

Николай Мурашко

Брестский политехнический институт

РАСЧЕТ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ  
ОБОЛОЧКИ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ПОДОБИЯ

Дадим изложение метода подобия применительно к произвольной форме узлового соединения с ребрами в трубчатых конструкциях. К ребрам комбинированной системы приложены радиальная сила и момент (рис. 1).

Предположим, что для "базисной" оболочки получено решение ее напряженно - деформированного состояния, то есть известно соотношение между узловой нагрузкой  $P$  и  $M$ , радиальными и тангенциальными перемещениями  $W$ ,  $U$ ,  $V$  и внутренними усилиями  $M_i$ ,  $T_i$ ,  $Q_i$ , которые согласно технической моментной теории [1] определяется по формулам:

$$\begin{aligned} M_1 &= \frac{D}{r^2} \left( \frac{d^2 W}{d\xi^2} + \mu \frac{d^2 W}{d\varphi^2} \right); & M_2 &= \frac{D}{r^2} \left( \frac{d^2 W}{d\varphi^2} + \mu \frac{d^2 W}{d\xi^2} \right); \\ T_1 &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)r} \left[ \frac{du}{d\xi} + \mu \left( \frac{dV}{d\varphi} + W \right) \right]; \\ T_2 &= \frac{Eh}{(1-\mu^2)r} \left( \frac{du}{d\varphi} + W + \mu \frac{dU}{d\xi} \right); \\ Q_1 &= - \frac{D}{r^3} \left[ \frac{d^3 W}{d\xi^3} + (2-\mu) \frac{d^3 W}{d\xi d\varphi^2} \right]; \\ Q_2 &= - \frac{D}{r^3} \left[ \frac{d^3 W}{d\varphi^3} + (2-\mu) \frac{d^3 W}{d\xi^2 d\varphi} \right]; \end{aligned} \quad (1)$$

Компоненты тангенциального перемещения  $U$  и  $V$  определяются из уравнений совместности [1].

Принимая в качестве исходной системы координат произвольной оболочки  $\xi^* = \xi / \Pi$  и  $\varphi^* = \varphi / \Pi$  из дифференциальных зависимостей [1] получим  $U^* = U / \Pi_1 \Pi$ ,  $V^* = V / \Pi_1 \Pi$ , а из выражений (1) находим внутренние усилия произвольной оболочки

$$M_i^* = \chi_m M_i; \quad T_i^* = \chi_T T_i; \quad Q_i^* = \chi_Q Q_i, \quad (2)$$

где коэффициенты подобия при  $\mu^* = \mu$ , равны:

$$\begin{aligned} \chi_m &= \frac{r}{r^*} \left( \frac{h^*}{h} \right)^2 \frac{1}{\Pi_1}; & \chi_T &= \frac{r}{r^*} \frac{h^*}{h} \frac{1}{\Pi_1}; \\ \chi_Q &= \frac{r}{r^*} \sqrt{\frac{r h}{r^* h^*}} \left( \frac{h}{h^*} \right)^2 \frac{1}{\Pi_1} \end{aligned} \quad (3)$$

При передаче нагрузки через систему кольцевых и

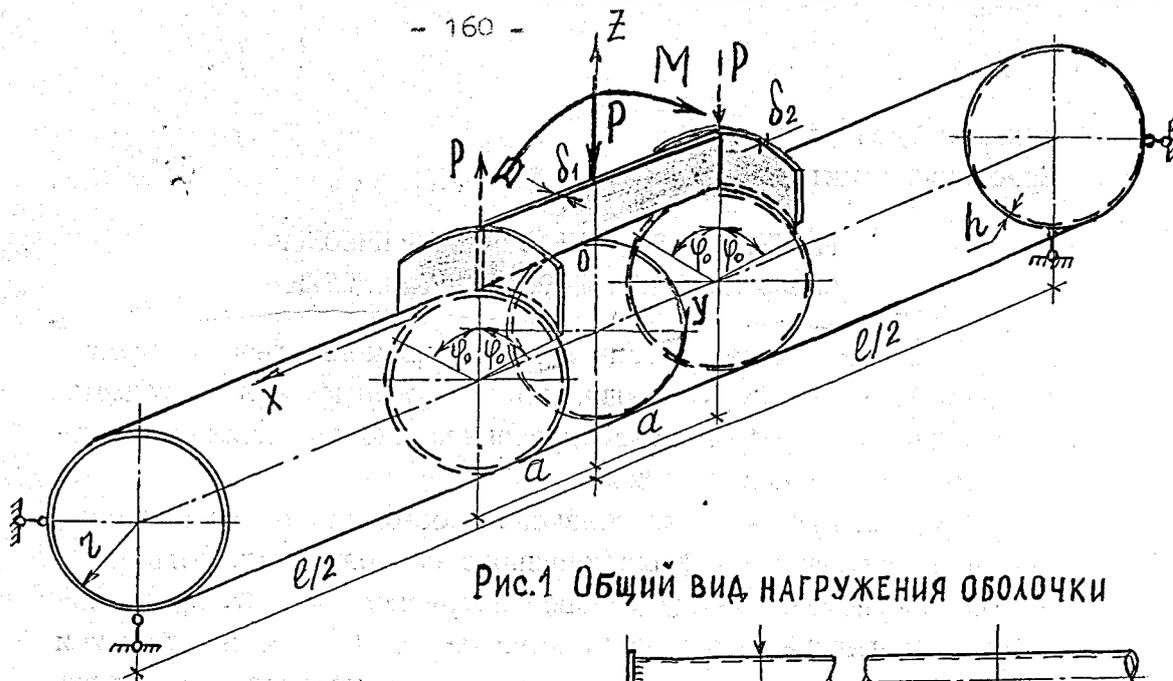


Рис.1 Общий вид нагружения оболочки

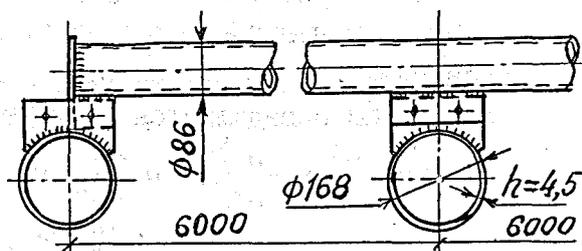


Рис.2 Опираие прогонов покрытия

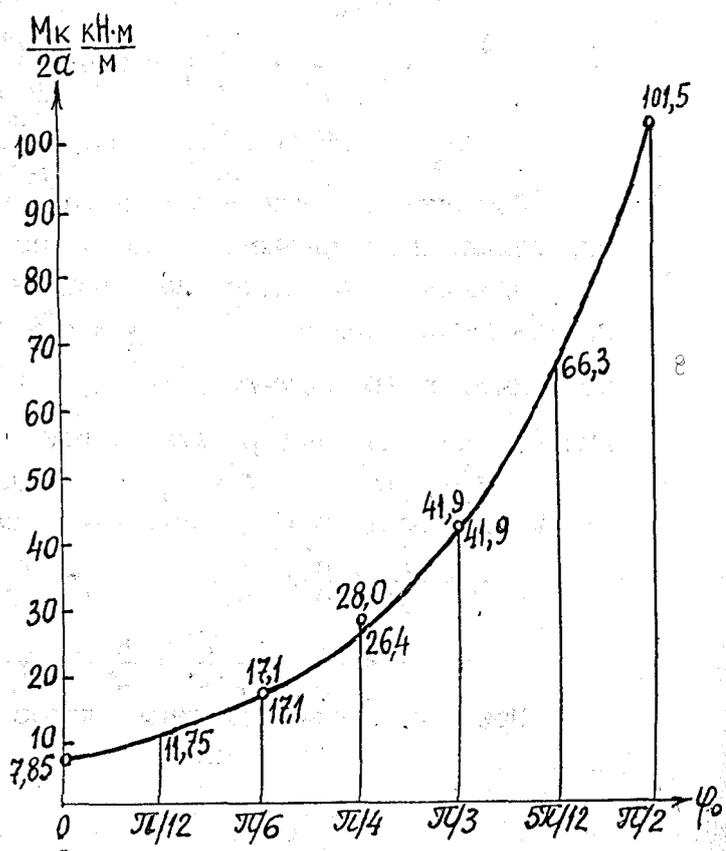


Рис.3 График несущей способности оболочки

продольных ребер с соответствующими длинами  $l_1$  и  $l_2$ , используя принцип суперпозиции, можно представить внешние силовые воздействия в следующем виде :

$$P = 2r \left( \int_{l_1/r}^{\dots} \Omega_1 d\varphi + \int_{l_2/r}^{\dots} \Omega_2 d\xi \right); \quad (4)$$

$$M = r^2 \left( \int_{l_1/r}^{\dots} \Omega_1 \varphi d\varphi + \int_{l_2/r}^{\dots} \Omega_2 \xi d\xi \right).$$

Отсюда следует, что  $P^* = \chi_1 P$ ;  $M^* = \chi_2 M$ , (5)

где

$$\chi_1 = \frac{\chi_0}{\Pi} \frac{r^*}{r} = \frac{r}{r^*} \left( \frac{h^*}{h} \right)^2 \frac{1}{\Pi_1};$$

$$\chi_2 = \frac{\chi_0}{\Pi^2} \left( \frac{r^*}{r} \right)^2 = \sqrt{\frac{r h^*}{r^* h}} \left( \frac{h^*}{h} \right)^2 \frac{1}{\Pi_1};$$

коэффициент подобия для внешних силовых воздействий.

Так как  $\xi^* = \xi / \Pi$  и  $\varphi^* = \varphi / \Pi$ , то размеры ребер и эпюры внутренних усилий при переходе "базисной" оболочки к произвольной претерпевают трансформацию размеров в  $1/\Pi$  раз. Физический смысл трансформации заключается в "вытягивании" оболочки в продольном направлении и соответственно увеличении протяженности моментного состояния в окружном направлении по мере уменьшения  $\Pi$ , связанного с гибкостью стенки  $r^*/h^*$ . Так, при  $r^*/h^* > r/h$  (расчетная оболочка с более гибкой стенкой, чем "базисная")  $\Pi > 1$  и, следовательно, размеры области локального нагружения и моментного состояния оболочки уменьшаются. Таким образом, для произвольной замкнутой, длинной цилиндрической оболочки может быть получено решение на основе известного решения для "базисной" оболочки с помощью коэффициентов подобия при одновременной трансформации размеров зоны локального нагружения.

Следует отметить, что метод подобия может привести к некоторой погрешности из-за неучета изменения угла проекций контактных нагрузок на ось  $Z$  при трансформации координатной системы. Однако при угле обхвата трубы кольцевым ребром  $2\varphi_0$  или  $2\varphi_0^* \leq 2\pi/3$ , отмеченная погрешность в коэффициентах подобия несущественна в силу того, что  $\cos \varphi_0 = \cos \varphi_0^*$ .

Чтобы получить обобщенное решение задачи при действии продольного внешнего момента через пару продольных и

кольцевых ребер на цилиндрическую оболочку с произвольными параметрами  $r$  и  $\omega = r/h$ , воспользуемся предлагаемым методом подобия.

Имея зависимости  $\xi = \Pi k^*$  и  $W/W^* = h/h^*$ , запишем значения полудлины ребра  $a = \Pi \frac{r}{r^*} a^*$  и прогиба  $W = W^* \frac{h}{h^*}$  "базисной" оболочки в системе координат для произвольной оболочки

Значения внешней нагрузки (момента) и жесткости для "базисной" оболочки представляются в следующем виде:

$$M = \hat{M}(\alpha, \varphi) 2a \frac{\sigma}{\sigma_T}; \quad G = \frac{M\alpha}{W} = \hat{G}(\alpha, \varphi) a \quad (6)$$

Тогда выражения, устанавливающие зависимость между несущей способностью, жесткостью и напряжениями произвольной и "базисной" оболочек соответственно запишутся:

$$M^* = \frac{E^*}{E} \frac{1}{\Pi} \left(\frac{h^*}{h}\right)^3 M; \quad G^* = G \left(\frac{h^*}{h}\right)^3 \frac{E^*}{E}; \quad \sigma^* = \frac{\sigma}{\Pi^2} \frac{E^*}{E} \quad (7)$$

Приняв  $k^* = k = \frac{Th}{\delta M}$  и подставляя в (7) соответствующие значения "базисной" оболочки, найдем выражения несущей способности и жесткости оболочки

$$M^* = \hat{M} \left( \Pi \frac{r}{r^*} a^*, \Pi \varphi^* \right) \left(\frac{h^*}{h}\right)^2 \frac{\sigma_T^*}{\sigma_T} 2a^*; \\ G^* = \hat{G} \left( \Pi \frac{r}{r^*} a^*, \Pi \varphi^* \right) \frac{1}{\Pi} \left(\frac{h^*}{h}\right)^2 a^* \frac{E^*}{E} \quad (8)$$

Несущая способность произвольной оболочки с одним поперечным ребром определяется по формуле:

$$P^* = \frac{M^*}{2a^*} = \hat{M} \left( \Pi \frac{r}{r^*} a^*, \Pi \varphi^* \right) \left(\frac{h^*}{h}\right)^2 \frac{\sigma_T^*}{\sigma_T} \quad (9)$$

Рассматривая "базисную" оболочку применительно к решению для трубы  $\phi 219 \times 5$  мм, вычисляем параметры, входящие в формулы (8), а именно

$$\Pi \frac{r}{r^*} = \sqrt{\frac{r^* h}{r h^*} \frac{r^2}{r^{*2}}} = \frac{2.3425}{100 \sqrt{r^* h^*}};$$

$$\Pi = \sqrt{\frac{r^*}{h^*}} \sqrt{\frac{h}{r}} = \frac{1}{4.69} \sqrt{\frac{r^*}{h^*}};$$

$$\frac{1}{h^2} = 4 \cdot 10^{-4}; \quad \frac{1}{h^2 \Pi} = 18.8 \sqrt{\frac{h^*}{r^*}} \cdot 10^4. \quad \text{Тогда (8) можно}$$

записать:

$$M^* = \hat{M}C \frac{2.3425a^*}{100 \sqrt{r^* h^*}} ; 0.213 \sqrt{\frac{r^*}{h^*}} \varphi^* \cdot 8a^* h^{*2} 10^4 \frac{\sigma_T^*}{\sigma_T} \quad (10)$$

$$G^* = \hat{G}C \frac{2.3425a^*}{100 \sqrt{r^* h^*}} ; 0.213 \sqrt{\frac{r^*}{h^*}} \varphi^* \cdot 18.8 \cdot 10^4 a^* h^{*2} \sqrt{\frac{h^*}{r^*}} \frac{E^*}{E}, \quad (11)$$

где  $a^*$ ,  $r^*$ ,  $h^*$  - размеры в сантиметрах.

Введя числовые параметры "базисной" оболочки  $r^* = 0.11\text{м}$ ,

$\omega^* = \frac{r^*}{h^*} \approx 22$ ,  $\sigma_T = 450$  МПа,  $E = 2.1 \cdot 10^5$  МПа и упростив

$$\frac{8a^* r^{*2}}{\omega^{*2}} \frac{10^4}{450} = 178 \frac{a^* r^{*2}}{\omega^{*2}} ; \frac{18.8 \cdot 10^4}{2.1 \cdot 10^5} \frac{a^* r^{*2}}{\omega^{*5/2}} E^* = 0.895 \frac{a^* r^{*2}}{\omega^{*5/2}} E^*,$$

получим окончательные выражения несущей способности и жесткости произвольной оболочки, или базисной оболочки в новой системе координат :

$$M^* = \hat{M} \left( \frac{2.342a^*}{100r^*} \omega^{*1/2} ; 0.213 \omega^{*1/2} \varphi^* \right) 178 \frac{a^* r^{*2}}{\omega^{*2}} \sigma_T^* \quad (12)$$

$$G^* = \hat{G} \left( \frac{2.342a^*}{100r^*} \omega^{*1/2} ; 0.213 \omega^{*1/2} \varphi^* \right) 0.9 \frac{a^* r^{*2}}{\omega^{*5/2}} E^*, \quad (13)$$

где  $\varphi^* = \varphi_0^*$  - для поперечных ребер;  $\varphi^* = \varphi_1^*$  - для продольных ребер. Таким образом, с помощью формул (12) и (13), полученных на основе метода подобия, можно перейти от частного решения к обобщенному путем замены (пересчета) параметров "базисной" оболочки на произвольные.

ПРИМЕР. Проверить несущую способность узла опирания прогонов покрытия на верхний пояс типовой трубчатой фермы (рис.2).

Труба пояса  $\varnothing 168 \times 4.5$  мм;  $A = 23.1$  см<sup>2</sup>;  $r^* = 81.75$  мм;  $l = 3.0$  м;  $N = 720$  кН. Сталь марки 16Г2АФ по ТУ 14-3-567-76 с  $\sigma_T = 450$  МПа. Углы обхвата трубы кольцевым ребром  $\varphi_0^* = \frac{\pi}{3}$ ;

$$\omega^* = \frac{r^*}{h^*} = \frac{81.75}{4.5} = 18.17. \text{ Узловая нагрузка}$$

$$P = 2.5 \cdot 18 \cdot 4.6 = 20.7 \text{ кН.}$$

1. Вычисляем коэффициент подобия

$$\Pi = \sqrt{\frac{r^*}{h^*} \frac{h}{r}} = \sqrt{\frac{81.75 \cdot 5}{4.5 \cdot 107}} = 0.922$$

2. Определяем расчетный угол обхвата "базисной" оболочки:  $\varphi_0^* = \Pi \varphi_0^* = 0.922 \frac{\pi}{3} = 0.307\pi$ , и по графику (рис. 3) находим

$$\hat{P} = \frac{Mk}{2a} = 37.0 \text{ кН.}$$

3. Находим несущую способность произвольной (рассматриваемой) оболочки по формуле (9)

$$\hat{P}^* = \hat{P} \left( \frac{h^*}{h} \right)^2 \frac{\sigma_T^*}{\sigma_T} = 37 \left( \frac{4.5}{5.0} \right)^2 \frac{450}{450} = 30.0 \text{ кН}$$

4. С учетом поправки на толщину ребра и двух сварных швов [3] при  $\delta_2 = 12 \text{ мм.}$  и  $k_f = 4 \text{ мм.}$   $\chi_k = 1 - \delta_2 / 2\omega^{1/2}h =$

$1 - \frac{1.6}{2 \cdot 4 \cdot 262 \cdot 0.45} = 0.583$ , несущая способность оболочки-трубы равна:

$$\frac{\hat{P}^*}{\chi_k} = \frac{30.0}{0.583} = 51.46 \text{ кН}$$

5. Вычислив напряжения в сжатом поясе

$$\sigma_o = \frac{N}{A} = \frac{720}{23.1} = 311.7 \text{ МПа}$$

и коэффициент [4]  $m_o = 1.2 \left[ 1 + (1 - k_1) \frac{\sigma_o}{2\sigma_T} \right] =$

$$= 1.2 \left[ 1 + (1 - 0.117) \frac{311.7}{900} \right] = 1.567,$$

где  $k_1$  при  $\varphi_o = 0.307\pi$ , определяем расчетную несущую способность узла по формуле:

$$P_p = \hat{P} m_o \left( 1 - \frac{\sigma_o}{\sigma_T} \right) \frac{R}{\sigma_T} = 51.46 \cdot 1.567 \left( 1 - \frac{311.7}{450} \right) \frac{380}{450} = 20.93 \text{ кН.}$$

Так как  $P_p = 20.93 \text{ кН} > P = 20.7 \text{ кН}$  - несущая способность узла обеспечена.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Власов В.З. Общая теория оболочек и ее приложение в технике. Гостехиздат, М-Л, 1949, 784 с.
2. Соболев Ю.В. Мурашко Н.Н. Теоретические исследования бесфасонного т-образного узла трубчатой фермы. Известия вузов, "Строительство и архитектура", № 8, Новосибирск, 1976.
3. Мурашко Н.Н. Расчет узлов стальных трубчатых конструкций при действии нагрузки на оболочки через парные поперечные элементы включения. Сборник "Проблемы проектирования легких стальных конструкций", Брест, 1989г.
4. Мурашко Н.Н. Несущая способность узлов стальных цилиндрических оболочек с учетом толщины элементов включения. Сборник материалов III симпозиума ЛПИ и БрПИ "Актуальные проблемы строительных конструкций", Люблин, 1990.