

POŁĄCZENIA PODATNE W KONSTRUKCJACH STALOWYCH

Białystok, 11 października 1997

O SPOSOBIE MODELOWANIA STALOWEGO SZKIELETU PRZESTRZENNEGO

Wadim Nikitin (Instytut Politechniczny w Brześciu)
Jerzy Szlendak (Politechnika Białostocka)

1. Wprowadzenie

Podczas kształtowania i wymiarowania skomplikowanych konstrukcji budowlanych np. szkieletów przestrzennych, a nawet mniej złożonych konstrukcji, często powstaje potrzeba przeprowadzenia badań modelowych i wykorzystania metod podobieństwa modelowego [1,2].

Modelowanie to proces badań modelowanego obiektu bazujący na podobieństwie modelu i obiektu rzeczywistego, który obejmuje: wykonanie modelu, jego badanie i przeniesienie otrzymanych rezultatów na obiekt rzeczywisty [3]. Posługując się modelami można szybko i dostatecznie dokładnie sprawdzić zachowanie się konstrukcji przy różnych wpływach zewnętrznych, znaleźć odpowiednie rozwiązanie projektowe, ustalić słabe miejsca w konstrukcji i w konsekwencji ustalić jej zachowanie przez eksperymentalną weryfikację konstrukcji przy minimalnych nakładach czasu i środków.

Model może mieć różne własności lecz należy go tak ukształtować by zapewnić podobieństwo interesujących nas procesów, które opisano kryteriami otrzymanymi za pomocą teorii podobieństwa. Modelowanie fizyczne jest realizowane na bazie kryteriów podobieństwa fizycznego, przy formułowaniu których posługujemy się teoriami podobieństwa i analizą skali modelu.

2. Określenie kryteriów podobieństwa

Określenie kryteriów podobieństwa rozpoczyna się od ustalenia parametrów, które charakteryzują badany proces.

(2.1) Podobieństwo fizyczne:

Przy fizycznym modelowaniu konstrukcji stalowych pracujących w stanie sprężystym materiał konstrukcji można uważać za izotropowy. Sprężyste własności izotropowego materiału określone są dwiema stałymi: modulem Younga E i współczynnikiem Poissona ν . Dla określenia rozmiarów modelu wystarczy podać pewien jego wymiar charakterystyczny B . Jeżeli uwzględniamy wpływ siły ciężkości obciążającej elementy konstrukcji to należy w odpowiednim parametrze uwzględnić ciężar właściwy materiału ρ i przyspieszenie ziemskie

g (ρ g -masa własna). Oprócz siły ciężkości, na konstrukcję działają również obciążenia zewnętrzne, rozłożone wg. określonego schematu. Niech wielkość tych obciążeń będzie określona siłą F .

Tak więc system charakterystycznych parametrów będzie następujący:

E, ν, B, ρ, g, F .

(2.2) Podobieństwo mechaniczne:

Bazą dla podobieństwa mechanicznego w stanie sprężystym będą trzy bezwymiarowe parametry [3]: $\nu, E/\rho gB, F/EB^2$. Powinny być one wg. teorii podobieństwa równe dla modelu i konstrukcji rzeczywistej. Przy zagwarantowaniu tych warunków otrzymuje się podobieństwo mechaniczne, w które w ogólnym przypadku wchodzi podobieństwo: geometryczne, kinematyczne, dynamiczne i in.

a) podobieństwo geometryczne:

Przy podobieństwie geometrycznym stosunek dowolnych podobnych części modelu i rzeczywistej konstrukcji równy jest pewnej stałej, którą nazywamy stałą podobieństwa.

b) podobieństwo kinematyczne:

Oznacza ono, że w dowolnych podobnych punktach modelu i obiektu proporcja między ich prędkościami jest jednakowa.

c) podobieństwo dynamiczne:

Polega ono na równoległości i proporcjonalności sił w podobnych punktach modelu i obiektu. Oczywiście w takim przypadku wszystkie deformacje modelu i obiektu będą podobne.

Jeżeli model jest n razy mniejszy od naturalnego to w modelu deformacje będą n razy mniejsze niż w konstrukcji rzeczywistej. Jeśli model i obiekt wykonane są z tego samego materiału to znaczenie parametrów E, ν i ρ jest takie samo w modelu i obiekcie dlatego dla podobieństwa mechanicznego nieodzowne jest by zachodził związek:

$$gB = \text{const.} \quad (1)$$

W normalnych warunkach $g = \text{const.}$ tak więc powinno zachodzić

$$B = \text{const.} \quad (2)$$

W takim przypadku model odpowiada obiektowi rzeczywistemu i modelowanie fizyczne traci sens. Należy przechodzić wtedy do innego typu modelowania np. matematycznego lub w miejsce modelowania dokładnego stosować przybliżone.

Tak więc jeśli w systemie określonych parametrów zaniedbać obciążenia od sił ciężkości to przy jednakowych materiałach modelu i konstrukcji rzeczywistej warunek przybliżonego podobieństwa mechanicznego będzie następujący:

$$F/B^2 = \text{const.} \quad (3)$$

Można go interpretować jako warunek równości charakterystycznych naprężeń w modelu i w konstrukcji rzeczywistej. Wynika z tego, że jeżeli model jest n razy mniejszy od obiektu to działające na niego w odpowiadających sobie punktach obciążenia powinny być

n^2 razy mniejsze niż w naturze. W wielokondygnacyjnych szkieletach jedne elementy (słupy) pracują głównie na ściskanie a drugie (rygle) głównie na zginanie.

Dla elementów ściskanych podobieństwo modelu wymaga spełnienia warunku:

$$F/A_n = \text{const.} \quad (4)$$

gdzie: A_n - przekrój netto słupa

Ponadto analiza stateczności elementów ściskanych spełnienie wymogów podobieństwa zachodzi gdy:

$$I_{\min}/(h^2 A) = \text{const} \quad (5)$$

gdzie: $I_{\min}$ - minimalny moment bezwładności przekroju poprzecznego pręta, A - przekrój brutto słupa, h - wysokość najbardziej obciążonej kondygnacji.

Przy podobieństwie geometrycznym ten warunek zachodzi automatycznie.

Dla elementów zginanych o długości l obciążonych obciążeniem równomiernie obciążonym q podobieństwo wymaga by:

$$ql^2/W = \text{const.} \quad (6)$$

gdzie: W - wskaźnik wytrzymałości

3. Niedokładności modelowania fizycznego

Podobieństwo modelowe zawsze określa się z pewnym stopniem dokładności.

Niech zależność pewnej zmiennej występującej w naturze w stosunku do innej zmiennej będzie podana zależnością:

$$y^n = f^n(x^n) \quad (7)$$

W modelu analogiczną zależność zapiszemy:

$$y^m \pm \Delta y = f^n(x^m) \quad (8)$$

gdzie: Δy - błąd modelowania.

Błąd modelowania zależy od następujących czynników:

- 1) przyjęciem zmiennych z natury, które wchodzi do kryterium podobieństwa i ich odtworzenie na modelu,
- 2) błędy pomiarów przy prowadzeniu doświadczeń,
- 3) ilością czynników inaczej zachowujących się w modelu niż w naturze,
- 4) nieuwzględnieniem wszystkich czynników mających wpływ na modelowane zjawisko.

Niedokładności pierwszego typu wynikają z pewnych łącznych niedokładności określenia warunku podobieństwa. Niedokładności pomiarów mogą być zmniejszone przez ich powtarzanie lub wykorzystanie dokładniejszych instrumentów. Niedokładności trzeciego typu mogą doprowadzić do tego, że wpływ czynników określany na modelu będzie różny od

tego wpływu na obiekcie naturalnym. Pierwsze trzy typy czynników pojawiają się tak przy dokładnym jak i przy przybliżonym modelowaniu. Czwarty typ czynników jest charakterystyczny tylko do podobieństwa przybliżonego.

Rozpatrzmy niedokładności określenia parametrów wchodzących do kryterium podobieństwa i ich wpływ na to kryterium. Oznaczmy przez A i B niektóre parametry fizyczne wchodzące do kryterium podobieństwa. Idealne znaczenie tych wielkości w naturze oznaczmy A^n i B^n . Odpowiadające im wielkości w modelu wynoszą:

$$A^m = A^n/m_A \text{ i } B^m = B^n/m_B \quad (9)$$

gdzie: m_A i m_B - współczynniki skali.

Faktyczne znaczenie tych parametrów różni się od ich znaczenia idealnego. Dlatego zachodzi:

$$\begin{aligned} A_r^n &= A^n (1 \pm \delta_A^n); B_r^n = B^n (1 \pm \delta_B^n); \\ A_r^m &= A^m (1 \pm \delta_A^m); B_r^m = B^m (1 \pm \delta_B^m) \end{aligned} \quad (10)$$

gdzie: δ_A^n , δ_B^n , δ_A^m i δ_B^m - błędy względne

Kryterium podobieństwa może być przedstawione następująco:

$$P = [A]^\alpha [B]^\beta \quad (11)$$

gdzie: α, β - wykładniki potęgowe z ich znakami

Kryterium podobieństwa złożone z wielkości idealnych nazywa się kryterium idealnym. Jest ono takie samo dla modelu i obiektu.

Rzeczywiste kryterium podobieństwa różni się od idealnego, co zapiszemy tak:

$$P_r^m = \xi_p P_r^n; P_r^n = \xi^n P; P_r^m = \xi^m P \quad (12)$$

gdzie: ξ_p - charakteryzuje błąd w określeniu kryterium podobieństwa

Dla wyjaśnienia zależności ξ_p od błędów w określeniu parametrów modelu i obiektu określimy kryterium podobieństwa raz przez rzeczywiste parametry modelu a drugi raz przez faktyczne parametry obiektu rzeczywistego:

$$P_r^m = [A^m (1 \pm \delta_A^m)]^\alpha [B^m (1 \pm \delta_B^m)]^\beta = P (1 \pm \delta_A^m)^\alpha (1 \pm \delta_B^m)^\beta \quad (13)$$

$$P_r^n = [A^n (1 \pm \delta_A^n)]^\alpha [B^n (1 \pm \delta_B^n)]^\beta = P (1 \pm \delta_A^n)^\alpha (1 \pm \delta_B^n)^\beta \quad (14)$$

Dzieląc P_r^m przez P_r^n , po przekształceniach i rozwinięciu w szereg wg wzoru Newtona, ponadto odrzucając małe drugiego i wyższych rzędów oraz zastępując otrzymane złożone wyrażenie wzorem przybliżonym; otrzymuje się, że:

$$\xi_p = 1 \pm \alpha (\delta_A^m \pm \delta_A^n) \pm \beta (\delta_B^m \pm \delta_B^n) \quad (15)$$

Z tego wyrażenia wynika, że należy jak to tylko możliwe zmniejszać błędy modelu w tych zmiennych wchodzących do kryterium podobieństwa, dla których wykładniki potęgowe są najwyższe.

Dlatego przy modelowaniu fizycznym należy przede wszystkim dążyć do tego by faktyczne rozmiary elementów modelu wchodzące do kryterium podobieństwa z najwyższymi wykładnikami nie różniły się od idealnych znaczenie których wynika z warunków podobieństwa geometrycznego.

4. Przykład

Dla zilustrowania pokażemy ocenę błędu w określeniu kryterium podobieństwa ξ_p w zależności od błędów wymiarowych modelu szkieletu stalowego i konstrukcji rzeczywistej przy skali 1:10.

Niech rygiel obiektu wykonany jako walcowany dwuteownik typu IPE 270 ma idealną (nominalną) grubość półki równą 10.2 mm. Wtedy idealna grubość półki modelu będzie wynosić 1.02 mm. Jednakże w rzeczywistości grubość półki obiektu rzeczywistego niech wynosi np. 10.5 mm a modelu 1.6 mm. W tym przypadku odpowiednie błędy dla obiektu δ^n i modelu δ^m wynoszą:

$$\delta^n = (10.5 - 10.2) / 10.2 = 0.029 \text{ a } \delta^m = (1.6 - 1.02) / 1.02 = 0.569 \quad (16)$$

Biorąc pod uwagę, że charakterystyczny rozmiar konstrukcji wchodzi do kryterium podobieństwa z wykładnikiem równym 2 otrzymujemy ocenę błędów w określeniu kryterium podobieństwa:

$$\xi_p = 1 + (0.569 + 0.029) \times 2 = 2.196 \quad (17)$$

W tym przypadku faktyczne kryterium podobieństwa różni się od idealnego bardziej niż dwukrotnie. Oznacza to, że przeniesienie rezultatów z modelu na obiekt rzeczywisty na bazie idealnego kryterium podobieństwa prowadzi do wyników różniących się od oczekiwanych ponad dwukrotnie.

Dla słupów szkieletu wykonanych z rur kwadratowych 200x200 z idealną grubością ścianki 20 mm odpowiadające wymiary modelu wynoszą 20x20x2mm. Jeśli rzeczywista grubość ścianki różni się od idealnej np. o 0.4 mm a analogiczna różnica dla modelu wynosi np. 0.2 mm to otrzymujemy odpowiednie błędy:

$$\delta^n = 0.02 \text{ i } \delta^m = 0.1 \quad (18)$$

W tym przypadku ocena błędów kryterium podobieństwa wynosi:

$$\xi_p = 1 + (0.1 + 0.02) \times 2 = 1.24 \quad (19)$$

5. Dodatkowe niedokładności modelowania

Pomiędzy nieuwzględnionymi dotychczas czynnikami mającymi istotny wpływ na błędy modelowania należy wymienić sztywność węzłów i całej konstrukcji. W wyniku tego rezultaty otrzymane na modelu będą różnić się od tych na obiekcie. Przybliżone granice błędów tych zależności można ocenić za pomocą modelowania matematycznego (na drodze obliczeń).

I tak przy ocenie nośności słupów szkieletu przestrzennego do których przegubowo dołączono rygle możliwe są dwa krańcowe przypadki:

- 1) konstrukcja nie ma podatności w kierunku poziomym (przy istnieniu idealnego sztywnego rdzenia)
- 2) Konstrukcja jest podatna w kierunku poziomym (przy braku sztywnego rdzenia)

W pierwszym przypadku schemat obliczeniowy słupa można przyjąć jako belkę wieloprzęślową o stałej sztywności zamocowaną z jednej strony i przegubowo połączoną z drugiej. Siły podłużne tej samej wartości przyłożone są w miejscach podpór poprzecznych (stropy kondygnacji).

W drugim przypadku słupy pracują jak wsporniki obciążone jednakowymi siłami podłużnymi przyłożonymi z krokiem równym wysokości kondygnacji h . W obszarze sprężystym siła krytyczna wynosi:

$$F_{kr} = \Pi^2 EI_{min} / (\mu h)^2 \quad (20)$$

gdzie: μ - współczynnik długości wyboczeniowej

Obliczenia przeprowadzone w pracy [4] wskazują, że w zależności od liczby kondygnacji siła krytyczna w pierwszym przypadku jest dwu i więcej razy większa niż w drugim. Przy czym wraz ze wzrostem liczby kondygnacji ten stosunek się zwiększa. Dlatego zmiana podobieństwa przy obecności sztywnego rdzenia w modelu i obiekcie rzeczywistym może prowadzić do istotnych błędów przy ocenie nośności słupów szkieletu.

Można pokazać, że w pierwszym i drugim przypadku zwiększenie liczby kondygnacji powoduje zwiększenie współczynnika μ . Jednakże, po sześciu-siedmiu kondygnacjach wzrost znaczenia współczynnika μ praktycznie zanika.

Wskazuje to, że przy budowie modeli wystarczy ograniczyć liczbę kondygnacji do sześciu-siedmiu. Taką liczbę kondygnacji ma też wiele modeli przyjętych w skali międzynarodowej do kalibrowania ram.

6. Zakończenie

W artykule tym nie jest możliwe przeanalizowanie wszystkich możliwych schematów obliczeniowych nawet jednego szkieletu przestrzennego. Podano w nim jednak pewne zasady którymi należy kierować się przy próbie modelowania takich budynków. Przedstawione tu prace są prowadzone w ramach współpracy Instytutu Politechnicznego w Brześciu i Politechniki Białostockiej

Literatura:

- [1]. W.A. Wienikow: Teoria podobieństwa i modelowania (po rosyj.), Wyszaja Szkoła, 1976, str. 479.
- [2]. L.I. Siedow: Metody podobieństwa i miary w mechanice (po rosyj.), Nauka, 1987, str.432.
- [3]. Niezawodność i efektywność w technice (po rosyj.), Poradnik: tom 10: pod red. W.S. Awdujewskiego i in. oraz tom 4: Metody podobieństwa i niezawodności pod red. W.A. Mielnikowa i N.A. Siewiercewa, Budowa maszyn, 1986, str. 280.
- [4]. Nośność, Wytrzymałość, Drgania (po rosyj.), Poradnik pod red. N.A. Birgiera i in. Budowa maszyn, 1968, str.464.