  $\dot{x}_r = -\omega \sin(\omega t)$ , т. е.  $\dot{x}_r(0) = 0$ , следовательно,  $\dot{x}_r(0) = 0$ .

Полученное уравнение является классическим и рассматривается во всех учебниках и пособиях по теоретической механике [1–8]. Найдя  $x_r$ , при определении требуемых по п. 1–2 задания параметров следует учесть, что абсолютное перемещение равно  $\bar{x}_a = \bar{x}_r + \bar{x}_r$ , с учетом направления осей  $x_r$  и  $\xi$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Доброправов, В.В. Курс теоретической механики: Учебник для машиностроительных специальностей вузов / В.В. Доброправов, Н.Н. Никитин. – 4-е изд., перераб. и доп. – М.: Высшая школа, 1983. – 575 с.
2. Никитин, Н.Н. Курс теоретической механики / Н.Н. Никитин. – 5-е изд. – М.: Высшая школа, 1990. – 607 с.
3. Яблонский, А.А. Курс теоретической механики. Учебное пособие для технических вузов / А.А. Яблонский, В. М. Никифорова – 8-е изд., стереотип. – СПб.: Лань, 2001. – 764 с.
4. Тарг, С.М. Краткий курс теоретической механики. Учебник для вузов / С.М. Тарг. – 12 изд., стереотип. – М.: Высшая школа, 2002. – 416 с.
5. Горбач, Н.И. Теоретическая механика. Динамика: учеб. пособие / Н.И. Горбач. – Минск: Выш. школа, 2010. – 320 с.
6. Бать, М.И. Теоретическая механика в примерах и задачах / М.И. Бать, Г.Ю. Джанелидзе, А.С. Кельзон. В 2-х т. – М.: Наука, 1975.
7. Айзенберг, Т.Б. Руководство к решению задач по теоретической механике / Т.Б. Айзенберг, И.М. Воронков, В.М. Осецкий. – М.: Высшая школа, 1968. – 419 с.
8. Сборник заданий для курсовых работ по теоретической механике: Учебное пособие для вузов. – 3-е изд., испр., под ред. проф. А. А. Яблонского. – М.: Высшая школа, 1978. – 388 с.

## СОДЕРЖАНИЕ

Введение.....	3
Указания по оформлению расчетно-графических работ.....	3
1. Краткие теоретические сведения.....	3
2. Условие задания.....	11
3. Пример выполнения задания.....	14
Список литературы.....	17

Учебное издание

*Составители:*

*Веремейчик Андрей Иванович  
Желткович Андрей Евгеньевич  
Хвисевич Виталий Михайлович  
Холодарь Борис Григорьевич*

## **ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ ОДНОМАССОВОЙ СИСТЕМЫ**

**Задание и методические указания**  
к выполнению расчетно-графической работы  
по теоретической механике  
для студентов механических специальностей

Ответственный за выпуск: Холодарь Б.Г.  
Редактор: Боровикова Е.А.  
Компьютерная верстка: Колб К.С.  
Корректор: Никитчик Е.В.

---

Подписано в печать 29.09.2017 г. Формат 60x84<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага «Снегурочка».  
Усл.-п.л. 1,16. Усл.-изд.л. 1,25. Тираж 105 экз. Заказ № 989.  
Отпечатано на ризографе учреждение образования  
«Брестский государственный технический университет».  
224017, Брест, ул. Московская, 267.