

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ
И ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

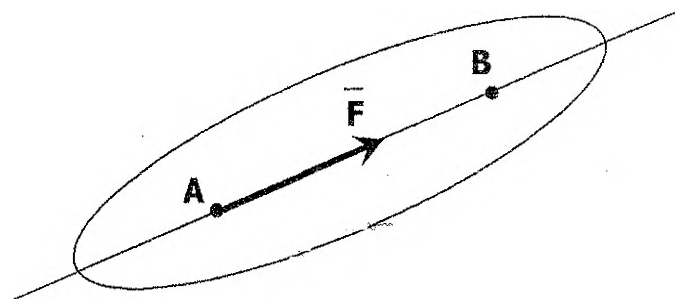
МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ
ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

РАЗДЕЛ

«СТАТИКА»

для студентов строительных специальностей
(3-е издание)



Брест 2009

УДК 620.10.

При изучении курса теоретической механики студенты инженерных специальностей должны выполнить установленные учебной программой расчетно-графические работы (РГР) по разделу «Статика». Эти работы характеризуют способность и умение студента применять изученный материал для решения практических задач о равновесии тел и определения реакций связей конструктивных элементов.

Основная цель методических указаний – оказать помощь студентам при выполнении РГР и развить их навыки самостоятельной работы.

Составители: В.В. Батрак, ст.преподаватель
М.И. Гончаров, ст.преподаватель
М.И. Сазонов, профессор, д.т.н.
В.М. Хвисевич, доцент, к.т.н.

Рецензент: кафедра теоретической механики Белорусского
национального технического университета

СОСТАВ РАБОТЫ

Для принятой схемы каркаса здания (Рис. 1) необходимо выполнить следующие расчеты его конструктивных элементов, в соответствии с индивидуальным вариантом.

1. Определить усилия в стержнях плоской фермы методом вырезания узлов и методом сечений.
2. Определить реакции опор и внутренние усилия (реакции) в промежуточном шарнире составной рамы.
3. Определить усилия в опорных стержнях (реакции) прямоугольной плиты.

УКАЗАНИЯ ПО ОФОРМЛЕНИЮ РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКОЙ РАБОТЫ

1. Расчетно-графическая работа выполняется на стандартных листах формата А4 и оформляется в следующем порядке: титульный лист, задание на РГР, текст решения задач со схемами, выводы и 1-2 чистые страницы для замечаний рецензента.
2. Необходимые данные для расчетов принимать по схемам и таблицам согласно индивидуальному варианту студента.
3. Чертежи и схемы выполняются с соблюдением масштабов и правил графики (при необходимости на миллиметровой бумаге) в соответствии со стандартом СТ БПИ-01-98. Их оформление осуществляется вручную или с помощью ПЭВМ.

Решения задач кратко поясняются и оформляются вручную.

4. Полученные результаты в конце каждого решения выделяются.

На рис. 1 приведена общая схема каркаса промышленного здания с указанием его составных элементов.

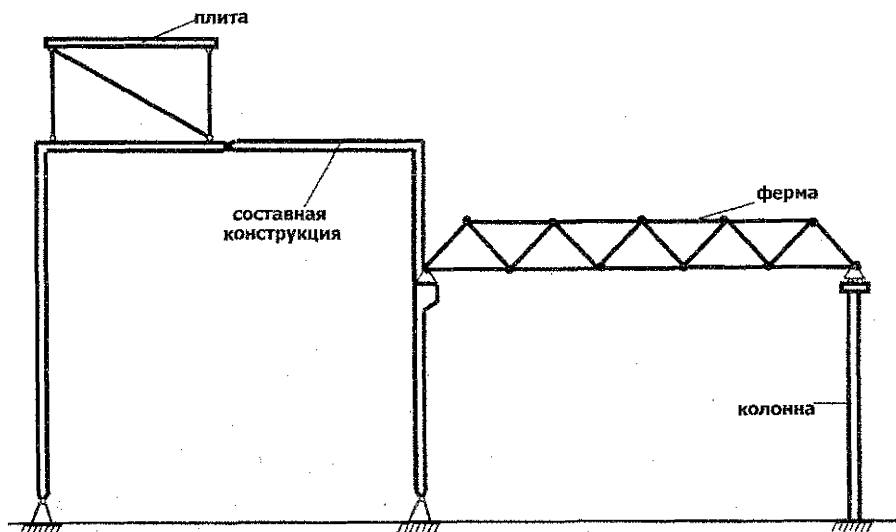
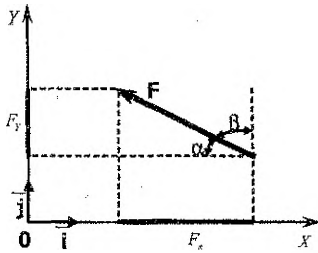


Рис. 1. Принципиальная схема каркаса здания общетехнического назначения

I. КРАТКИЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ТЕОРИИ

В данном разделе содержатся простейшие правила и способы, необходимые студенту для решения любой задачи на равновесие твердых тел.

Проекция силы на координатную ось



Проекцией силы на ось называется скалярная величина, равная произведению модуля силы на косинус острого угла между вектором силы и осью, взятому с соответствующим знаком.

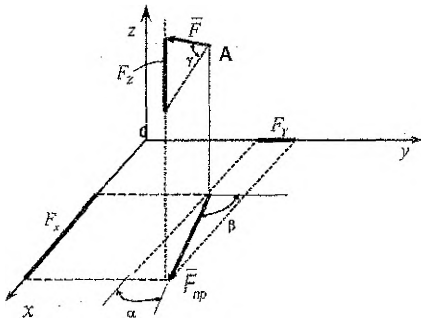
$$F_x = -F \cos \alpha; F_y = F \cos \beta,$$

$$\text{или } F_y = F \sin \alpha.$$

Вектор силы на плоскости равен: $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j}$, а в пространстве $\vec{F} = F_x \vec{i} + F_y \vec{j} + F_z \vec{k}$.

При определении проекции силы на ось в пространстве необходимы дополнительные операции.

Если линия действия силы не параллельна координатной плоскости, то используется способ двойного проектирования.



$$F_z = F \sin \gamma;$$

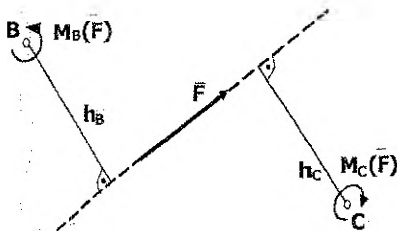
$$F_{np} = F \cos \gamma;$$

$$F_x = F_{np} \cos \alpha = F \cos \gamma \cos \alpha;$$

$$F_y = F_{np} \cos \beta = F \cos \gamma \cos \beta;$$

γ – угол между вектором \vec{F} и плоскостью xOy .

Момент силы относительно точки на плоскости



Моментом силы относительно точки на плоскости называется скалярная величина, равная произведению модуля силы на плечо, взятая с соответствующим знаком.

Плечом h силы \vec{F} относительно точки называют кратчайшее расстояние между этой точкой и линией действия силы, т.е. длину отрезка перпендикуляра, опущенного из точки C на линию действия силы F .

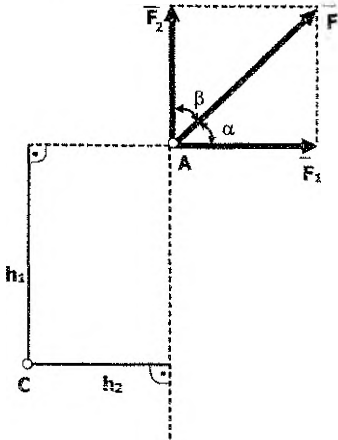
Правило знаков

Если сила поворачивает плоскость относительно точки против движения часовой стрелки, то момент силы положителен. В противном случае момент отрицателен.

$$M_B(\vec{F}) = +F \cdot h_B;$$

$$M_C(\vec{F}) = -F \cdot h_C.$$

Иногда момент силы относительно точки удобно вычислять по теореме Вариньона.

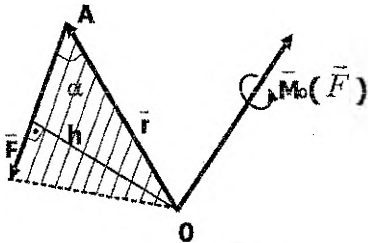


$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$M_C(\vec{F}) = M_C(\vec{F}_1) + M_C(\vec{F}_2) = -F_1 h_1 + F_2 h_2,$$

$$M_C(\vec{F}) = -F \cos \alpha \cdot h_1 + F \cos \beta \cdot h_2.$$

Момент силы относительно центра и оси в пространстве



Моментом силы относительно точки (центра) в пространстве называется векторная величина $\vec{M}_O(\vec{F})$, равная векторному произведению радиус-вектора \vec{r} точки приложения силы A на вектор силы \vec{F} .

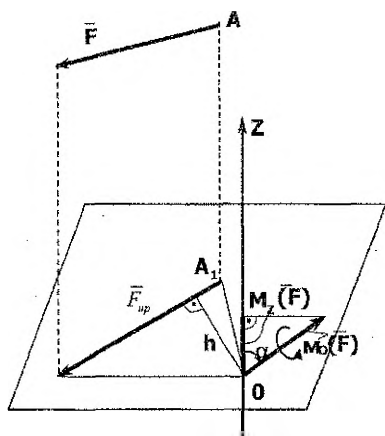
$$\vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Направлен вектор $\vec{M}_O(\vec{F})$ перпендикулярно плоскости векторов \vec{r} , \vec{F} в ту сторону, чтобы с его конца кратчайший поворот от \vec{r} к \vec{F} (отложенный из той же точки O) был виден против движения часовой стрелки.

Модуль момента силы равен:

$$M_O(\vec{F}) = r \cdot F \sin(\widehat{\vec{r}, \vec{F}}) = r \cdot F \sin \alpha; \text{ обозначим } r \cdot \sin \alpha \text{ как } h, \text{ тогда}$$

$$M_O(\vec{F}) = F \cdot h.$$



Моментом силы относительно оси в пространстве называется скалярная величина M_z , равная моменту проекции силы на плоскость, перпендикулярную оси, относительно точки пересечения оси с плоскостью.

При этом M_z положителен, если проекция силы \vec{F}_{sp} поворачивает плоскость вокруг оси при наблюдении с ее положительного конца против движения часовой стрелки.

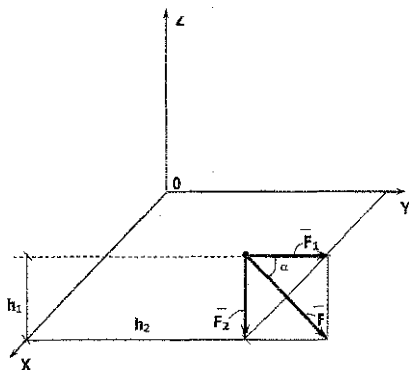
$$M_z(\vec{F}) = F_{sp} h.$$

M_z равен нулю в двух случаях:

- 1) сила \vec{F} направлена параллельно оси Z;
 - 2) линия действия силы \vec{F} пересекает ось Z.
- Связь между $M_0(\vec{F})$ и $M_z(\vec{F})$ выражается равенством:

$$M_z(\vec{F}) = M_0(\vec{F}) \cdot \cos(\vec{M}_0, z).$$

При решении задач удобно пользоваться теоремой Вариньона о моменте равнодействующей относительно оси.



Например:

сила \vec{F} лежит в плоскости, параллельной координатной плоскости ZOY.

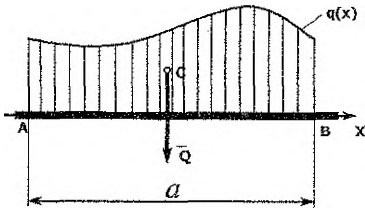
$$\vec{F} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2;$$

По теореме Вариньона

$$\begin{aligned} M(\vec{F}) &= -F_1 \cdot h_1 - F_2 \cdot h_2 = \\ &= -F \cos \alpha \cdot h_1 - F \sin \alpha \cdot h_2 \end{aligned}$$

Распределенные нагрузки

Распределенными называются нагрузки, непрерывно приложенные вдоль некоторой линии или на поверхности тела. Они характеризуются интенсивностью q , то есть силой, приходящейся на единицу длины или площади конструктивного элемента.



Например, равнодействующая \bar{Q} распределенной по длине элемента нагрузки по модулю равна площади криволинейной трапеции и приложена в центре тяжести С этой трапеции (рис. 1.1).

Рис. 1.1. Произвольно распределенная нагрузка

На практике часто распространены равномерно распределенная нагрузка ($q=const$) и нагрузка, линейно изменяющаяся по длине (треугольная) (рис. 1.2, 1.3).

$$Q = qa$$

$$Q = \frac{1}{2} q_{max} a$$

$$(0 \leq q \leq q_{max})$$

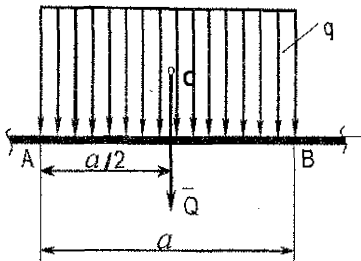


Рис. 1.2. Равномерно распределенная нагрузка

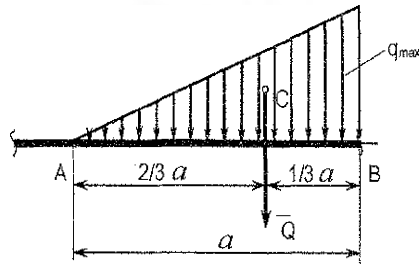


Рис. 1.3. Нагрузка, распределенная по линейному закону

II. ЗАДАНИЕ 1

«ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В СТЕРЖНЯХ ПЛОСКОЙ ФЕРМЫ МЕТОДОМ ВЫРЕЗАНИЯ УЗЛОВ И МЕТОДОМ СЕЧЕНИЙ»

Приступая к решению задачи, необходимо изучить следующие темы лекционного курса: связи и их реакции; система сходящихся сил; плоская произвольная система сил; определение усилий в стержнях фермы методом вырезания узлов и методом сечений (Риттера).

2.1. Формулировка задачи

По заданной схеме фермы и приложенным нагрузкам требуется определить усилия во всех стержнях фермы методом вырезания узлов аналитическим и геометрическим (графическим) способами, а также усилия в нескольких заданных стержнях методом сечений.

Схемы фермы, величины и направления приложенных внешних нагрузок и дополнительные требования указываются преподавателем при выдаче индивидуального задания (см. приложение 1).

2.2. Требования и способы решения

При решении задачи вначале определяются реакции опор с помощью условий равновесия произвольной плоской системы сил. Затем методом вырезания узлов для каждого из них производится аналитическое и графическое решения и выполняется проверка решения. Дополнительно, для указанных преподавателем стержней, производится решение методом Риттера (методом сечений).

Метод сечений используется тогда, когда необходимо определить усилия лишь в отдельных стержнях фермы. При этом сечение проводится не более чем через три стержня с неизвестными усилиями.

Все «ручное» решение можно облегчить и заметно ускорить во времени, если воспользоваться математическими пакетами, установленном на ПЭВМ.

2.3. Пример решения задачи

Для заданной плоской статически определимой фермы (рис. 2.1) необходимо определить усилия в стержнях.

Исходные данные:

$\alpha_1=30^\circ$	$F_1=2\text{ kH}$	$\alpha_4=45^\circ$	$F_4=3\text{ kH}$
$\alpha_2=60^\circ$	$F_2=2\text{ kH}$	$\alpha_5=0^\circ$	$F_5=4\text{ kH}$
$\alpha_3=0^\circ$	$F_3=0\text{ kH}$	$\alpha_6=30^\circ$	$F_6=4\text{ kH}$

В соответствии с вариантом вычерчиваем схему фермы (см.рис.2.1)

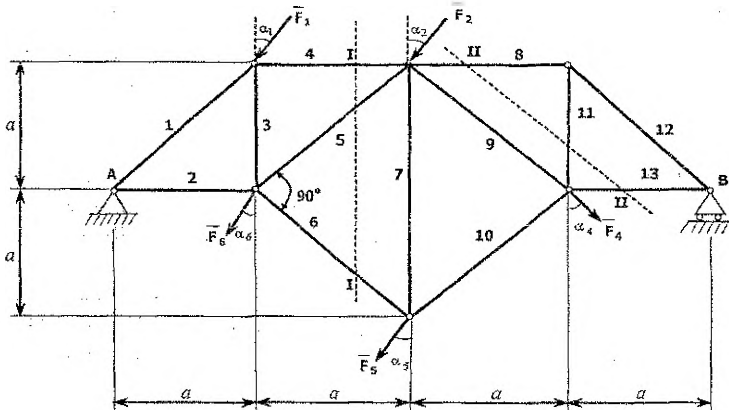


Рис. 2.1. Исходная схема фермы

2.3.1. Определение опорных реакций

Изобразим расчетную схему фермы в соответствии с исходными данными, заменив действие опорных устройств связей их реакциями $\vec{R}_A(X_A, Y_A)$ и \vec{R}_B . Начало координат поместим на неподвижной опоре А (см.рис. 2.2).

Ферма находится в равновесии под действием плоской произвольной системы сил.

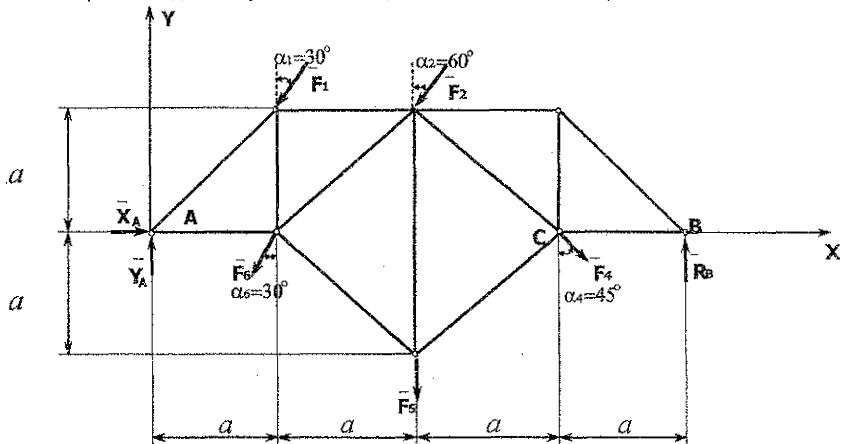


Рис. 2.2. Расчетная схема фермы

Составим уравнения равновесия фермы, используя основную форму.

$$\sum F_{KX} = 0; \quad X_A - F_1 \cos 60^\circ - F_2 \cos 30^\circ + F_4 \cos 45^\circ - F_6 \cos 60^\circ = 0; \quad (2.1)$$

$$\sum F_{KY} = 0; \quad Y_A - F_1 \cos 30^\circ - F_2 \cos 60^\circ + R_B - F_4 \cos 45^\circ - F_5 - F_6 \cos 30^\circ = 0; \quad (2.2)$$

$$\sum M_A(\vec{F}_k) = 0; \quad -F_1 \cos 30^\circ \cdot a + F_1 \sin 30^\circ \cdot a - F_2 \cos 60^\circ \cdot 2a + F_2 \sin 60^\circ \cdot a + \\ + R_B \cdot 4a - F_5 \cdot 2a - F_4 \cos 45^\circ \cdot 3a - F_6 \cos 30^\circ \cdot a = 0; \quad (2.3)$$

Подставив числовые данные, из уравнения (2.1) определяем X_A :

$$X_A = F_1 \cos 60^\circ + F_2 \cos 30^\circ - F_4 \cos 45^\circ + F_6 \cos 60^\circ = 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,866 - 3 \cdot 0,707 + 4 \cdot 0,5 = 2,61 \text{ кН.}$$

Реакцию \bar{R}_B можно определить из уравнения (2.3), сократив левую и правую части на a :

$$R_B = (F_1 \cos 30^\circ - F_1 \sin 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ \cdot 2 - F_2 \sin 60^\circ + F_5 \cdot 2 + F_4 \cos 45^\circ \cdot 3 + F_6 \cos 30^\circ) / 4 = \\ = (2 \cdot 0,866 - 2 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5 - 2 \cdot 0,866 + 4 \cdot 2 + 3 \cdot 0,707 \cdot 3 + 4 \cdot 0,866) / 4 = 4,71 \text{ кН.}$$

Из уравнения (2.2) определяем Y_A :

$$Y_A = F_1 \cos 30^\circ + F_2 \cos 60^\circ - R_B + F_4 \cos 45^\circ + F_5 + F_6 \cos 30^\circ = \\ = 2 \cdot 0,866 + 2 \cdot 0,5 - 4,71 + 3 \cdot 0,707 + 4 + 4 \cdot 0,866 = 7,61 \text{ кН.}$$

Проверка: составим дополнительное уравнение равновесия

$$\sum M_c(\vec{F}_k) = 0;$$

$$-Y_A \cdot 3a + R_B \cdot a + F_5 \cdot a + F_6 \cos 30^\circ \cdot 2a + F_1 \cos 30^\circ \cdot 2a + F_1 \sin 30^\circ \cdot a + \\ + F_2 \cos 60^\circ \cdot a + F_2 \sin 60^\circ \cdot a = 0;$$

$$-7,61 \cdot 3 + 4,707 + 4 + 8 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + 1 + 1 + \sqrt{3} = -22,83 + 4,71 + 4 + 4 \cdot$$

$$1,73 + 2 \cdot 1,72 + 2 + 1,73 = -22,83 + 22,8 = -0,03.$$

Оцениваем относительную погрешность расчета:

$$\epsilon = \frac{0,03 \cdot 100\%}{22,83} = 0,13\% < 3\%, \text{ что допустимо.}$$

2.3.2. Определение усилий в стержнях методом вырезания узлов

Построим расчетную схему фермы. Для этого пометим узлы фермы буквами, а стержни – цифрами. Нумерацию стержней выполняем в порядке, соответствующем методу вырезания узлов.

Мысленно вырезаем узлы фермы, полагая что все стержни растянуты. К каждому узлу прикладываем соответствующие внешние силы, реакции опор и стержней (см.рис.2.3)

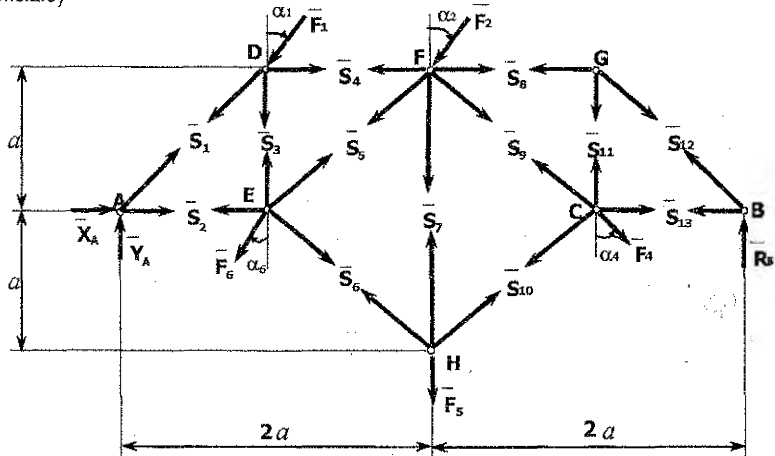


Рис.2.3 Расчетные схемы узлов

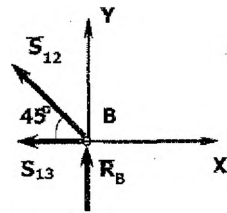
Расчет целесообразно начать с узла В, который находится в равновесии под действием плоской системы сходящихся сил (вначале неизвестные усилия стержней направляем от узлов, полагая стержни растянутыми). Расчет производим аналитическим и геометрическим способами. Сначала определяем усилия аналитическим способом. Для этого введем систему отсчета xВу и составим два уравнения равновесия:

$$\text{Узел В: } \begin{cases} \sum F_x = 0; \\ \sum F_y = 0; \end{cases} \begin{cases} -S_{13} - S_{12} \cos 45^\circ = 0; \\ R_B + S_{12} \cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

Из полученных уравнений находим неизвестные:

$$S_{12} = \frac{R_B}{\cos 45^\circ} = \frac{4,707}{0,707} = -6,66 \text{ кН};$$

$$S_{13} = -S_{12} \cos 45^\circ = 6,66 \cdot 0,707 = 4,71 \text{ кН}.$$



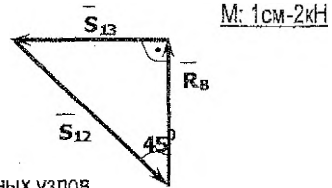
Далее расчет осуществляется геометрическим способом. Для этого построим многоугольник сил, который (по условию равновесия) должен быть замкнут. Сначала в мас-

штабе откладываем вектор какой-либо известной силы. В его конец помещаем следующий какой-либо известный вектор и т.д. Через конец последнего известного вектора проводим линию действия любой неизвестной силы. Линию действия второй неизвестной силы проводим через начало первого известного вектора. Получившийся силовой многоугольник замыкается. В результате находим направление и модули неизвестных сил.

С учетом этого правила строим силовой многоугольник для узла В.

Сравнивая значения усилий \bar{S}_{12} и \bar{S}_{13} , найденные аналитически и геометрически, видим, что они совпадают.

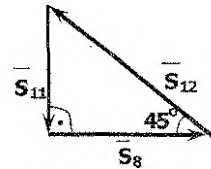
Аналогично рассматриваем равновесие остальных узлов.



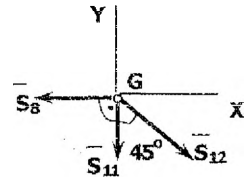
Узел G:
$$\begin{cases} \sum F_{ix} = 0; & S_{12} \cos 45^\circ - S_8 = 0; \\ \sum F_{iy} = 0; & -S_{11} - S_{12} \cos 45^\circ = 0. \end{cases}$$

$$S_8 = S_{12} \cos 45^\circ = -6,66 \cdot 0,707 = -4,71 \text{ kH};$$

$$S_{11} = -S_{12} \cos 45^\circ = -(-6,66) \cdot 0,707 = 4,707 \text{ kH}$$



При геометрическом решении учитываем знак усилия \bar{S}_{12} , которое мы уже определили рассматривая равновесие узла «В» (здесь вектор \bar{S}_{12} считается известным и будет направлен к узлу G, т.е. стержень 12 сжат).



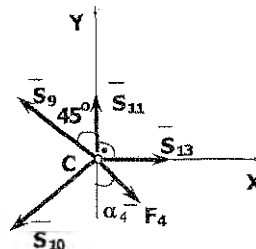
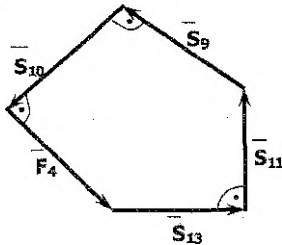
Узел C:
$$\begin{cases} S_9 - S_9 \cos 45^\circ - S_{10} \cos 45^\circ + F_4 \cos 45^\circ = 0; \\ S_{11} + S_9 \cos 45^\circ - S_{10} \cos 45^\circ - F_4 \cos 45^\circ = 0; \end{cases}$$

Складывая 2 уравнения, получаем:

$$S_{13} + S_{11} - 2S_{10} \cos 45^\circ = 0;$$

$$S_{10} = \frac{S_{11} + S_{13}}{2 \cos 45^\circ} = \frac{4,71 + 4,71}{2 \cdot 0,707} = 6,66 \text{ kH};$$

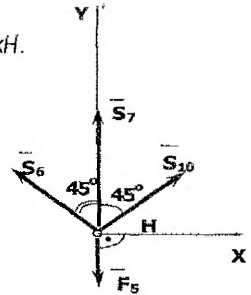
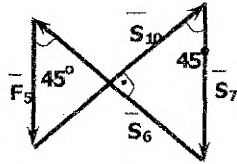
$$S_9 = \frac{S_{13} - S_{10} \cos 45^\circ + F_4 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{4,71 - 6,66 \cdot 0,707 + 3 \cdot 0,707}{0,707} = 3 \text{ kH}.$$



$$\text{Узел H: } \begin{cases} S_{10} \cos 45^\circ - S_6 \cos 45^\circ = 0; \\ S_7 - F_5 + S_{10} \cos 45^\circ + S_6 \cos 45^\circ = 0; \end{cases}$$

$$S_6 = S_{10} = 6,66 \text{ kH};$$

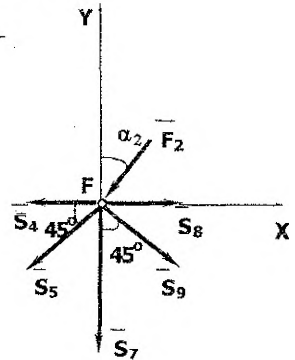
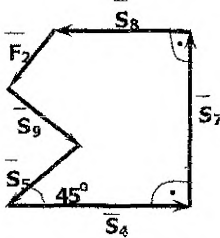
$$S_7 = F_5 - S_{10} \cos 45^\circ - S_6 \cos 45^\circ = 4 - 2 \cdot 6,66 \cdot 0,707 = -5,42 \text{ kH}.$$



$$\text{Узел F: } \begin{cases} S_8 - S_4 + S_9 \cos 45^\circ - F_2 \cos 30^\circ - S_5 \cos 45^\circ = 0; \\ -S_7 - F_2 \cos 60^\circ - S_5 \cos 45^\circ - S_9 \cos 45^\circ = 0; \end{cases}$$

$$S_9 = \frac{-S_7 - F_2 \cos 60^\circ - S_5 \cos 45^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{-(-5,42) - 2 \cdot 0,5 - 3 \cdot 0,707}{0,707} = 3,25 \text{ kH};$$

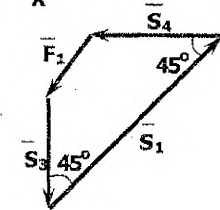
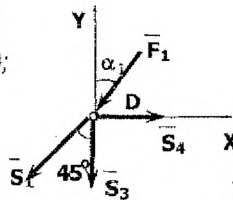
$$S_4 = S_8 + S_6 \cos 45^\circ - F_2 \cos 30^\circ - S_5 \cos 45^\circ = 4,71 + 3 \cdot 0,707 - 2 \cdot 0,866 - 3,25 \cdot 0,707 = -6,62 \text{ kH}.$$



$$\text{Узел D: } \begin{cases} S_4 - S_1 \cos 45^\circ - F_1 \sin 30^\circ = 0; \\ -S_3 - F_1 \cos 30^\circ - S_1 \cos 45^\circ = 0; \end{cases}$$

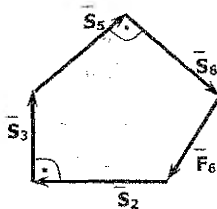
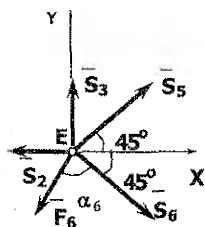
$$S_1 = \frac{S_4 - F_1 \sin 30^\circ}{\cos 45^\circ} = \frac{-6,62 - 2 \cdot 0,5}{0,707} = -10,78 \text{ kH};$$

$$S_3 = -F_1 \cos 30^\circ - S_1 \cos 45^\circ = -2 \cdot 0,866 - (-10,78) \cdot 0,707 = 5,89 \text{ kH}.$$



$$\text{Узел E: } S_3 \cos 45^\circ + S_6 \cos 45^\circ - S_2 - F_6 \cos 60^\circ = 0;$$

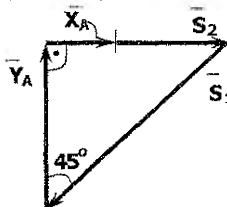
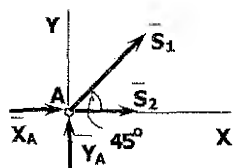
$$S_2 = S_3 \cos 45^\circ + S_6 \cos 45^\circ - F_6 \cos 60^\circ = 3,25 \cdot 0,707 + 6,66 \cdot 0,707 - 4 \cdot 0,5 = 5,01 \text{ kH}.$$



Узел A используем для проверки решения:

$$\sum F_{kx} = 0; X_A + S_2 + S_1 \cos 45^\circ = 2,61 + 5 - 10,765 \cdot 0,707 = 0,000145 \text{ кН.} \quad (2.4)$$

$$\sum F_{ky} = 0; Y_A + S_1 \cos 45^\circ = 7,610 - 10,765 \cdot 0,707 = -0,00086 \text{ кН.} \quad (2.5)$$



Относительная погрешность решения определяется как максимальная абсолютная величина отношения невязки δ , каждого из уравнений (2.4 - 2.5) к своим слагаемым, входящим в уравнение:

$$\Delta = \max \left| \frac{\delta_i}{Z_i} \right| = \left| \frac{-0,00086}{7,61} \right| = 0,00008 < 0,05.$$

Погрешность решения допустима.

Окончательно анализируя знаки найденных усилий, заключаем, что стержни 2, 3, 5, 6, 9, 10, 11, 13 растянуты, стержни 1, 4, 7, 8, 12 сжаты.

2.3.3. Определение усилий в стержнях методом сечений (метод Риттера)

Определим усилия в указанных стержнях (4-6, 8-10) фермы (рис.2.1). Проводим сечение 1-1 и мысленно отбрасывая правую часть фермы, заменим ее действие на оставшуюся часть реакциями перерезанных стержней \bar{S}_4 , \bar{S}_5 , \bar{S}_6 (рис. 2.4).

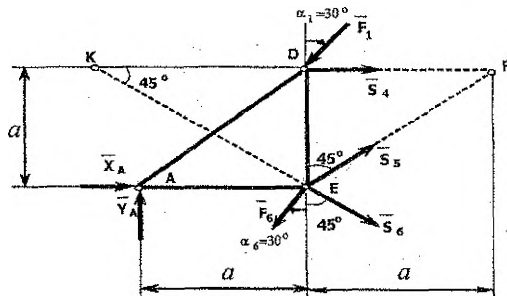


Рис. 2.4. Расчетная схема метода Риттера для сечения 1 - 1

Составляем уравнения моментов относительно точек Риттера.
 Такими являются точки E, F, K , в которых попарно пересекаются стержни.

$$\sum M_E(\bar{F}_K) = 0; \quad F_1 \sin \alpha_1 \cdot a - Y_A \cdot a - S_4 \cdot a = 0;$$

$$\sum M_F(\bar{F}_K) = 0; \quad -Y_A \cdot 2a + X_A \cdot a + F_1 \cos \alpha_1 \cdot a + S_8 \cos 45^\circ \cdot a + S_8 \sin 45^\circ \cdot a - F_6 \sin \alpha_6 \cdot a + F_6 \cos \alpha_6 \cdot a = 0;$$

$$\sum M_K(\bar{F}_K) = 0; \quad -F_1 \cos \alpha_1 \cdot a + S_8 \cos 45^\circ \cdot a + S_5 \sin 45^\circ \cdot a - F_6 \cos \alpha_6 \cdot a - F_6 \sin \alpha_6 \cdot a + X_A \cdot a = 0.$$

Из первого уравнения находим S_4 :

$$S_4 = F_1 \sin \alpha_1 - Y_A = 2 \cdot \frac{1}{2} - 7,61 = -6,61 \text{ кН};$$

Из второго уравнения определяем S_6 :

$$S_6 = \frac{Y_A \cdot 2a - X_A \cdot a - F_1 \cos \alpha_1 \cdot a + F_6 \sin \alpha_6 \cdot a - F_6 \cos \alpha_6 \cdot a}{2a \cdot \cos 45^\circ} = \frac{7,61 \cdot 2 - 2,61 - 2 \cdot 0,866 + 4 \cdot 0,5 - 4 \cdot 0,866}{2 \cdot 0,707} = 6,66 \text{ кН}.$$

Из третьего уравнения находим S_5 :

$$S_5 = \frac{F_1 \cos \alpha_1 \cdot a + F_6 \cos \alpha_6 \cdot a + F_6 \sin \alpha_6 \cdot a - X_A \cdot a}{2 \cdot a \cdot \cos 45^\circ} = \frac{2 \cdot 0,866 + 4 \cdot 0,866 + 4 \cdot 0,5 - 2,61}{2 \cdot 0,707} = 3,25 \text{ кН}.$$

Теперь проводим сечение II-II по стержням 8,11,13 (рис.2.1) и рассматриваем равновесие правой части (рис.2.5).

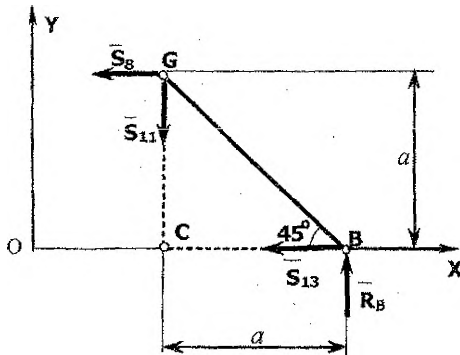


Рис. 2.5. Расчетная схема метода Риттера для сечения II – II

$$\sum F_{by} = 0; \quad -S_{11} + R_B = 0; \quad S_{11} = R_B = 4,71 \text{ кН}.$$

$$\sum M_G(\bar{F}_K) = 0; \quad -S_{13} \cdot a + R_B \cdot a = 0; \quad S_{13} = R_B = 4,71 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C(\bar{F}_K) = 0; \quad S_8 \cdot a + S_{11} \cdot a = 0; \quad S_8 = -S_{11} = -4,71 \text{ кН}.$$

Сравнивая результаты расчетов по одному и другому методу, видим, что они совпадают.

Номер стержня	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
Сила, кН	-10,78	5,01	5,89	-5,62	3,25	6,66	-5,42	-4,71	3	6,66	4,707	-6,66	4,71
Сила, кН				-6,61	3,25	6,66		-4,71			4,71		4,71

III. ЗАДАНИЕ 2

«ОПРЕДЕЛЕНИЕ РЕАКЦИЙ ОПОР И ДАВЛЕНИЯ В ШАРНИРЕ СОСТАВНОЙ РАМЫ»

Приступая к решению задачи, необходимо изучить раздел «Произвольная плоская система сил» лекционного курса.

3.1. Условие задачи

Составная рама состоит из двух жестких частей, шарнирно соединенных в точке С. С помощью внешних связей (шарнирно-неподвижных, шарнирно-подвижных опор, заделок) рама крепится к неподвижному основанию. Рама загружена сосредоточенными силами $F_1 \div F_7$, парами сил с моментами $M_1 \div M_3$ и равномерно распределенной нагрузкой с интенсивностью q .

Необходимо определить реакции опор и давление в шарнире С.

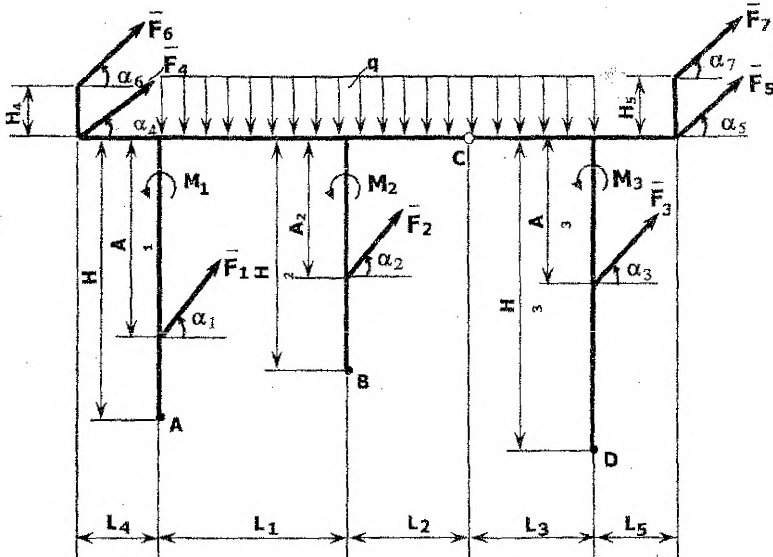


Рис. 3.1. Схема рамы с общей нагрузкой

Геометрические схемы конструкций приведены в приложении II, а общая схема нагружения для всех вариантов задания на рис. 3.1. Исходные данные для расчета приведены в листе индивидуального задания, синтезированного на ЭВМ, который выдается преподавателем каждому студенту.

Информация о связях в точках А, В, D содержится в бланке индивидуального задания. Условные обозначения опор и замена их реакциями приведены в таблице 3.1.

Углы для определения положения сил отсчитываются от горизонтали следующим образом:



Таблица 3.1.

Тип опоры	Жесткая заделка	Шарнирно-неподвижная	Шарнирно-подвижная
Условное обозначение			
	стойка рамы	стойка рамы	стойка рамы

При составлении расчетной схемы по исходным данным не нужно показывать силы и пары, значения которых равны нулю.

Указывая направления сосредоточенных сил, рекомендуется перейти от тупых углов (если они есть) к острым.

3.2. Пример решения задачи

Для заданной составной конструкции (рис.3.2) необходимо определить реакции внешних и внутренних связей.

Исходные данные:

$$L1 = 2,6 \text{ м}$$

$$L2 = 0,0 \text{ м}$$

$$L3 = 2,5 \text{ м}$$

$$L4 = 2,5 \text{ м}$$

$$L5 = 0,0 \text{ м}$$

$$H1 = 3,9 \text{ м}$$

$$H2 = 0,0 \text{ м}$$

$$H3 = 5,3 \text{ м}$$

$$H4 = 0,0 \text{ м}$$

$$H5 = 1,7 \text{ м}$$

Опора А – шарнирно-подвижная; $\beta = -45,0$; опора D – жесткая заделка

$$F_1 = 24 \text{ кН}$$

$$\alpha_1 = 180^\circ$$

$$F_2 = 0 \text{ кН}$$

$$\alpha_2 = 0^\circ$$

$$F_3 = 0 \text{ кН}$$

$$\alpha_3 = 0^\circ$$

$$F_4 = 12 \text{ кН}$$

$$\alpha_4 = 45^\circ$$

$$F_5 = 0 \text{ кН}$$

$$\alpha_5 = 0^\circ$$

$$F_6 = 0 \text{ кН}$$

$$\alpha_6 = 0^\circ$$

$$F_7 = 38 \text{ кН}$$

$$\alpha_7 = 150^\circ$$

$$A_1 = 2,5 \text{ м}$$

$$A_2 = 0,0 \text{ м}$$

$$A_3 = 0,0 \text{ м}$$

$$q = 5 \text{ кН/м}$$

$$M_1 = 0,0 \text{ кНм}$$

$$M_2 = 0,0 \text{ кНм}$$

$$M_3 = 27,0 \text{ кНм}$$

Решение

В соответствии с исходными данными, рис. 3.1 и таблицей 3.1 изображаем в масштабе схему рамы с нагрузкой (рис. 3.2). Мысленно отбросив внешние связи, заменим их действие реакциями $\bar{R}_A, \bar{X}_D, \bar{Y}_D, \bar{M}_D$. Распределенную нагрузку заменим ее равнодействующей \bar{Q} (рис. 3.2), величина которой равна: $Q = (L_1 + L_2 + L_3) \cdot q = 5,1 \cdot 5 = 25,5$ кН.

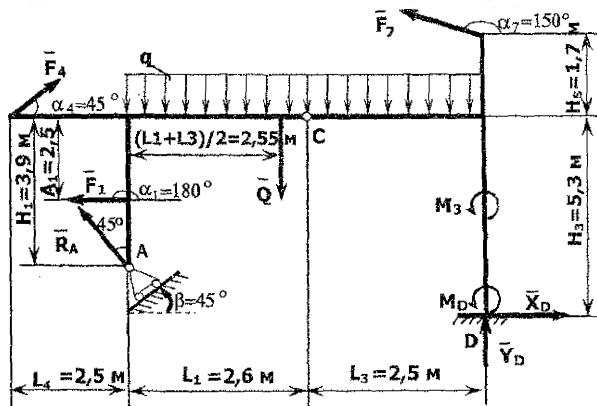


Рис. 3.2. Исходная схема рамы

Освободим раму от внешних связей и их действие на раму заменим соответствующими реакциями связей ($\bar{R}_A, \bar{M}_D, \bar{X}_D, \bar{Y}_D$).

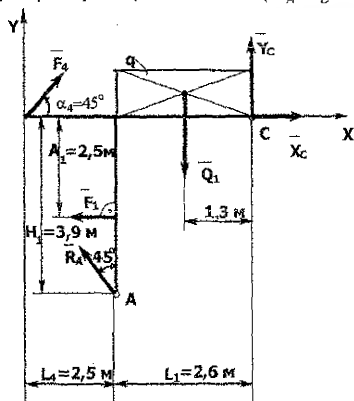


Рис. 3.3. Расчетная схема левой части рамы

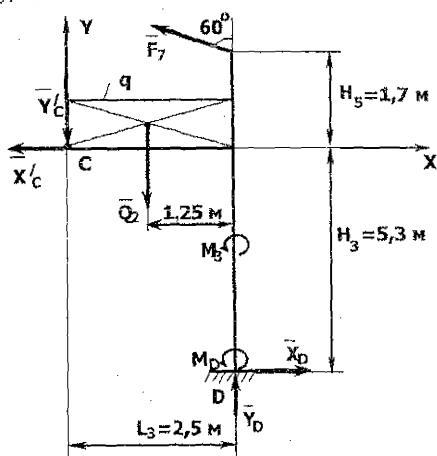


Рис. 3.4. Расчетная схема правой части рамы

Рама находится в равновесии под действием заданных сил и реакций связей (рис. 3.2), образующих произвольную плоскую систему сил, для которой можно составить три уравнения равновесия. Поскольку неизвестных реакций четыре, а уравнений равновесия только

три, расчленим раму на части в шарнире С. В этом шарнире неизвестную реакцию для левой части конструкции заменим составляющими \bar{X}_C, \bar{Y}_C , направляя их в сторону положительного направления осей координат. Тогда для правой части составляющие реакции \bar{X}'_C, \bar{Y}'_C будут направлены в противоположную сторону, т.е. $\bar{X}_C = -\bar{X}'_C, \bar{Y}_C = -\bar{Y}'_C$ (рис. 3.3 и 3.4).

Распределенную нагрузку на левой и правой частях рамы заменим равнодействующими \bar{Q}_1 и \bar{Q}_2 , соответственно. Причем $Q_1 = 2,6 \cdot q = 2,6 \cdot 5 = 13$ кН;
 $Q_2 = 2,5 \cdot q = 2,5 \cdot 5 = 12,5$ кН.

Составим уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, приложенных к левой части (см. рис. 3.3):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad X_C + F_4 \cos 45^\circ - F_1 - R_A \sin 45^\circ = 0; \quad (3.1)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_C + F_4 \sin 45^\circ - Q_1 - R_A \cos 45^\circ = 0; \quad (3.2)$$

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = 0; \quad 1,3Q_1 - 2,5F_1 - 2,6R_A \cos 45^\circ - 5,1 \cdot F_4 \sin 45^\circ - 3,9R_A \sin 45^\circ = 0; \quad (3.3)$$

Из уравнения (3.3) находим реакцию \bar{R}_A :

$$R_A = \frac{1,3Q_1 - 2,5F_1 - 5,1F_4 \sin 45^\circ}{2,6 \cos 45^\circ + 3,9 \sin 45^\circ} = \frac{1,3 \cdot 13 - 2,5 \cdot 24 - 5,1 \cdot 12 \cdot 0,707}{2,6 \cdot 0,707 + 3,9 \cdot 0,707} = -18,79 \text{ кН.}$$

Из (3.2) и (3.3) определяем давления (реакции) \bar{X}_C, \bar{Y}_C :

$$X_C = F_1 + R_A \sin 45^\circ - F_4 \cos 45^\circ = 24 - 18,8 \cdot 0,707 - 12 \cdot 0,707 = 2,22 \text{ кН,}$$

$$Y_C = Q_1 - F_4 \sin 45^\circ + R_A \cos 45^\circ = 13 - 12 \cdot 0,707 + 18,8 \cdot 0,707 = 17,8 \text{ кН.}$$

Составляем уравнения равновесия произвольной плоской системы сил, приложенных к правой части (рис. 3.4):

$$\sum F_{ix} = 0; \quad -X'_C - F_7 \sin 60^\circ + X_D = 0; \quad (3.4)$$

$$\sum F_{iy} = 0; \quad Y_D - Y'_C - Q_2 + F_7 \cos 60^\circ = 0; \quad (3.5)$$

$$\sum M_D(\bar{F}_k) = 0; \quad 5,3X'_C + 2,5Y'_C + 1,25Q_2 + M_3 + 7F_7 \sin 60^\circ + M_D = 0. \quad (3.6)$$

Откуда

$$X_D = X'_C + F_7 \sin 60^\circ = 2,22 + 38 \cdot 0,866 = 35,13 \text{ кН;}$$

$$Y_D = Y'_C + Q_2 - F_7 \cos 60^\circ = 17,8 + 12,5 - 38 \cdot 0,5 = 11,3 \text{ кН;}$$

$$M_D = -5,3X'_C - 2,5Y'_C - 1,25Q_2 - M_3 - 7F_7 \sin 60^\circ = \\ = -5,3 \cdot 2,22 - 2,5 \cdot 17,8 - 1,25 \cdot 12,5 - 27 - 7 \cdot 38 \cdot 0,866 = -329,25 \text{ кН} \cdot \text{м.}$$

Для проверки правильности решения составим уравнение равновесия сил, приложенных ко всей раме (рис. 3.2):

$$\sum M_C(\bar{F}_k) = M_D + M_3 + 2,5Y_D + 5,3X_D + 1,7F_7 \sin 60^\circ + 2,5F_7 \cos 60^\circ + 0,05Q - 5,1F_4 \sin 45^\circ - \\ - 2,5F_1 - 2,6R_A \cos 45^\circ - 3,9R_A \sin 45^\circ = -329,25 + 27 + 2,5 \cdot 11,3 + 5,3 \cdot 35,13 + 1,7 \cdot 38 \cdot 0,866 +$$

$$+2,5 \cdot 38 \cdot 0,5 + 0,05 \cdot 25,5 - 5,1 \cdot 12 \cdot 0,707 - 2,5 \cdot 24 + 2,6 \cdot (-18,79) \cdot 0,707 -$$

$$-3,9 \cdot (-18,79) \cdot 0,707 = -432,52 + 432,07 = 0,45 \neq 0.$$

Оцениваем относительную погрешность расчета:

$$\varepsilon = \frac{0,45 \cdot 100\%}{432,52} = 0,1\% < 3\%, \text{ что допустимо.}$$

Ответ: $R_A = -18,8 \text{ кН}, \quad X_D = 35,1 \text{ кН}, \quad Y_D = 11,3 \text{ кН},$
 $M_D = -329,25 \text{ кНм}, \quad X_C = 2,22 \text{ кН}, \quad Y_C = 17,8 \text{ кН}.$

Знаки показывают, что \bar{R}_A и M_D направлены противоположно показанным на рис. 3.2.

IV. ЗАДАНИЕ 3

«ОПРЕДЕЛЕНИЕ УСИЛИЙ В ОПОРНЫХ СТЕРЖНЯХ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛИТЫ»

Приступая к решению задачи, необходимо изучить раздел «Произвольная пространственная система сил» лекционного курса.

4.1. Условие задачи

Однородная прямоугольная плита весом \bar{G} удерживается в равновесии при помощи шести стержней, прикрепленных к неподвижному основанию. Плита загружена сосредоточенными силами \bar{P} и \bar{Q} и парами сил с моментами M_1, M_2, M_3 , плоскости действия которых соответственно параллельны плоскостям yOz, xOz, xOy . Общая схема плиты приведена на рис. 4.1. Положение опорных стержней; размеры плиты и ее вес; значение сил \bar{P}, \bar{Q} , точки их приложения и углы α, β, γ , образованные этими силами с осями Ox, Oy, Oz , соответственно; значения моментов пар M_1, M_2, M_3 приведены в бланке индивидуального задания, синтезированного на ЭВМ.

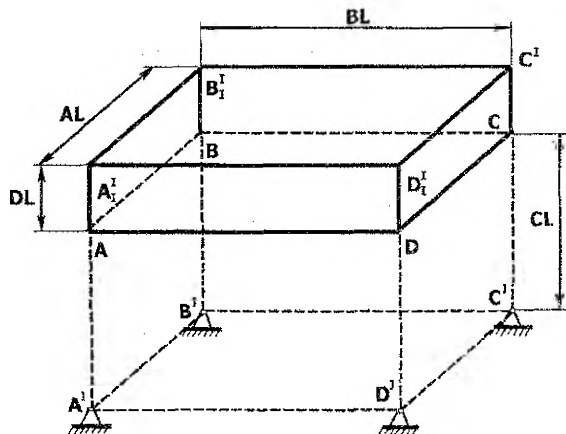


Рис. 4.1. Общая схема плиты

Требуется определить усилия в стержнях, поддерживающих плиту.

4.2. Пример решения задачи

Для заданной конструкции (рис.4.2) необходимо определить реакции невесомых стержней.

Исходные данные:

Стержни: CA' , DD' , DA' , AB' , CC' .

$AL = 2,3$ м; $BL = 1,5$ м; $CL = 2,6$ м; $DL = 0,4$ м,

вес плиты $G = 31$ кН.

$P = 13$ кН приложена в точке A'' ; $\alpha_1 = 60$; $\beta_1 = 45$; $\gamma_1 = 60$.

$Q = 31$ кН приложена в точке C'' ; $\alpha_2 = 90$; $\beta_2 = 90$; $\gamma_2 = 0$.

$M_1 = 49$ кНм; $M_2 = 0$ кНм; $M_3 = 0$ кНм.

Решение:

1. По исходным данным и рис. 4.1 вычерчиваем схему конструкции с нагрузкой (рис. 4.2). Определяем необходимые тригонометрические характеристики и значения углов:

$$\theta = \arctg \frac{AL}{CL} = \arctg \frac{2,3}{2,8} = 39,4^\circ; \quad \sin \theta = 0,635; \quad \cos \theta = 0,773;$$

$$\eta = \arctg \frac{BL}{CL} = \arctg \frac{1,5}{2,8} = 28,2^\circ; \quad \sin \eta = 0,472; \quad \cos \eta = 0,881;$$

$$\psi = \arctg \frac{BL}{AL} = \arctg \frac{1,5}{2,3} = 33,1^\circ; \quad \sin \psi = 0,546; \quad \cos \psi = 0,838;$$

$$\varphi = \arctg \frac{A'C'}{CL} = \arctg \frac{\sqrt{AL^2 + BL^2}}{CL} = 44,4^\circ; \quad \sin \varphi = 0,700; \quad \cos \varphi = 0,714.$$

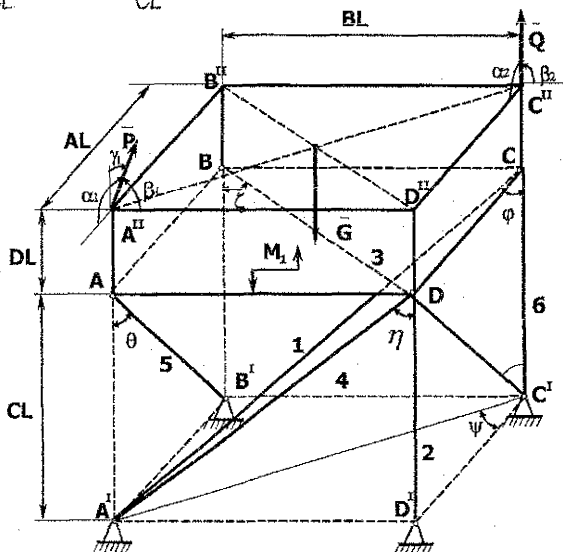


Рис. 4.2. Исходная схема плиты

Используя принцип освобождения от связей, мысленно отбросим опорные стержни и заменим их действие на плиту реакциями $\bar{N}_1, \dots, \bar{N}_6$. Предполагая, что стержни растянуты, направляем реакции от узлов $A - D$.

Плита находится в равновесии под действием заданных сил и реакций связей, которые образуют пространственную произвольную систему сил (рис.4.3).

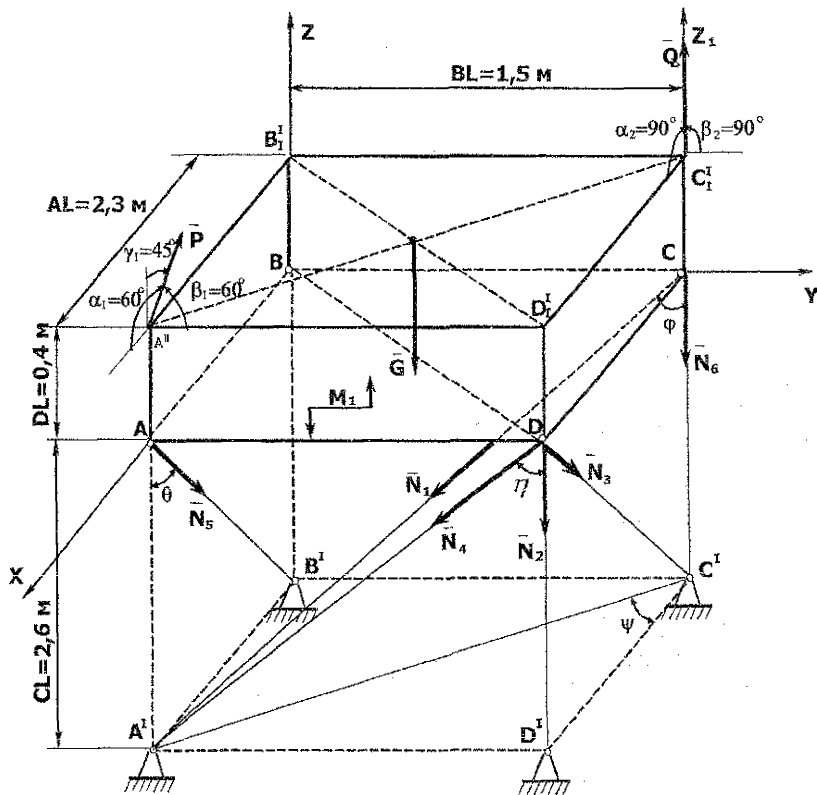


Рис. 4.3. Расчетная схема плиты

2. Для определения реакций составим шесть уравнений равновесия.

$$\begin{aligned}
 \sum F_{ix} = 0; & \quad P \cos \alpha_1 + N_1 \sin \varphi \cos \psi - N_5 \sin \theta = 0; \\
 \sum F_{iy} = 0; & \quad P \cos \beta_1 - N_1 \sin \varphi \sin \psi + N_3 \sin \theta - N_4 \sin \eta = 0; \\
 \sum F_{iz} = 0; & \quad -G + P \cos \gamma_1 + Q - N_1 \cos \varphi - N_2 - N_3 \cos \theta - \\
 & \quad -N_4 \cos \eta - N_5 \cos \theta - N_6 = 0;
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

$$\sum M_x(\bar{F}_K) = 0; \quad -G \cdot 0,5BL - P \cos \beta_1 \cdot DL + Q \cdot BL - N_1 \cos \varphi \cdot BL - \\ - N_2 \cdot BL - N_4 \cos \eta \cdot BL - N_6 \cdot BL + M_1 = 0;$$

$$\sum M_y(\bar{F}_K) = 0; \quad G \cdot 0,5AL + P \cos \alpha_1 \cdot DL - P \cos \gamma_1 \cdot AL + N_2 \cdot AL + \\ + N_4 \cdot \cos \eta \cdot AL + N_5 \cos \theta \cdot AL = 0;$$

$$\sum M_z(\bar{F}_K) = 0; \quad P \cos \beta_1 \cdot AL - N_1 \sin \phi \cos \psi \cdot BL - N_4 \sin \eta \cdot AL = 0.$$

Подставляем в эти уравнения известные величины и после вычисления получаем систему алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} 0,587N_1 - 0,635N_5 &= -0,5; \\ -0,382N_1 + 0,472N_3 - 0,472N_4 &= -9,19; \\ 0,714N_1 + N_2 + 0,881N_3 + 0,881N_4 + 0,773N_5 + N_6 &= 6,5; \\ 1,07N_1 + 1,5N_2 + 1,32N_4 + 1,5N_6 &= 68,6; \\ 2,3N_2 + 2,03N_4 + 1,78N_5 &= -23,3; \\ 0,872N_1 + 1,09N_4 &= 21,1. \end{aligned} \quad (4.2)$$

3. Полученную систему (4.2) решаем на ПЭВМ, используя один из известных математических пакетов, например «MathCAD», «Excel» и др.

Для рассматриваемого примера с помощью ПЭВМ получены следующие значения усилий в стержнях.

$$\begin{aligned} N_1 &= -65,4 \text{ кН}; & N_2 &= -34,8 \text{ кН}; & N_3 &= -0,32 \text{ кН}; \\ N_4 &= 72,1 \text{ кН}; & N_5 &= -50,2 \text{ кН}; & N_6 &= 63,8 \text{ кН}. \end{aligned}$$

Знаки усилий указывают, что стержни 1, 2, 3, 5 – сжаты, стержни 4, 6 – растянуты.

4. Для проверки решения составим дополнительные три уравнения моментов относительно вспомогательных осей X_1 , Y_1 , Z_1 (задаются преподавателем).

Например:

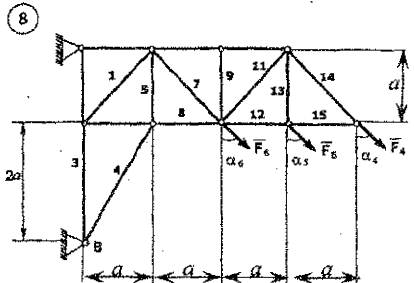
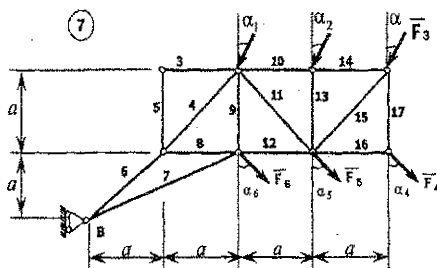
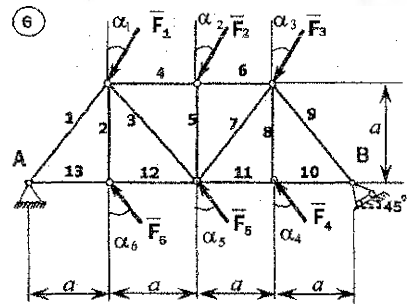
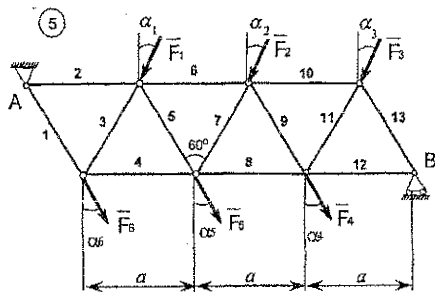
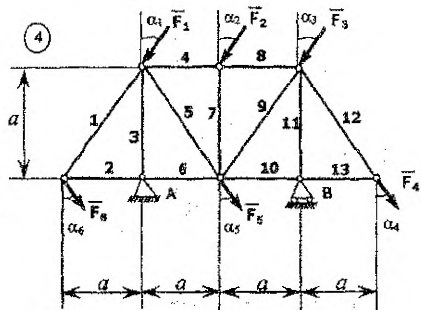
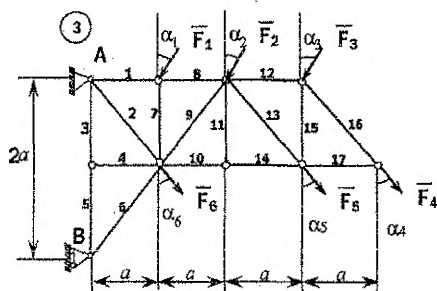
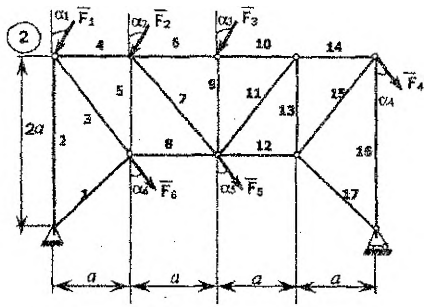
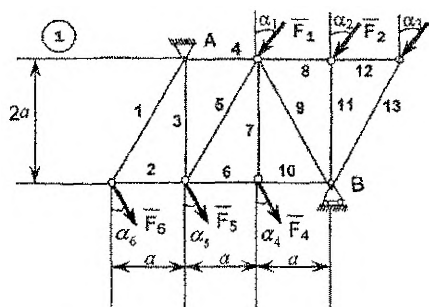
$$\sum M_{z1}(\bar{F}_K) = BL \cdot P \cos \alpha_1 + AL \cdot P \cos \beta_1 - AL \cdot N_4 \sin \eta - BL \cdot N_5 \sin \theta = 1,5 \cdot 13 \cdot 0,5 + \\ + 2,3 \cdot 13 \cdot 0,5 - 2,3 \cdot 72,1 \cdot 0,472 - 1,5 \cdot (-50,2) \cdot 0,635 = 78,7 - 78,3 = 0,4 \neq 0.$$

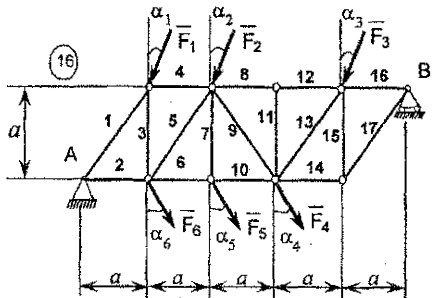
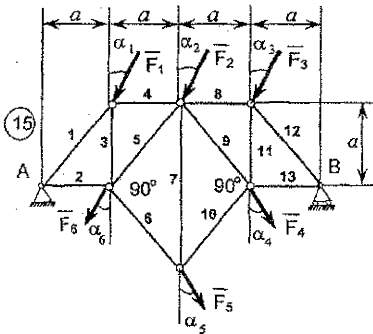
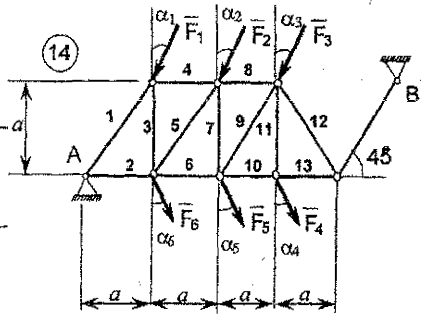
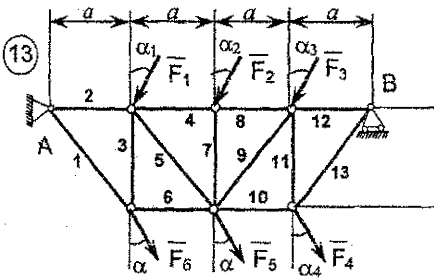
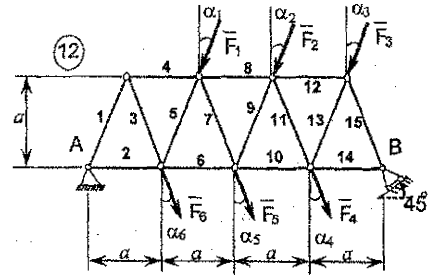
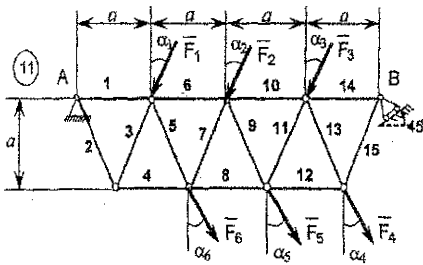
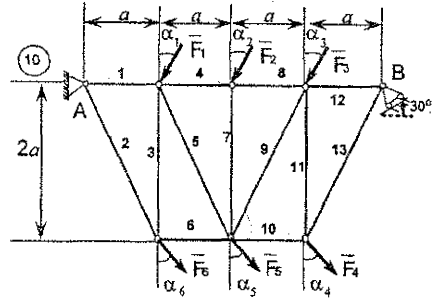
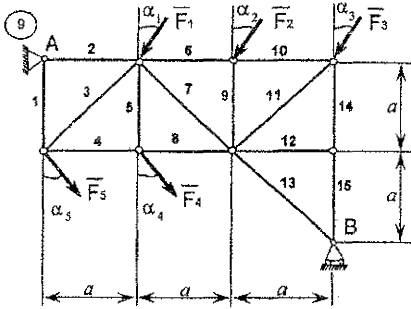
Погрешность

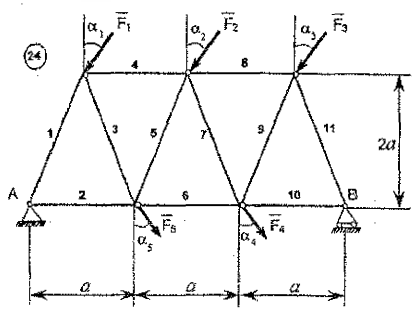
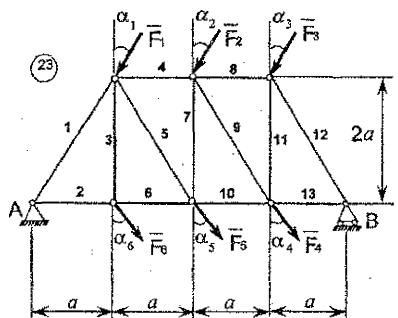
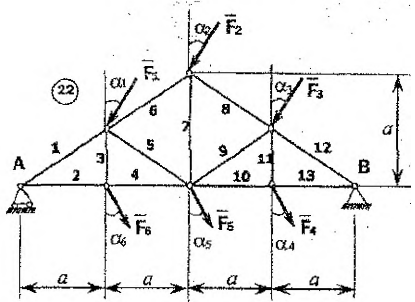
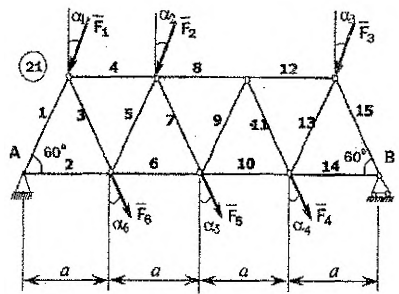
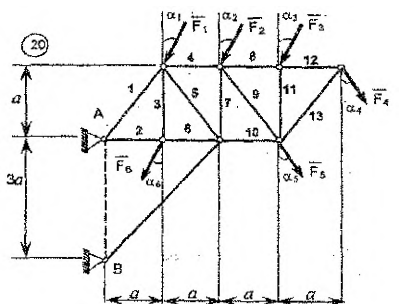
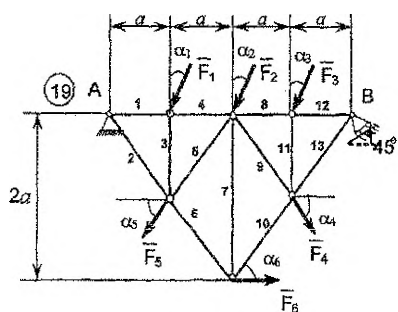
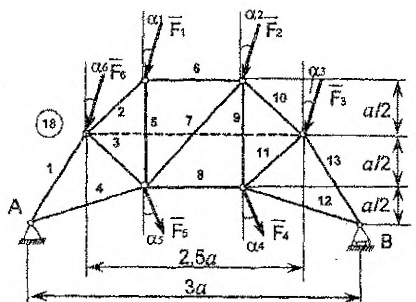
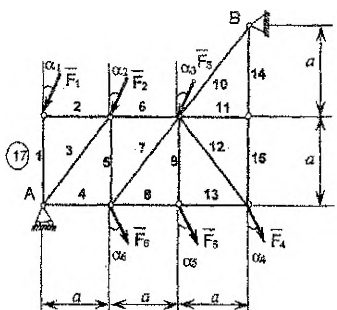
$$\varepsilon = \frac{0,4 \cdot 100}{78,7} = 0,51\% < 3\%, \text{ что допустимо.}$$

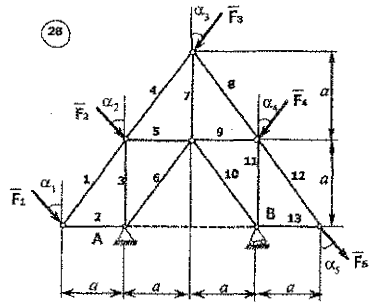
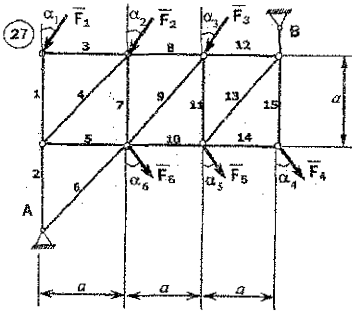
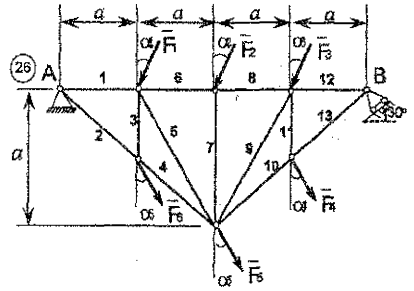
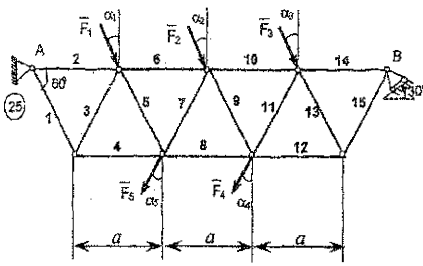
Аналогично составляем проверочные уравнения моментов сил относительно осей X_1 и Y_1 .

ПРИЛОЖЕНИЕ I





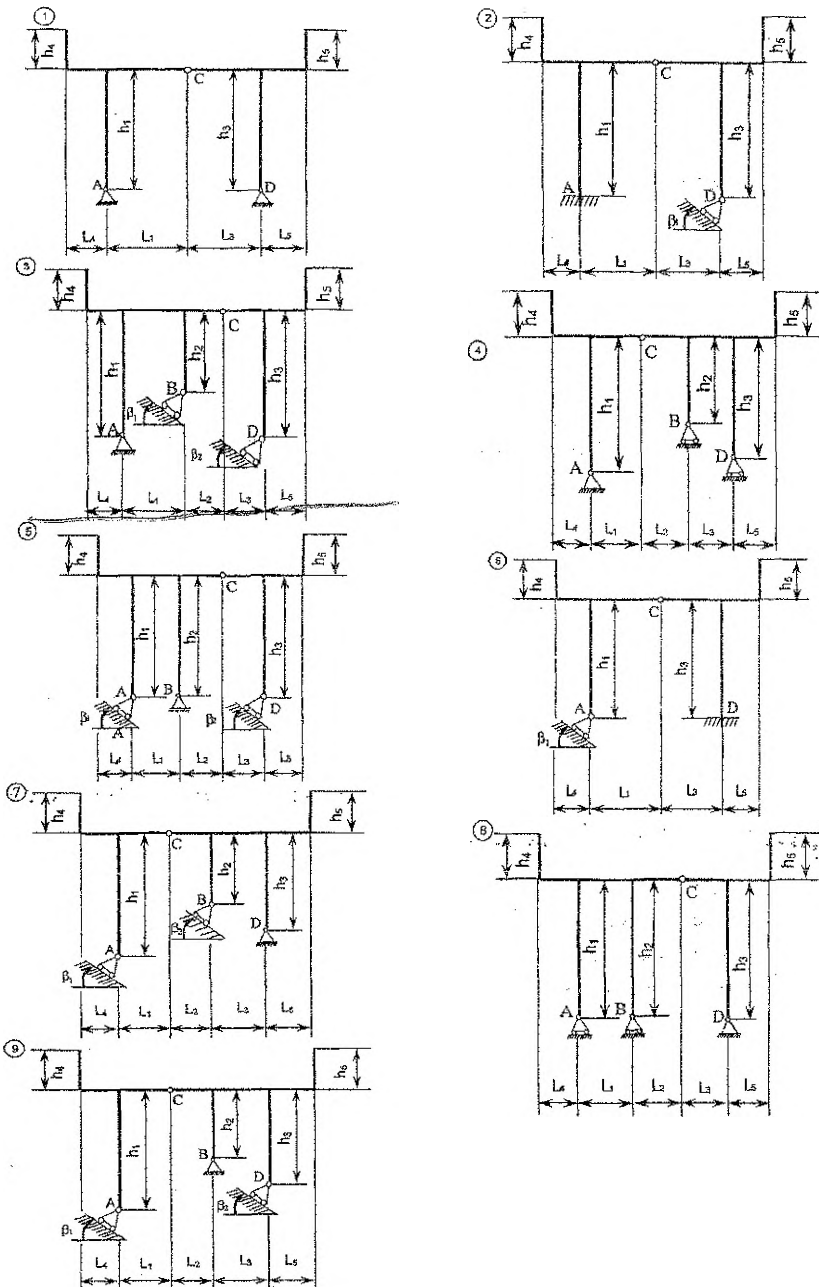




Приложение 1.1.

№ вар	F_1, kH	F_2, kH	F_3, kH	F_4, kH	F_5, kH	F_6, kH	α_1	α_2	α_3	α_4	α_5	α_6
1	0	2	3	2	4	3	-	45°	30°	45°	0	60°
2	2	0	2	3	3	5	45°	-	30°	60°	30°	0
3	2	2	0	3	4	4	30°	60°	-	45°	0	30°
4	3	4	3	0	2	5	45°	30°	-30°	-	60°	0
5	2	3	4	2	0	3	30°	45°	0	60°	-	30°
6	3	3	2	5	4	0	-30°	60°	30°	0	60°	-
7	4	5	4	3	0	2	45°	-30°	0	60°	-	-30°
8	2	4	2	0	3	5	-30°	0	30°	-	-45°	45°
9	5	3	0	3	2	2	0	60°	-	30°	60°	45°
10	2	0	2	4	3	5	30°	-	-30°	60°	-30°	0
11	0	5	4	2	3	3	-	0	30°	60°	-45°	45°
12	2	0	3	5	4	2	-30°	-	30°	0	60°	-30°
13	3	3	0	2	5	4	45°	60°	-	60°	0	30°
14	2	5	4	0	3	2	30°	0	-30°	-	-45°	45°
15	3	2	2	4	0	5	-30°	45°	30°	45°	-	0
16	4	4	3	2	5	0	45°	30°	-30°	60°	0	-
17	2	5	3	3	0	4	-30°	0	30°	45°	-	-30°
18	5	2	4	0	3	2	0	-30°	30°	-	60°	-30°
19	2	4	0	5	3	2	45°	0	-	60°	-45°	45°
20	2	0	3	3	5	4	-30°	-	30°	45°	0	30°
21	0	5	5	3	2	4	-	60°	-30°	45°	-45°	0
22	3	0	3	5	4	2	45°	-	30°	60°	0	45°
23	5	4	0	3	3	2	30°	-30°	-	0	60°	-30°
24	2	5	4	0	3	3	45°	60°	0	-	60°	30°
25	3	4	3	5	0	2	-30°	0	30°	60°	-	-30°

ПРИЛОЖЕНИЕ II



Учебное издание

Составители: Батрак Валентин Васильевич
Гончаров Михаил Иванович
Сазонов Михаил Иванович
Хвисевич Виталий Михайлович

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ И ЗАДАНИЯ

К РАСЧЕТНО-ГРАФИЧЕСКИМ РАБОТАМ ПО ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКЕ

РАЗДЕЛ

«СТАТИКА»

для студентов строительных специальностей
(3-е издание)

Ответственный за выпуск: **Батрак В.В.**

Редактор: **Строкач Т.В.**

Компьютерная вёрстка: **Кармаш Е.П.**

Корректор: **Никитчик Е.В.**

Подписано к печати 03.06.2009 г. Формат 60x84¹/₁₆. Бумага «Снегурочка». Усл. п.л. 1,63.
Уч. изд. л. 1,75. Заказ N 464. Тираж 100 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет».
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.