

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
“БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ”

Кафедра сопротивления материалов и теоретической механики

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

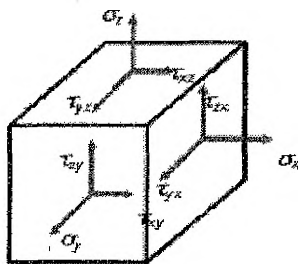
к выполнению расчетно-графической работы № 1
по дисциплине «Теория упругости и пластичности»

“ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО- ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА”

для студентов специальностей

1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”,

1- 70 03 01 – “Автомобильные дороги”



Для расчета конструктивных элементов на прочность и жесткость инженеру необходимо хорошо представлять распределение напряжений и деформаций в исследуемом теле.

Настоящие методические указания направлены на приобретение студентами навыков самостоятельной работы по исследованию напряженно-деформируемого состояния в точках тела при изучении курса «Теория упругости и пластичности». В них приведены краткие сведения из теории, примеры расчета и индивидуальные задания.

Составители: Хвисевич В.М., доцент, к.т.н.;
Мартинковский В.Л., доцент;
Веремейчик А.И., доцент.

Рецензент: директор филиала РУП «Институт БелНИИС»-«Научно-технический центр», д-р техн. наук А.Я. Найчук.

СОДЕРЖАНИЕ

Общие положения	3
Требования к оформлению расчетно-графических работ	3
Краткие теоретические сведения.....	4
Условие задания.....	5
Пример выполнения расчетно-графической работы.....	7
Контрольные вопросы.....	22
Литература.....	22

ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

Теория упругости имеет целью аналитическое изучение напряженно-деформированного состояния (НДС) упругого тела. Для комплексной оценки перемещений, напряжений и деформаций, возникающих при действии механических нагрузок, необходимо исследование НДС в каждой точке тела.

Данные методические указания соответствуют базовым учебным планам специальностей строительного факультета 1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”, 1- 70 03 01 – “Автомобильные дороги” и включают в себя краткие теоретические сведения по разделу «Теория напряжений и деформаций», условие задания и пример расчета.

При защите расчетно-графической работы необходимо ответить на вопросы по теме работы и уметь решать контрольные (тестовые) задачи по ее тематике.

ТРЕБОВАНИЯ К ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

1. Расчетно-графическая работа выполняется на отдельных листах формата А4.
2. Порядок оформления: титульный лист; задание с указанием исходных данных и схем конструкций; текст расчетов с необходимыми пояснениями и схемами; выводы; перечень литературы.
3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением правил графики и масштабов согласно стандарту УО «БрГТУ».
4. Текстовая часть выполняется в соответствии с требованиями к оформлению текстовых документов. Страницы нумеруются. Расчеты выполняются в общем виде, подставляются значения величин, записывается числовой результат с указанием размерности полученной величины. Все вычисления производятся в десятичных дробях с точностью до сотых долей.
5. Эпюры необходимо строить на одном листе с расчетной схемой, на эпюрах указывать числовые значения характерных ординат и единицы расчетных величин.

КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

В твердом теле, нагруженном системой самоуравновешенных сил, происходит взаимное перемещение точек, возникают линейные и угловые упругие деформации, что вызывает изменение сил взаимодействия между частицами тела. Эти изменения в силах взаимодействия называют внутренними силами, а их интенсивность на бесконечно малых площадках, проведенных внутри тела в той или иной точке — напряжениями.

Если внутри нагруженного тела вблизи некоторой точки вырезать бесконечно малых размеров параллелепипед (рис. 1, а), то на его гранях можно показать 9 компонент напряжений (рис. 1 б, в). Совокупность этих 9 компонент полностью характеризует напряженное состояние в данной точке тела и образует тензор T_σ , который записывается в виде такой матрицы :

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

Зная компоненты напряжений на трех взаимно ортогональных площадках в некоторой точке тела, можно найти нормальную и касательную составляющие на любой другой площадке, проведенной через данную точку тела (σ_ν, τ_ν) (рис. 1, в).

Известно что в любой точке тела всегда существуют, по крайней мере, три такие взаимно ортогональные площадки, на которых отсутствуют касательные напряжения, а нормальные напряжения достигают экстремума. Эти площадки и напряжения называют главными (рис. 1, г). Главные напряжения обозначают индексами 1, 2, 3, которые ставят в соответствии с неравенством $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$.

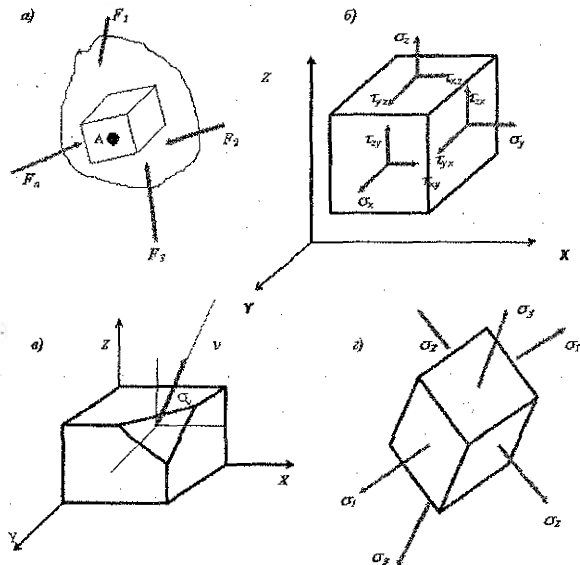


Рисунок 1.

Площадки равнонаклонённые к главным, и напряжения, действующие на них, называются октаэдрическими $\sigma_{окт}$, $\tau_{окт}$ (рис. 2).

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклонных под углом 45° к каждой паре главных площадок и равных полуразности соответствующих главных напряжений. Их обозначают τ_{12} , τ_{23} , τ_{31} (рис. 2).

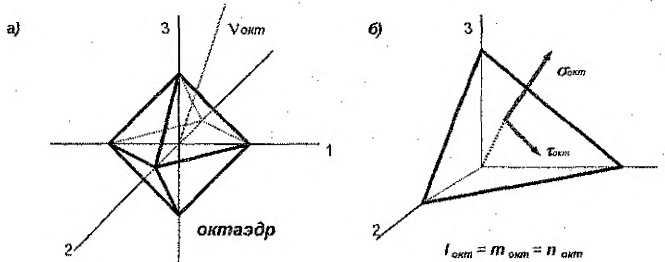


Рисунок 2.

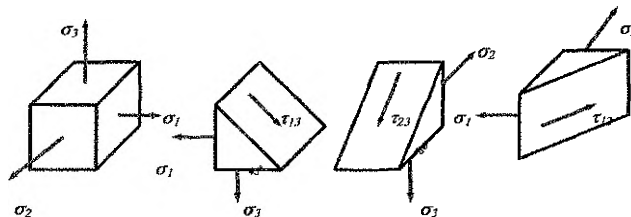


Рисунок 3.

Формулы и уравнения, по которым можно вычислить σ_1 , τ_v , главные напряжения и их направление $\tau_{окт}$, $\sigma_{окт}$, τ_{12} , τ_{23} , τ_{31} , а также другие необходимые зависимости, будут приведены ниже, там, где они будут применяться при выполнении примера.

УСЛОВИЕ ЗАДАНИЯ

Заданы компоненты напряжения на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке нагруженного тела. Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона определяются по таблице. Положение некоторой площадки, наклоненной к осям x , y , z и отсекающей от элементарного параллелепипеда тетраэдр (см. рис. 1, в), задано направляющими косинусами нормали к этой площадке: $l = \cos \alpha$; $m = \cos \beta$; $n = \cos \gamma$.

В процессе выполнения расчётно-графической работы требуется:

- 1) найти нормальную и касательную составляющие напряжений на площадке с заданной ориентацией (с заданными направляющими косинусами l , m , n);
- 2) определить величину и направление главных напряжений;
- 3) найти величину наибольших касательных напряжений в данной точке тела и указать площадки, по которым они действуют;

4) найти нормальные и касательные напряжения на октаэдрических площадках и указать их расположение;

5) построить для заданного напряженного состояния круги Мора и указать на них точки, изображающие напряженное состояние на площадках, на которых напряженное состояние задано или определилось в процессе выполнения работы (площадках с нормальными x, y, z ; площадке с нормалью i , заданной направляющими косинусами l, m, n ; октаэдрической площадке; площадках с максимальными касательными напряжениями; главных площадках);

6) определить компоненты деформаций в заданных и главных осях;

7) разложить заданный тензор напряжения на два — шаровой и девиатор;

8) найти удельную потенциальную энергию деформации (полную, изменения объема, изменения формы);

9) определить расчетные напряжения по четырем классическим критериям прочности и пластичности.

Исходные числовые данные выбираются по таблице 1 в соответствии с вариантом. По указанию преподавателя может задаваться коэффициент корректировки напряжений $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}$.

Таблица 1 – Числовые данные

№ варианта	σ_x , МПа	σ_y , МПа	σ_z , МПа	τ_{xy} , МПа	τ_{yz} , МПа	τ_{zx} , МПа	l	m	n	E , ГПа	μ
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	350	-480	630	260	-150	300	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{6}$	220	0,3
2	-850	270	-560	320	440	-270	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	140	0,25
3	350	-280	410	-180	130	270	1/2	1/2	$1/\sqrt{2}$	120	0,22
4	-230	310	-450	140	-210	160	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	85	0,32
5	410	-350	270	-220	180	-110	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	100	0,35
6	250	-190	-320	110	-180	220	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{3}$	72	0,33
7	-480	-750	50	-230	130	-180	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	60	0,25
8	-55	20	-65	30	-25	-10	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	70	0,25
9	30	-75	55	-40	-25	15	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	80	0,27
10	-40	15	-80	-55	30	25	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{3}$	4	0,36
11	120	-210	250	80	-75	-50	1/2	$1/\sqrt{2}$	1/2	45	0,34
12	-410	300	700	180	-120	-85	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	210	0,33
13	-15	-25	5	10	15	-30	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{3}$	22	0,17
14	-30	-50	-40	65	-45	50	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{6}$	3	0,35
15	30	40	50	-25	15	-20	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	2	0,40
16	180	230	410	-150	-110	260	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	100	0,32
17	330	-210	-190	-240	160	350	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{3}$	125	0,35
18	-60	-45	-30	-25	15	-20	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{6}$	4	0,38
19	-75	-50	10	45	-30	25	$1/\sqrt{2}$	1/2	1/2	6	0,36
20	-510	250	610	400	280	-360	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{3}$	210	0,3
21	220	-940	280	-400	-340	-520	$1/\sqrt{2}$	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{6}$	150	0,27
22	210	350	-270	-120	-150	180	$1/\sqrt{3}$	$1/\sqrt{6}$	$1/\sqrt{2}$	70	0,33

Продолжение таблицы 1

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
23	-45	60	80	-15	20	-35	1/2	1/2	1/√2	80	0,27
24	350	-600	450	280	-150	-210	1/√3	1/√3	1/√3	210	0,33
25	-300	250	-370	210	310	-180	1/√2	1/√3	1/√6	130	0,22
26	-15	-25	10	-5	-10	20	1/√3	1/√6	1/√2	20	0,18
27	-35	10	-40	15	55	60	1/2	1/2	1/√2	50	0,25
28	15	-80	-75	35	25	-20	1/√3	1/√3	1/√3	70	0,23
29	150	200	90	110	-75	30	1/√3	1/√6	1/√2	45	0,34
30	50	25	30	15	20	45	1/√6	1/√2	1/√3	2	0,4

ПРИМЕР ВЫПОЛНЕНИЯ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

Заданы компоненты напряжения на гранях элемента, вырезанного в некоторой точке нагруженного тела. Стрелки на рисунке соответствуют положительным направлениям компонент в выбранной системе координат:

$$\sigma_x = 100 \text{ МПа}; \sigma_y = -45 \text{ МПа}; \sigma_z = 50 \text{ МПа};$$

$$\tau_{xy} = 20 \text{ МПа}; \tau_{yz} = -30 \text{ МПа}; \tau_{zx} = 40 \text{ МПа}.$$

Элементарный параллелепипед с заданными компонентами напряжения представлен на рис. 4.

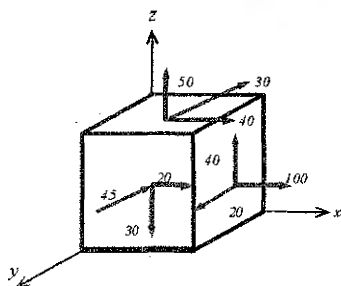


Рисунок 4 – Исходное напряженное состояние в точке.

Тело изотропно, материал подчиняется закону Гука. Модуль продольной упругости и коэффициент Пуассона равны $E = 200 \text{ ГПа} = 2 \cdot 10^5 \text{ МПа}$; $\mu = 0,3$.

Положение некоторой площадки, наклоненной к осям x , y , z и отсекающей от элементарного параллелепипеда тетраэдр (см. рис. 1,в), задано направляющими косинусами нормали к этой площадке $l = \cos\alpha$; $m = \cos\beta$; $n = \cos\gamma$;

$$l = 1/\sqrt{2} = 0,707; \quad m = 1/\sqrt{3} = 0,577; \quad n = 1/\sqrt{6} = 0,408.$$

Как известно из математики, направляющие косинусы должны удовлетворять условию $l^2 + m^2 + n^2 = 1$. В нашем случае это условие выполняется:

$$(1/\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{3})^2 + (1/\sqrt{6})^2 = 1.$$

Решение:

1. *Определение нормальной и касательной составляющих напряжения на площадке с заданной ориентацией.*

Напряжения на площадке, нормаль к которой ν имеет направляющие косинусы l , m , n , определяются из условий равновесия тетраэдра, отсекаемого этой площадкой с нормалью от элементарного параллелепипеда с гранями, нагруженными заданными компонентами напряжения (рис. 5).

Составляющие вдоль осей x, y, z полного напряжения на площадке с нормалью ν определяются зависимостями :

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= \sigma_x \cdot l + \tau_{yx} \cdot m + \tau_{zx} \cdot n; \\ p_{y\nu} &= \tau_{xy} \cdot l + \sigma_y \cdot m + \tau_{zy} \cdot n; \\ p_{z\nu} &= \tau_{xz} \cdot l + \tau_{yz} \cdot m + \sigma_z \cdot n. \end{aligned} \quad (1)$$

Полное напряжение на площадке с нормалью ν :

$$p_\nu = \sqrt{p_{x\nu}^2 + p_{y\nu}^2 + p_{z\nu}^2}. \quad (2)$$

Нормальное и касательное напряжение на площадке с нормалью ν :

$$\sigma_\nu = p_{x\nu}l + p_{y\nu}m + p_{z\nu}n = \sigma_x l^2 + \sigma_y m^2 + \sigma_z n^2 + 2\tau_{xy}lm + 2\tau_{yz}mn + 2\tau_{zx}nl; \quad (3)$$

$$p_\nu^2 = \sigma_\nu^2 + \tau_\nu^2; \quad \tau_\nu = \sqrt{p_\nu^2 - \sigma_\nu^2}. \quad (4)$$

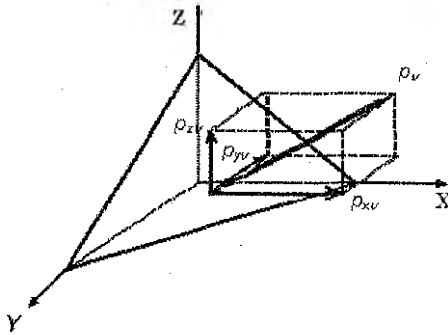


Рисунок 5 – Напряжения на наклонной площадке.

Подставляя в зависимости (1) - (4) исходные данные, получаем составляющие вдоль осей x, y, z полного напряжения на площадке с нормалью ν :

$$\begin{aligned} p_{x\nu} &= 100 \cdot 0,707 + 20 \cdot 0,577 + 40 \cdot 0,408 = 98,58 \text{ МПа}; \\ p_{y\nu} &= 20 \cdot 0,707 + 45 \cdot 0,577 + 30 \cdot 0,408 = -24,07 \text{ МПа}; \\ p_{z\nu} &= 40 \cdot 0,707 - 30 \cdot 0,577 + 50 \cdot 0,408 = 31,37 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

Полное напряжение на той же площадке :

$$p_\nu = \sqrt{98,56^2 + (-24,07)^2 + 31,37^2} = 106,2 \text{ МПа}.$$

Нормальное и касательное напряжения на площадке с нормалью ν :

$$\begin{aligned} \sigma_\nu &= 100 \cdot (1/\sqrt{2})^2 + (-45) \cdot (1/\sqrt{3})^2 + 50 \cdot (1/\sqrt{6})^2 + 20 \cdot 1/\sqrt{2} \cdot 1/\sqrt{3} + \\ &+ (-30) \cdot 1/\sqrt{3} \cdot 1/\sqrt{6} + 40 \cdot 1/\sqrt{6} \cdot 1/\sqrt{2} = 55,97 \text{ МПа}; \\ \tau_\nu &= \sqrt{106,20^2 - 55,97^2} = 90,25 \text{ МПа}. \end{aligned}$$

2. Определение величины и направления главных напряжений.

Для отыскания величины главных напряжений необходимо решить кубическое уравнение:

$$\sigma^3 - I_1 \cdot \sigma^2 + I_2 \cdot \sigma - I_3 = 0. \quad (5)$$

Для отыскания величин главных напряжений вычисляем инварианты напряженного состояния:

$$I_1 = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = 100 - 45 + 50 = 105 \text{ МПа.}$$

$$I_2 = \sigma_x \sigma_y + \sigma_y \sigma_z + \sigma_z \sigma_x - \tau_{xy}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{zx}^2 = 100 \cdot (-45) + (-45) \cdot 50 + 50 \cdot 100 - 20^2 - (-30)^2 - 40^2 = -4650 \text{ (МПа)}^2; \quad (6)$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix} = \sigma_x \sigma_y \sigma_z + 2\tau_{xy} \tau_{yz} \tau_{zx} - \sigma_x \tau_{yz}^2 - \sigma_y \tau_{zx}^2 - \sigma_z \tau_{xy}^2 =$$

$$= 100 \cdot (-45) \cdot 50 + 2 \cdot 20 \cdot (-30) \cdot 40 - 100 \cdot (-30)^2 + 45 \cdot 40^2 - 50 \cdot 20^2 = -311000 \text{ (МПа)}^3.$$

Кубическое уравнение (5) принимает вид:

$$\sigma^3 - 105\sigma^2 - 4650\sigma + 311000 = 0.$$

Кубическое уравнение (5) решаем с помощью формулы Кордано, относящейся к уравнению вида:

$$x^3 + cx + q = 0. \quad (7)$$

Это кубическое уравнение имеет три действительных корня, если выполняется неравенство:

$$D = (c/3)^3 + (q/2)^2 < 0. \quad (8)$$

Тогда решение кубического уравнения (7) запишется в виде:

$$\begin{aligned} x_1 &= -2R \cos(\varphi/3); \\ x_2 &= -2R \cos(\varphi/3 + 2\pi/3); \\ x_3 &= -2R \cos(\varphi/3 + 4\pi/3), \end{aligned} \quad (9)$$

$$\text{где } \cos \varphi = \frac{q}{2R^3}, \quad R = \pm \sqrt{\frac{|c|}{3}}, \quad (10)$$

при этом знак R должен совпадать со знаком q , а $c \leq 0$.

Кубическое уравнение (5) можно привести к виду (7) посредством замены переменной

$$\sigma = x + I_1/3. \quad (11)$$

Тогда

$$\begin{aligned} c &= -I_1^2/3 + I_2; \\ q &= -(2I_1^3)/27 + I_1 I_2/3 - I_3. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставляя в (12) подсчитанные выше значения инвариантов напряжения I_1, I_2, I_3 , находим

$$\begin{aligned} c &= -\frac{105^2}{3} - 4650 = -8325 \text{ (МПа)}^2; \\ q &= -2 \cdot \frac{105^3}{27} + \frac{105 \cdot (-4650)}{3} + 311000 = 62500 \text{ (МПа)}^3. \end{aligned}$$

Проверяем условия (10) и (12):

$$D = \left(\frac{-8325}{3} \right)^3 + \left(\frac{62500}{2} \right)^2 = -2,039 \cdot 10^{10} < 0,$$

$$C = -8325 < 0.$$

Оба условия выполнены. Следовательно, в нашем примере можно воспользоваться решением Кордано

$$R = + \sqrt{\frac{8325}{3}} = 52,678 \text{ МПа};$$

$$\cos \varphi = 62500 / (2 \cdot 52,678)^3 = 0,214, \text{ откуда } \varphi = 1,355 \text{ рад.}$$

По формулам (9) находим корни кубического уравнения (7):

$$x_1 = -2 \cdot 52,678 \cos \left(\frac{1,355}{3} \right) = -94,791 \text{ МПа};$$

$$x_2 = -2 \cdot 52,678 \cos \left(\frac{1,355 + 2\pi}{3} \right) = +87,219 \text{ МПа};$$

$$x_3 = -2 \cdot 52,678 \cos \left(\frac{1,355 + 4\pi}{3} \right) = +7,572 \text{ МПа}.$$

По формуле (13) найдем три корня уравнения (7), т.е. искомые значения главных напряжений:

$$\sigma_1 = x_1 + \frac{I_1}{3} = -94,791 + \frac{105}{3} = -59,791 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{II} = x_2 + \frac{I_1}{3} = 87,219 + \frac{105}{3} = 122,219 \text{ МПа};$$

$$\sigma_{III} = x_3 + \frac{I_1}{3} = 7,572 + \frac{105}{3} = 42,572 \text{ МПа}.$$

В соответствии с правилом $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ наибольшему по алгебраической величине из этих напряжений присвоим индекс I и так далее. Тогда

$$\sigma_1 = \sigma_{II} = 122,219 \text{ МПа}; \quad \sigma_2 = \sigma_{III} = 42,572 \text{ МПа}; \quad \sigma_3 = \sigma_I = -59,791 \text{ МПа}.$$

Для проверки правильности полученного решения найдем инварианты напряженного состояния по формулам (8), выразив их через главные напряжения. Они должны быть такими же, как и вычисленные выше по заданным компонентам напряжений (8')

$$I_1 = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 122,219 + 42,572 - 59,791 = 105 \text{ МПа};$$

$$I_2 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 + \sigma_2 \cdot \sigma_3 + \sigma_3 \cdot \sigma_1 = 122,219 \cdot 42,572 + 42,572 \cdot (-59,791) + (-59,791) \cdot 122,219 = -4649,91 \text{ (МПа)}^2;$$

$$I_3 = \sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 = 122,219 \cdot 42,572 \cdot (-59,791) = -311099 \text{ (МПа)}^3.$$

Погрешность только 0.035%.

Положение главных площадок определяется направляющими косинусами нормалей к главным площадкам.

Для отыскания направляющих косинусов нормали к i -той главной площадке ($i=1,2,3$) используем систему уравнений, подставив в нее $\sigma = \sigma_i$. Тогда направляющие косинусы принимают значение l_i, m_i, n_i .

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma_i) l_i + \tau_{xy} m_i + \tau_{xz} n_i &= 0; \\ \tau_{yx} l_i + (\sigma_y - \sigma_i) m_i + \tau_{yz} n_i &= 0;\end{aligned}\quad (13)$$

$$\begin{aligned}\tau_{zx} l_i + \tau_{zy} m_i + (\sigma_z - \sigma_i) n_i &= 0, \\ l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1.\end{aligned}\quad (14)$$

Из трех уравнений (13) выберем любые два, например первое и второе. Делим эти уравнения на n_i и вводим обозначения

$$a_i = l_i / n_i; \quad b_i = m_i / n_i. \quad (15)$$

Получаем

$$\begin{aligned}(\sigma_x - \sigma_i) a_i + \tau_{xy} b_i &= -\tau_{xz}; \\ \tau_{yx} a_i + (\sigma_y - \sigma_i) b_i &= -\tau_{yz};\end{aligned}$$

отсюда

$$\begin{aligned}a_i &= [\tau_{yx} \tau_{zy} - \tau_{zx} (\sigma_y - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2]; \\ b_i &= [\tau_{xy} \tau_{zx} - \tau_{zy} (\sigma_x - \sigma_i)] / [(\sigma_x - \sigma_i)(\sigma_y - \sigma_i) - \tau_{xy}^2].\end{aligned}\quad (16)$$

Тогда из (14) и (15)

$$n_i = \sqrt{\frac{1}{1 + a_i^2 + b_i^2}}; \quad l_i = a_i \cdot n_i, \quad m_i = b_i \cdot n_i, \quad (17)$$

Обращаясь к нашему примеру, положим

$$\sigma_i = \sigma_1 = 122,22 \text{ МПа.}$$

и из (16) и (17) найдем:

$$a_i = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 1,836;$$

$$b_i = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 122,22)] / [(100 - 122,22) \cdot (-45 - 122,22) - 20^2] = 0,040;$$

$$n_i = \sqrt{\frac{1}{1 + 1,836^2 + 0,040^2}} = 0,478;$$

$$l_i = a_i \cdot n_i = 1,836 \cdot 0,478 = 0,878;$$

$$m_i = b_i \cdot n_i = 0,040 \cdot 0,478 = 0,019.$$

Проверка:

$$\begin{aligned}l_i^2 + m_i^2 + n_i^2 &= 1, \\ 0,878^2 + 0,019^2 + 0,478^2 &= 1,000.\end{aligned}$$

Равенство выполнено.

Теперь подставляем в (16) и (17) $\sigma_2 = 42,57$ МПа и находим
 $a_2 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,535$;
 $b_2 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 - 42,57)] / [(100 - 42,57) \cdot (-45 - 42,57) - 20^2] = -0,465$;

$$n_2 = \sqrt{\frac{1}{1 + (-0,535)^2 + (-0,465)^2}} = 0,816;$$

$$l_2 = a_2 \cdot n_2 = -0,535 \cdot 0,816 = -0,437;$$

$$m_2 = b_2 \cdot n_2 = -0,465 \cdot 0,816 = -0,379.$$

Проверка:

$$l_2^2 + m_2^2 + n_2^2 = 1,$$

$$(-0,437)^2 + 0,816^2 + (-0,379)^2 = 1,000.$$

Равенство удовлетворено.

Подставив в (16) и (17) $\sigma_3 = -59,79$ МПа, получаем :

$$a_3 = [20 \cdot (-30) - 40 \cdot (-45 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = -0,607;$$

$$b_3 = [20 \cdot 40 - (-30) \cdot (100 + 59,79)] / [(100 + 59,79) \cdot (-45 + 59,79) - 20^2] = 2,849;$$

$$n_3 = \sqrt{\frac{1}{1 + 0,607^2 + 2,849^2}} = 0,325;$$

$$l_3 = a_3 \cdot n_3 = -0,607 \cdot 0,325 = -0,197;$$

$$m_3 = b_3 \cdot n_3 = 2,849 \cdot 0,325 = 0,926.$$

Проверка:

$$l_3^2 + m_3^2 + n_3^2 = 1,$$

$$= (-0,197)^2 + 0,926^2 + 0,325^2 = 1,002 \approx 1.$$

Сведем найденные значения в таблицу 2.

Таблица 2 – Направляющие косинусы нормалей к главным площадкам

i	1	2	3
l_i	0,878	-0,437	-0,297
m_i	0,019	-0,379	0,926
n_i	0,478	0,816	0,345

Сделаем следующие три проверки, подтверждающие взаимную ортогональность главных площадок :

$$l_1 l_2 + m_1 m_2 + n_1 n_2 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,437) + 0,019 \cdot (-0,379) + 0,478 \cdot 0,816 = -8,39 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

$$l_2 l_3 + m_2 m_3 + n_2 n_3 = 0;$$

$$(-0,437) \cdot (-0,197) + (-0,379) \cdot 0,926 + 0,816 \cdot 0,325 = 3,35 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

$$l_1 l_3 + m_1 m_3 + n_1 n_3 = 0;$$

$$0,878 \cdot (-0,197) + 0,019 \cdot 0,926 + 0,478 \cdot 0,325 = 2,20 \cdot 10^{-4} \approx 0;$$

Можно сделать вывод, что взаимная ортогональность нормалей к главным площадкам этими проверками подтверждается.

Чтобы изобразить графически положение в пространстве параллелепипеда, гранями которого являются главные площадки, надо произвести следующее построение.

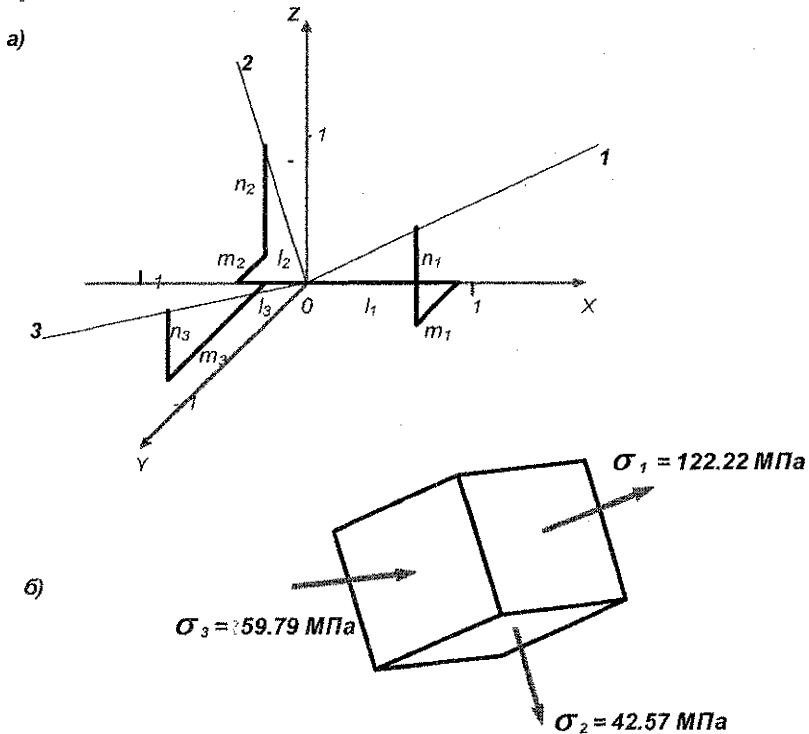


Рисунок 6 – Графическое построение главных площадок.

В осях x, y, z по заданным направляющим косинусам (табл. 1) строим нормали к главным площадкам, взяв за исходную точку начало координат. Для построения i -той нормали достаточно вдоль осей x, y, z отложить в некотором масштабе отрезки, равные направляющим косинусам l_i, m_i, n_i , и точку с такими координатами соединить с центром O (рис. 6,б). Его грани и будут главными площадками с напряжениями $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

3. Определение максимальных касательных напряжений.

Наибольшие касательные напряжения действуют по площадкам, наклоненным под углом 45° между каждой парой главных площадок (см. рис. 3). Величины наибольших касательных напряжений определяются по формулам :

$$\tau_{13} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{12} = \frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}; \quad \tau_{23} = \frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}; \quad (18)$$

$$\tau_{13} = [122,22 - (-59,79)] / 2 = 91,01 \text{ МПа};$$

$$\tau_{12} = [122,22 - 42,57] / 2 = 39,83 \text{ МПа};$$

$$\tau_{23} = [42,57 - (-59,79)] / 2 = 51,18 \text{ МПа};$$

$$\tau_{\max} = \tau_{13} = 91,01 \text{ МПа}.$$

Максимальное касательное напряжение действует по площадке, наклоненной под углом 45° к первой и третьей главным площадкам.

4. Определение октаэдрических площадок.

Площадки, равнонаклонённые к трем главным площадкам $l = m = n = 1/\sqrt{3}$, называются октаэдрическими (см. рис. 2). Нормальное и касательное напряжения на этих площадках определяются по формулам :

$$\sigma_{окт} = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) / 3; \quad (19)$$

$$\tau_{окт} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1},$$

или

$$\tau_{окт} = \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2},$$

или

$$\tau_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{\tau_{12}^2 + \tau_{23}^2 + \tau_{31}^2}.$$

$$\sigma_{окт} = \frac{1}{3} (122,22 + 42,57 - 59,79) = 35 \text{ МПа},$$

$$\tau_{окт} = \frac{2}{3} \sqrt{39,83^2 + 52,18^2 + 91,01^2} = 74,50 \text{ МПа}.$$

5. Построение кругов Мора.

В координатах σ и τ построим круги Мора для исследуемого объёмного напряжённого состояния. Отложим в осях σ и τ точки, изображающие напряжённое состояние на главных площадках: $K_1(\sigma_1, 0) = K_1(122,22; 0)$; $K_2(\sigma_2, 0) = K_2(42,57; 0)$; $K_3(\sigma_3, 0) = K_3(-59,79; 0)$ (рис. 7).

На отрезках $\overline{K_1K_3}$, $\overline{K_1K_2}$, $\overline{K_2K_3}$, как на диаметрах, строим окружности — это и есть круги Мора для заданного напряжённого состояния.

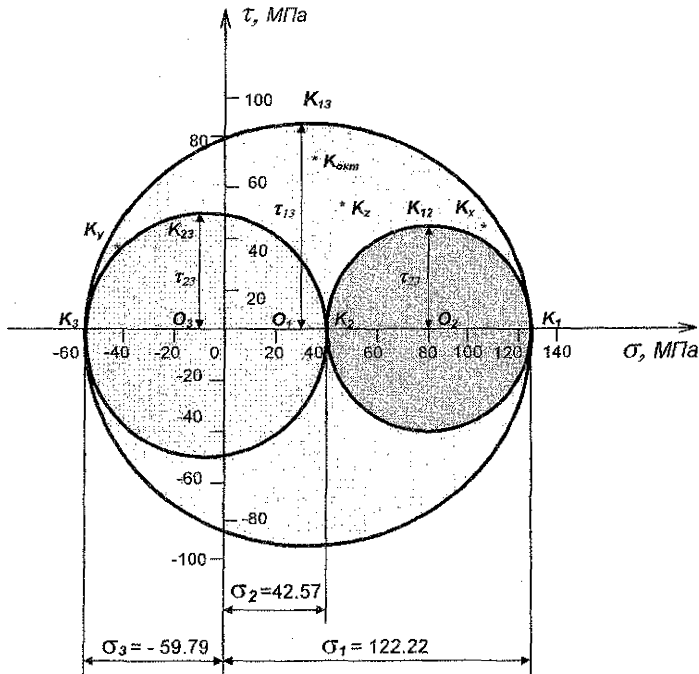


Рисунок 7 – Круги Мора.

Напряженное состояние на любой площадке, проходящей через заданную точку тела, изображается точками, которые лежат внутри заштрихованной области.

Нанесем на круги Мора точки, изображающие напряженное состояние на площадках с нормальными x , y , z . Для этого на этих площадках найдем полные касательные напряжения :

$$\tau_x = \sqrt{\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2} = \sqrt{20^2 + 40^2} = 44,72 \text{ МПа};$$

$$\tau_y = \sqrt{\tau_{yx}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{20^2 + (-30)^2} = 36,06 \text{ МПа};$$

$$\tau_z = \sqrt{\tau_{zx}^2 + \tau_{yz}^2} = \sqrt{40^2 + (-30)^2} = 50,00 \text{ МПа}.$$

Координаты точек, изображающих напряженное состояние на площадках, перпендикулярных осям x, y, z :

$$K_x(\sigma_x, \tau_x) = K_x(100; 44,72);$$

$$K_y(\sigma_y, \tau_y) = K_y(-45; 36,06);$$

$$K_z(\sigma_z, \tau_z) = K_z(50; 50).$$

Координаты точки, изображающей напряженное состояние на октаэдрической площадке:

$$K_{\text{окт}}(\sigma_{\text{окт}}, \tau_{\text{окт}}) = K_{\text{окт}}(35; 74,5).$$

Точки, изображающие напряженное состояние на площадках с наибольшими касательными напряжениями K_{12} , K_{23} , K_{13} , расположены на концах вертикальных диаметров кругов Мора. Все нанесенные в масштабе точки, изображающие напряженное состояние на всех рассматривавшихся площадках, действительно расположились внутри заштрихованной области (рис. 7).

6. Определение компонент тензора деформации в заданных и главных осях и относительного изменения объема.

Тензор деформации в заданных осях имеет вид:

$$T_{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_x & \frac{1}{2}\gamma_{xy} & \frac{1}{2}\gamma_{xz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{yx} & \varepsilon_y & \frac{1}{2}\gamma_{yz} \\ \frac{1}{2}\gamma_{zx} & \frac{1}{2}\gamma_{zy} & \varepsilon_z \end{pmatrix}. \quad (20)$$

Его компоненты находим по формулам обобщенного закона Гука в произвольных осях:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \mu(\sigma_y + \sigma_z)]; & \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \mu(\sigma_z + \sigma_x)]; & \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \mu(\sigma_x + \sigma_y)]; & \gamma_{zx} &= \frac{\tau_{zx}}{G}, \end{aligned} \quad (21)$$

где G – модуль упругости при сдвиге;

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \mu)} = \frac{2 \cdot 10^5}{2 \cdot (1 + 0,3)} = 7,69 \cdot 10^4 \text{ МПа}.$$

В нашем случае:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [100 - 0,3 \cdot (-45 + 50)] = 49,25 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-45 - 0,3 \cdot (50 + 100)] = -45 \cdot 10^{-5}; \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [50 - 0,3 \cdot (100 - 45)] = 16,75 \cdot 10^{-5}; \end{aligned}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{20}{7,69 \cdot 10^4} = 26 \cdot 10^{-5};$$

$$\gamma_{yz} = \frac{-30}{7,69 \cdot 10^4} = -39 \cdot 10^{-5};$$

$$\gamma_{zx} = \frac{40}{7,69 \cdot 10^4} = 52 \cdot 10^{-5}.$$

Таким образом:

$$T_s = \begin{pmatrix} 49,25 & 13 & 26 \\ 13 & -45 & -19,5 \\ 26 & -19,5 & 16,75 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Тензор деформации в главных осях:

$$T_s = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix}, \quad (22)$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ — главные деформации, определяемые по формулам:

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= \frac{1}{E} [\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)]; \\ \varepsilon_2 &= \frac{1}{E} [\sigma_2 - \mu(\sigma_3 + \sigma_1)]; \\ \varepsilon_3 &= \frac{1}{E} [\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)]. \end{aligned} \quad (23)$$

В нашем случае:

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79)] = 63,69 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [42,57 - 0,3 \cdot (-59,79 + 122,22)] = 11,92 \cdot 10^{-5};$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{2 \cdot 10^5} \cdot [-59,79 - 0,3 \cdot (122,52 + 42,52)] = -54,61 \cdot 10^{-5}.$$

$$T_\varepsilon = \begin{pmatrix} 63,69 & 0 & 0 \\ 0 & 11,92 & 0 \\ 0 & 0 & -54,61 \end{pmatrix} \cdot 10^{-5}.$$

Проверка: $\varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$ — первый инвариант деформированного состояния.

$$(49,25 - 45 + 16,75) \cdot 10^{-5} = (63,69 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5};$$

$$21 \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}.$$

Относительное изменение объема определяется по формуле:

$$\theta = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3. \quad (24)$$

В данном примере

$$\theta = (63,19 + 11,92 - 54,61) \cdot 10^{-5} = 21 \cdot 10^{-5}.$$

7. Разложение заданного тензора напряжения на два тензора — шаровой и девиатор.

Компоненты напряжённого состояния, действующие по граням элементарного параллелепипеда, выделенного в некоторой точке тела, вызывают изменение объема и формы этого параллелепипеда. Относительное изменение объема определяется зависимостью:

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K},$$

где $\sigma_0 = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3}$ — среднее гидростатическое напряжение;

$K = \frac{E}{3(1-2\mu)}$ — модуль объёмной упругости.

$$\theta = \frac{\sigma_0}{K} = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K} \quad (25)$$

Изменение формы параллелепипеда характеризуется наличием относительных деформаций $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}$, которые выражаются через компоненты напряжения по закону Гука (24).

Тензор напряжений T_σ можно представить в виде двух составляющих тензоров, один из которых — шаровой T_σ^0 — связан с изменением только объема, а другой — D_σ — вызывает изменение только формы:

$$T_\sigma = T_\sigma^0 + D_\sigma. \quad (26)$$

Эти тензоры имеют вид:

$$T_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix};$$

$$T_\sigma^0 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_0 \end{pmatrix};$$

$$D_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x - \sigma_0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yz} & \sigma_y - \sigma_0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z - \sigma_0 \end{pmatrix}.$$

Графически разложение исходного напряжённого состояния на шаровой и девиатор представлено на рис. 8.

$$\text{В нашем случае } \sigma_0 = \frac{100 - 45 + 50}{3} = 35 \text{ МПа,}$$

и, следовательно,

$$\begin{pmatrix} 100 & 20 & 40 \\ 20 & -45 & -30 \\ 40 & -30 & 50 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 0 & 0 \\ 0 & 35 & 0 \\ 0 & 0 & 35 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 65 & 20 & 40 \\ 2 & -80 & -30 \\ 40 & -30 & 15 \end{pmatrix}.$$

$T_\sigma \qquad \qquad \qquad T_\sigma^0 \qquad \qquad \qquad D_\sigma$

1) Объем изменяется

$$\theta = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z}{3K} = \frac{\sigma_0}{K};$$

2) по формулам (24):

$$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z,$$

$$\gamma_{xy} \neq 0; \gamma_{yz} \neq 0; \gamma_{zx} \neq 0,$$

следовательно, форма элемента изменяется.

1) Объем изменяется

$$\theta' = \frac{3\sigma_0}{3K} = \frac{\sigma_0}{K} = \theta;$$

2) по формулам (24):

$$\varepsilon'_x = \varepsilon'_y = \varepsilon'_z = \frac{1-2\mu}{E} \sigma_0$$

$$\gamma'_{xy} = \gamma'_{yz} = \gamma'_{zx} = 0,$$

следовательно, форма элемента не изменяется.

1) Объем не изменяется

$$\theta'' = \frac{\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - \sigma_0}{3K} = \frac{\theta_0}{K} = 0;$$

2) по формулам (24):

$$\varepsilon_x \neq \varepsilon_y \neq \varepsilon_z$$

$$\gamma_{xy}^+ = \gamma_{xy}^-; \gamma_{yz}^+ = \gamma_{yz}^-; \gamma_{zx}^+ = \gamma_{zx}^-;$$

следовательно, форма элемента изменяется.

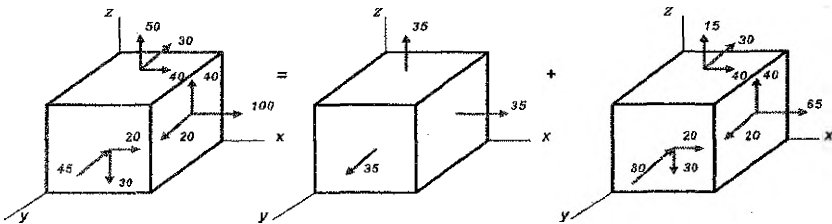


Рисунок 8 – Графическое разложение тензора напряжений на шаровой тензор и девиатор

8. Определение удельной потенциальной энергии деформации (полной, изменения объема, изменения формы).

Полная удельная потенциальная энергия деформации определяется по формулам:

$$u = \frac{1}{2} (\sigma_1 \varepsilon_1 + \sigma_2 \varepsilon_2 + \sigma_3 \varepsilon_3), \quad (27)$$

$$\text{или } u = \frac{1}{2E} [\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - 2\mu(\sigma_1 \sigma_2 + \sigma_2 \sigma_3 + \sigma_3 \sigma_1)].$$

Полную удельную потенциальную энергию u можно представить в виде двух составляющих, одна из которой связана с изменением объёма u_0 , а другая – с изменением формы u_ϕ в окрестности некоторой точки тела. Полная удельная потенциальная энергия и её части имеют прямое отношение к разложению напряжённого состояния на части, связанные с изменением объёма и формы, о которых говорилось в п. 7 и представлено на рис. 8.

$$u = u_0 + u_\phi. \quad (28)$$

Удельная потенциальная энергия изменения объёма и изменения формы выражается зависимостями:

$$u_0 = \frac{1-2\mu}{6E}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2; \quad (29)$$

$$u_\phi = \frac{1+\mu}{3E}(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1). \quad (30)$$

В нашем примере, из (27):

$$u = \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot 10^5} \{ 122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 2 \cdot 0,3 \cdot [122,22 \cdot 42,57 + 42,57 \cdot (-59,79) + (-59,79) \cdot 122,22] \} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

Из (29)

$$u_0 = \frac{(1-2 \cdot 0,3)}{6 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot (122,22 + 42,57 - 59,79)^2 = 3,675 \cdot 10^{-3} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3},$$

из (30)

$$u_\phi = \frac{(1+0,3)}{3 \cdot 2 \cdot 10^5} \cdot [122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) - (-59,79) \cdot 122,22] = 5,41 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3};$$

$$u = u_0 + u_\phi = 0,368 \cdot 10^{-2} + 5,411 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2} \frac{\text{Дж}}{\text{см}^3}.$$

Сравниваем полученные значения для u из (27) и (28):

$$5,779 \cdot 10^{-2} = 5,779 \cdot 10^{-2}.$$

Следует обратить внимание на то, что удельная потенциальная энергия изменения объёма пропорциональна квадрату $\sigma_{\text{ост}}$ (сравнить формулы (29) и (19)), а удельная потенциальная энергия изменения формы пропорциональна квадрату $\tau_{\text{ост}}$ (сравнить формулы (30) и (19)). Именно этим вызван интерес к октаэдрическим площадкам и напряжениям.

9. Определение расчётных напряжений по четырём классическим критериям прочности и пластичности.

Первый критерий (прочности) — критерий наибольших нормальных напряжений:

$$\sigma'_p = \sigma_1 = 122,22 \text{ МПа.} \quad (31)$$

Второй критерий (прочности) — критерий наибольших удлинений:

$$\sigma''_p = \sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3) = 122,22 - 0,3 \cdot (42,57 - 59,79) = 127,39 \text{ МПа.} \quad (32)$$

Третий критерий (пластичности) — критерий наибольших касательных напряжений:

$$\sigma'''_p = \sigma_1 - \sigma_3 = 122,22 - (-59,79) = 182,01 \text{ МПа.} \quad (33)$$

Четвёртый критерий (пластичности) — энергетический:

$$\begin{aligned} \sigma''''_p &= \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2 - \sigma_1\sigma_2 - \sigma_2\sigma_3 - \sigma_3\sigma_1} = \\ &= \sqrt{122,22^2 + 42,57^2 + (-59,79)^2 - 122,22 \cdot 42,57 - 42,57 \cdot (-59,79) - (-59,79) \cdot 122,22} = \\ &= 158,03 \text{ МПа.} \end{aligned}$$

Сравнение результатов определения σ_{pi} показывает, что при заданном напряжённом состоянии наиболее неблагоприятные результаты получены при применении критерия пластичности (энергетической теории). В этом случае расчетное напряжение на 13,2 % больше, чем по энергетическому критерию.

КОНТРОЛЬНЫЕ ВОПРОСЫ

1. Тензор напряжений T_σ , его компоненты.
2. Определение полного P_v , нормального σ_v и касательного τ_v напряжения. Условия на поверхности.
3. Определение величины главных напряжений и положения главных площадок.
4. Проверка ортогональности главных площадок.
5. Максимальные касательные напряжения τ_{\max} .
6. Октаэдрические площадки и напряжения $\sigma_{окт}$, $\tau_{окт}$.
7. Построение круга Мора.
8. Тензор деформации T_ϵ . Относительное изменение объема θ .
9. Обобщенный закон Гука.
10. Разложение тензора напряжений на составляющие T_σ^0 и D_σ (аналитическое и графическое изображение).
11. Удельная потенциальная энергия деформации.
12. Определение расчетных напряжений по теориям прочности.

ЛИТЕРАТУРА

1. Безухов, Н.И. Основы теории упругости, пластичности и ползучести. – М.: Высшая школа, 1968.
2. Киселев, В.А. Плоская задача теории упругости. – М.: Высшая школа, 1976.
3. Александров, А.В. Основы теории упругости и пластичности / А.В. Александров, В.Д. Потапов – М.: Высшая школа, 1990.
4. Рочняк, О.А. Основы теории упругости / О.А. Рочняк, В.Г. Федоров, В.М. Хазисевич – Брест: Изд-во БрГТУ, 2001.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составители:

Хвисевич Виталий Михайлович
Мартинковский Владимир Леонидович
Веремейчик Андрей Иванович

ЗАДАНИЯ И МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению расчетно-графической работы № 1
по дисциплине «Теория упругости и пластичности»

“ИССЛЕДОВАНИЕ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ В ТОЧКЕ ТЕЛА”

для студентов специальностей

1- 70 02 01 – “Промышленное и гражданское строительство”,

1- 70 03 01 – “Автомобильные дороги”

Ответственный за выпуск: Хвисевич В.М.

Редактор: Строкач Т.В.

Компьютерная верстка: Боровикова Е.А.

Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано к печати 27.04.2010 г. Бумага «Снегурочка».
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 1,4. Уч. изд. л. 1,5.
Заказ № 510. Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования
«Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.