

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ
УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА
ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫХ ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ

по дисциплине

«Вычислительная математика»

для студентов специальности

1-53 01 02 Автоматизированные системы обработки информации

УДК 347 771.

ББК 67.403.3 731.

В методических указаниях приведены краткие теоретические сведения, необходимые для выполнения лабораторных работ, рассмотрены практические примеры использования методов. Методические указания содержат описание шести лабораторных работ с вариантами индивидуальных заданий к ним.

Предназначены для использования студентами специальности 1-53.01.02 «Автоматизированные системы обработки информации» в ходе выполнения лабораторных работ по дисциплине «Вычислительная математика».

Составитель: Глуценко Т.А., старший преподаватель

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ	4
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1. Приближенное решение нелинейных уравнений.....	5
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №2. Итерационные методы решения СЛАУ	13
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3. Интерполирование функций.....	21
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4. Численное интегрирование.....	26
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5. Численное решение задачи Коши для дифференциальных уравнений 1-го порядка.....	35
ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6. Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений 1-го порядка.....	42
ЛИТЕРАТУРА.....	47

ВВЕДЕНИЕ

Вычислительная математика является важной составляющей в системе подготовки инженеров специальности «Автоматизированные системы обработки информации», т.к. рассматривает методы обработки математической информации. И при этом вычислительная математика является динамической дисциплиной, поскольку с ростом быстродействия ЭВМ и появления новых компьютерно-информационных технологий, разрабатываются все новые и более сложные вычислительные алгоритмы решения математических задач.

Данные методические указания разработаны в соответствии с учебной программой по дисциплине «Вычислительная математика» для специальности 1-53 01 02 Автоматизированные системы обработки информации. Указания содержит описание шести лабораторных работ по следующим разделам: решение нелинейных уравнений, решение систем линейных алгебраических уравнений, интерполирование, численное интегрирование, решение задачи Коши для обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка и решение задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка.

В каждой лабораторной работе содержатся варианты заданий. С учетом специфики специальности АСОИ все рассматриваемые методы предполагают программную реализацию. При этом каждый метод в конкретной работе должен быть реализован в виде отдельной функции и, если указано точное решение, должен быть предусмотрен вывод значений как точного, так и приближенного решений различными методами. Выполнение лабораторной работы предполагает также анализ полученных результатов: при необходимости оценка абсолютной погрешности метода, сравнение количества итераций в методах, анализ скорости сходимости.

По результатам выполнения каждой работы должен быть представлен отчет.

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №1

Приближенное решение нелинейных уравнений

Краткие теоретические сведения.

Пусть требуется решить уравнение

$$f(x) = 0, \quad (1.1)$$

т.е. необходимо найти те значения x , при которых функция $f(x)$ обращается в нуль, говорят также, что требуется найти корни уравнения (1.1). Здесь $f(x)$ – нелинейная непрерывная функция. Точное значение корня данного уравнения будем обозначать как x^* . Если в точке $x = x^*$ вместе с функцией $f(x)$ обращаются в нуль и ее производные до $(p-1)$ порядка включительно, т.е. $f(x^*) = f'(x^*) = \dots = f^{(p-1)}(x^*) = 0$ и $f^{(p)}(x^*) \neq 0$, то x^* называют *корнем кратности p* . Если в точке $x = x^*$ выполняется условие $f(x^*) = 0, f'(x^*) \neq 0$, то x^* называется *простым корнем уравнения (1.1)*.

Полное решение поставленной задачи можно разделить на 3 этапа:

1. Установить количество и характер корней уравнения (действительные или комплексные, простые или кратные). Мы будем искать *простые действительные корни уравнения (1.1)*.
2. Найти приближенные значения корней, т.е. указать малые отрезки $[a, b]$, в которых находится *только один корень уравнения (отделить корни)*. Этот отрезок называют *отрезком изоляции корня*. По сути дела, на этом этапе находят приближенные значения корней с погрешностью, не превосходящей длины отрезка, содержащего корень.
3. Найти значение корней с требуемой точностью ε (*уточнить корни*).

Первые два этапа можно реализовать различными способами: графическим, табличным, аналитическим. Обычно построение графика функции даже с малой точностью дает представление о расположении и характере корней уравнения (1.1).

При аналитическом способе отделения корней можно воспользоваться теоремами о свойствах функций, непрерывных на отрезке.

1. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$ и на его концах принимает значения разных знаков, $f(a) \cdot f(b) < 0$, то, согласно теореме Больцано-Коши, внутри этого отрезка $[a, b]$ *существует хотя бы один корень уравнения (1.1)*.
2. Если функция $f(x)$ удовлетворяет условиям теоремы Больцано-Коши и монотонна на этом отрезке, то внутри этого отрезка $[a, b]$ *существует только один корень уравнения (1.1)*. Достаточным признаком монотонности функции $f(x)$ на отрезке является сохранение знака ее первой производной на (a, b) (если $f'(x) > 0$, функция возрастает на отрезке, если $f'(x) < 0$, функция убывает).

Таким образом, для того, чтобы на отрезке $[a, b]$ существовал единственный корень уравнения $f(x) = 0$, достаточно выполнение трех условий:

1. Функция $y = f(x)$ – непрерывна на отрезке $[a, b]$.
2. $f(a) \cdot f(b) < 0$.
3. $f'(x)$ сохраняет знак на интервале (a, b) .

(1.2)

При табличном способе отделения корней вычисляются значения функции в заданных точках (узлах) $x_k \in [a, b]$, и если для некоторого k значения функции $f(x_k)$ и $f(x_{k+1})$ имеют разные знаки, то на интервале (x_k, x_{k+1}) имеется, по крайней мере, один действительный корень. Шаг разбиения на узлы при этом должен быть достаточно малым. Выявить по таблице корни четной кратности сложно.

Допустим, что искомым корнем уравнения отделен, т.е. найден отрезок $[a, b]$, на котором имеется только один корень уравнения. Любую точку этого отрезка можно выбрать за приближенное значение корня. Погрешность такого приближения не превосходит длины отрезка $[a, b]$. Следовательно, задача отыскания приближенного значения корня с заданной точностью ε сводится к нахождению отрезка $[a, b]$, такого, что $|b - a| < \varepsilon$.

Для вычисления корня с требуемой точностью $\varepsilon > 0$ обычно применяют один из итерационных методов *уточнения корня*. В итерационных методах задается некоторое начальное приближение (или приближения) к корню $x_0 \in [a, b]$ и последовательно находятся последующие приближения x_1, x_2, \dots, x_n по соответствующей рекуррентной формуле (в которой последующие приближения вычисляются через предыдущие приближения). Каждый такой шаг вычисления приближенного значения корня x_k называется *итерацией*. Если последовательность приближенных значений корня $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$ с ростом k стремится к точному значению корня x^* , то говорят, что итерационный процесс сходится. Мы будем строить *сходящиеся итерационные процессы*.

Если в методе задается m начальных приближений и каждое последующее приближение вычисляется через m предыдущих, то такой метод называется *m-шаговым*.

Условием нахождения корня x^* уравнения (1.1) с заданной точностью ε является выполнение условия:

$$|x_n - x^*| < \varepsilon. \quad (1.3)$$

Т. к., вообще говоря, значение корня x^* нам неизвестно, для остановки итерационного процесса пользуются условиями, содержащими известные или вычисляемые величины. Например, для абсолютной погрешности всех рассматриваемых методов справедлива оценка:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{|f(x_n)|}{m_1}. \quad (1.4)$$

Здесь x_n — приближенное значение корня на n -й итерации, $m_1 = \min_{x \in [a, b]} |f'(x)|$ (минимальное по абсолютной величине значение первой производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$). С учетом (1.4) условие остановки итерационного процесса принимает вид:

$$\frac{|f(x_n)|}{m_1} < \varepsilon. \quad (1.5)$$

В общем случае эти условия определяются как применяемым методом, так и видом функции $f(x)$. Ниже, при рассмотрении отдельных методов, мы приве-

дём оценки для абсолютной погрешности методов и, соответственно, условия для прекращения итераций.

На практике часто пользуются *необходимым условием* для прекращения итераций:

$$|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon. \quad (1.6)$$

Условием (1.6) надо пользоваться с осторожностью, т. к. его выполнение еще не гарантирует выполнение условия (1.3).

Вычисления продолжают до тех пор, пока не выполняются условия останова итерационного процесса. При этом последнее x_n выбирается в качестве приближенного значения корня, найденного с заданной точностью ε , т.е. полагают: $x^* \approx x_n$.

Сходимость итерационного процесса означает, что погрешность каждого последующего приближения должна быть меньше погрешности предыдущего приближения, что в общем случае выражается неравенством:

$$|x_{n+1} - x^*| < q |x_n - x^*|^\alpha,$$

где $q > 0$ и $\alpha \geq 1$ — некоторые величины, значения которых определяются методом уточнения корня. Величина α определяет порядок скорости сходимости метода.

При значении $\alpha=1$ и $q \leq 1$ сходимость называется линейной, при значении $1 < \alpha < 2$ — сверхлинейной, при значении $\alpha=2$ — квадратичной. Значение величины q , как мы уже отмечали, определяется методом и видом функции $f(x)$ на отрезке изоляции корня. В зависимости от значения q и α , вообще говоря, выбирается начальное приближение x_0 .

При решении нелинейных уравнений необходимо контролировать невязку приближенного решения, которая определяется как разность между левой и правой частью уравнения, при подстановке в него приближенного значения корня x_n . Т.к. правая часть уравнения равна нулю, невязка определяется как величина $|f(x_n)|$. Как правило, если мала невязка, мала и погрешность решения уравнения.

Рассмотрим некоторые итерационные методы уточнения корня. При рассмотрении методов предполагается, что выполняются условия (1.2) и на отрезке $[a, b]$ находится единственный корень уравнения (1.1). Будем искать корень с заданной точностью ε .

Метод Ньютона.

Итерации в методе Ньютона осуществляются по формуле:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}, \quad f'(x_{n-1}) \neq 0. \quad (1.7)$$

Метод очень чувствителен к выбору начального приближения.

Если производные $f'(x)$ и $f''(x)$ сохраняют знак в окрестности корня, рекомендуется выбирать x_0 так, чтобы выполнялось условие:

$$f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0. \quad (1.8)$$

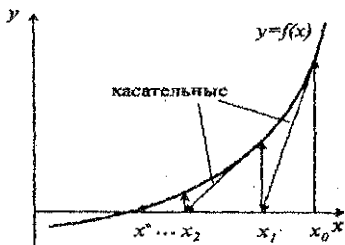
Это условие сходимости итерационной последовательности является *достаточным*.

Приведем еще одно достаточное условие сходимости метода Ньютона. Если для всех значений x , принадлежащих отрезку $[a, b]$, выполняется условие:

$$\left| \frac{f''(x) \cdot f(x)}{(f'(x))^2} \right| < 1, \quad \forall x \in [a, b], x^* \in [a, b],$$

то начальное приближение x_0 может быть выбрано произвольно из отрезка изоляции корня $[a, b]$.

Метод Ньютона получил также второе название *метод касательных* благодаря геометрической иллюстрации его сходимости, представленной на рис. 1.1.



- Рисунок 1.1 – Геометрическая иллюстрация метода Ньютона

Метод одношаговый и имеет квадратичную скорость сходимости для простого корня.

Для абсолютной погрешности приближения x_n справедлива оценка:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_2}{2m_1} (x_n - x_{n-1})^2, \quad (1.9)$$

где $M_2 = \max_{x \in [a, b]} |f''(x)|$ (максимальное по абсолютной величине значение второй производной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$).

Условие (1.9) может использоваться как условие прекращения итерационного процесса.

Недостатками метода являются малая область сходимости и необходимость вычисления производной.

Метод деления отрезка пополам (бисекции).

Пусть корень нашего уравнения $x^* \in [a, b]$ и выполняется соотношение $f(a) \cdot f(b) < 0$. Положим $a_0 = a$, $b_0 = b$. Найдем середину отрезка $[a_0, b_0]$: $c_0 = (a_0 + b_0)/2$. Вычислим значение функции $f(c_0)$. Если $f(c_0) = 0$, то $x^* = c_0$. Если $f(c_0) \neq 0$, проверяем на концах какого из отрезков $[a_0, c_0]$ или $[c_0, b_0]$ функция имеет противоположенные знаки. И, если $f(a_0) \cdot f(c_0) < 0$, то корень $x^* \in [a_0, c_0]$, если $f(b_0) \cdot f(c_0) < 0$, то корень $x^* \in [c_0, b_0]$. Оставляем отрезок, которому принадлежит корень, и обозначим его как $[a_1, b_1]$.

Далее процедуру деления отрезка пополам и проверки знаков функции на концах отрезка повторяем до тех пор, пока длина вновь полученного отрезка $[a_k, b_k]$ не станет меньше заданной двойной точности 2ε : $[a_k, b_k] < 2\varepsilon$. За приближенное значение корня принимается середина этого отрезка: $c_k = (a_k + b_k)/2$.

Если на каком-нибудь шаге окажется, что $f(c_k) = 0$, это означает, что мы нашли точное значение корня уравнения (1.1).

Метод сходится для всех непрерывных функций. Достоинством метода является его простота и надежность. Недостатком метода является его медленная сходимость.

Для оценки абсолютной погрешности нахождения корня справедливо соотношение:

$$|x^* - c_k| \leq \frac{b-a}{2^{k+1}},$$

где k – число делений отрезка пополам.

Метод хорд.

При выводе формулы для итераций в методе хорд предполагают, что вторая производная $f''(x)$ функции $f(x)$ сохраняет знак на отрезке $[a, b]$. На практике же формула для итераций выбирается в зависимости от выполнения условия $f(x) \cdot f''(x) > 0$ для одного из концов отрезка $[a, b]$.

Если выполняется условие $f(b) \cdot f''(b) > 0$, точка с абсциссой b является неподвижным концом хорды и за начальное приближение выбирается точка a . Итерации в этом случае осуществляются по формуле:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1}) \cdot (b - x_{n-1})}{f(b) - f(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.10)$$

$$x_0 = a.$$

Если выполняется условие $f(a) \cdot f''(a) > 0$, то точка с абсциссой a является неподвижным концом хорды, в этом случае начальное приближение равно b . Итерации осуществляются по формуле:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1}) \cdot (a - x_{n-1})}{f(a) - f(x_{n-1})} \quad n = 1, 2, \dots \quad (1.11)$$

$$x_0 = b.$$

Условие $f(x) \cdot f''(x) > 0$ в методе хорд, где $x = a \vee x = b$ является достаточным.

Для абсолютной погрешности приближения x_n справедлива оценка:

$$|x_n - x^*| \leq \frac{M_1 - m_1}{m_1} |x_n - x_{n-1}|. \quad (1.12)$$

Здесь $M_1 = \max_{x \in [a, b]} |f'(x)|$.

Условие (1.12) может использоваться как условие прекращения итерационного процесса.

Метод одношаговый и обладает линейной скоростью сходимости.

Метод Вегстейна (метод секущих-хорд).

Как мы уже отмечали, недостатком метода Ньютона является вычисление производной $f'(x)$. Если в методе Ньютона заменить производную на ее приближенное значение, как отношение приращений функции и аргумента, т.е. положить

$$f'(x_n) \approx \frac{f(x_n) - f(x_{n-1})}{x_n - x_{n-1}},$$

то получим следующую формулу для итераций метода Вегстейна:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)(x_n - x_{n-1})}{f(x_n) - f(x_{n-1})}, n = 1, 2, \dots \quad (1.13)$$

Метод двухшаговой, т.е. для определения нового приближения необходимо знать два предыдущих приближения. Таким образом, задаем x_0, x_1 и вычисляем x_2 и т.д. За начальные приближения x_0, x_1 можно положить концы отрезка $[a, b]$ или же приближаться к корню с любого конца отрезка. Метод обладает сверхлинейной скоростью сходимости.

Рассмотрим пример.

Решим различными методами уравнение:

$$x^3 + 2x - 4 = 0. \quad (1.14)$$

Зададим точность нахождения корня, $\varepsilon = 10^{-6}$. Построим график функции $f(x) = x^3 + 2x - 4$ (рис. 1.2).

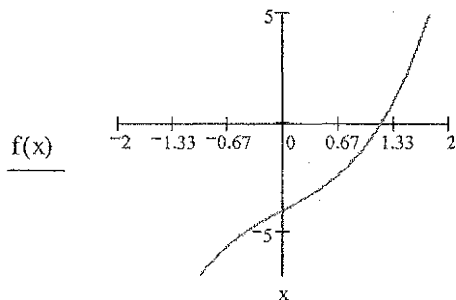


Рисунок 1.2 – График функции $f(x) = x^3 + 2x - 4$

Из графика видно, что единственный действительный корень нашего уравнения принадлежит отрезку $[1; 1,4]$, т.е. $[1; 1,4]$ – отрезок изоляции корня нашего уравнения.

Рассмотрим *метод Ньютона*. Вычислим первую производную функции $f(x)$, она равна: $f'(x) = 3x^2 + 2$. Вычислим вторую производную, она равна: $f''(x) = 6x$. Выберем начальное приближение x_0 , исходя из условия (1.8). Оно выполняется, например, для значения $x_0 = b = 1,4$: $f(1,4) \cdot f''(1,4) > 0$. За начальное приближение выберем $x_0 = 1,4$.

Организуем итерации по формуле (1.7):

$$x_1 = x_0 - \frac{x_0^3 + 2x_0 - 4}{3x_0^2 + 2} = 1,2040609.$$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^3 + 2x_1 - 4}{3x_1^2 + 2} = 1,1798496.$$

После второй итерации проверим выполнение условия (1.5). Минимального значения по модулю первая производная достигает при $x=f$: $m_1 = 5$. Имеем: $|f'(x_2)|/5 = 0,0307449 > \varepsilon$, следовательно, продолжаем итерации. Программно организуем процесс итераций с заданной точностью. На 3 итерации получим корень нашего уравнения $x^* \approx x_3 = 1,1795091$ с заданной точностью ε . Вычислим невязку полученного решения, подставив в функцию $f(x) = x^3 + 2x - 4$ значение $x = x_3$ и взяв полученное значение по модулю. Получим невязку: $|f(x_3)| = 4,6548085 \cdot 10^{-7}$. Заметим, что в нашем случае для окончания итераций мы могли бы применить условие (1.6), приближенное значение корня при этом на 4 итерации составило $x^* \approx x_4 = 1,1795090$.

Как мы уже отмечали, условия сходимости в методе Ньютона и в методе хорд являются достаточными. Возможна сходимость метода при невыполнении условий сходимости. Например, в нашем примере (1.14), выбрав за начальное приближение $x_0 = a = 1$, мы также на третьей итерации получим искомое значение корня с заданной точностью. Тем не менее, условие сходимости рекомендуется проверять, т.к. если оно выполняется, итерационная последовательность всегда сходится к корню уравнения (1.1).

Решим уравнение *методом хорд*. Формулу для итераций выбираем исходя из выполнения условия $f(x) \cdot f''(x) > 0$ для одного из концов отрезка $[1,4]$. В нашем случае $f(b) \cdot f''(b) > 0$, поэтому итерации проводим по формуле (1.10). При этом начальное приближение $x_0 = a = 1$. Произведем вычисления, первая итерация:

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0) \cdot (b - x_0)}{f(b) - f(x_0)} = 1 - \frac{f(1)(1,4 - 1)}{f(1,4) - f(1)} = 1,1572327.$$

Подставив в правую часть формулы (1.5) полученное значение x_1 , получим вторую итерацию:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1) \cdot (b - x_1)}{f(b) - f(x_1)} = 1,1768565.$$

На седьмой итерации получим приближенное значение корня с заданной точностью: $x^* \approx x_7 = 1,179509$.

Решим наше уравнение *методом Вегштейна*. Т.к. метод является двухшаговым, зададим два начальных приближения: $x_0 = 1,4$ и $x_1 = 1,3$ из отрезка изоляции корня. Заметим, что при этом на k -итерации мы вычисляем значение x_{k+1} . Подставив начальные приближения в формулу для итераций (1.13), на первой итерации имеем:

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)(x_1 - x_0)}{f(x_1) - f(x_0)} = 1,3 - \frac{f(1,3)(1,3 - 1,4)}{f(1,3) - f(1,4)} = 1,1933066.$$

На второй итерации, соответственно:

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)(x_2 - x_1)}{f(x_2) - f(x_1)} = 1,1804251.$$

На пятой итерации получим приближенное значение корня с заданной точностью: $x^* \approx x_6 = 1,179509$. Количество итераций напрямую зависит от выбора начальных приближений, чем ближе к корню выбрано начальное приближение, тем меньше итераций требуется для нахождения корня. Например, для данного метода, выбрав начальные приближения $x_0 = 1,3$ и $x_1 = 1,2$, мы уже на четвертой итерации вычислим корень с заданной точностью

Задание.

1. Построить график функции $f(x)$. Отделить все корни, лежащие на данном отрезке.
2. Вычислить наибольший из корней уравнения методом в соответствии с вариантом. Варианты заданий указаны в таблице 1.1. Точность нахождения корня $\varepsilon = 10^{-6}$. При необходимости предусмотреть проверку выполнения достаточных условий сходимости метода. Выбрать два различных начальных приближения из отрезка изоляции корня, провести вычисления, сравнить число итераций.
3. Вычислить невязку решения уравнения $|f(x_n)|$, где x_n – приближенное значение корня.
4. Геометрически проиллюстрировать сходимость метода для своего уравнения.

Таблица 1.1 – Варианты заданий

№ вар.	$f(x)$	Отрезок		Метод
		a	b	
1.	$4x - 7 \sin(x)$	-2	2	хорд
2.	$x^3 - 2x^2 - 11x + 12$	-4	6	Ньютона
3.	$x^2 - 10 \sin^2(x) + 2$	-1	3	Вегстейна
4.	$\ln(x) - 5 \cos(x)$	1	8	хорд
5.	$\ln(x) - 5 \sin^2(x)$	2	6	Вегстейна
6.	$x - 5 \sin^2(x) - 5$	3	9	бисекции
7.	$x^3 + 10x^2 - 50$	-12	5	хорд
8.	$x^3 - 5x^2 + 12$	-2	5	Ньютона
9.	$x^2 + 5 \cos(x) - 3$	-4	2	Вегстейна
10.	$x^3 + 6x^2 - 4x - 24$	-8	4	хорд
11.	$\sin^2(x) - 3 \cos(x)$	-7	3	Ньютона
12.	$x^2 + 50 \cos(x)$	-4	3	бисекции
13.	$0,1x^3 + x^2 - 10 \sin(x) - 8$	-4	4	Вегстейна
14.	$\sin^2(x) - \frac{x}{5} - 1 = 0$	-4	0	Ньютона

Итерационные методы решения СЛАУ

Краткие теоретические сведения.

Итерационные методы решения систем линейных алгебраических уравнений, в дальнейшем СЛАУ, основаны на построении сходящейся к точному решению \bar{x} рекуррентной последовательности приближений.

Рассмотрим систему линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases} \quad (2.1)$$

Будем рассматривать систему n уравнений с n неизвестными. Введем обозначения:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, \quad \bar{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \bar{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix},$$

где матрица A – основная матрица системы, \bar{x} – вектор-столбец неизвестных, \bar{b} – вектор-столбец свободных членов.

Тогда систему (2.1) можно записать в виде:

$$A\bar{x} = \bar{b}. \quad (2.2)$$

Решением СЛАУ будем называть любой набор значений неизвестных, $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, \dots, x_n = \alpha_n$, обращающих все уравнения системы в тождества.

Будем обозначать через \bar{x}^* точное решение СЛАУ:

$$\bar{x}^* = \begin{pmatrix} x_1^* \\ \dots \\ x_n^* \end{pmatrix}$$

Известно, что если матрица A квадратная и невырожденная, $\det A \neq 0$, то СЛАУ имеет единственное решение.

Рассмотрим итерационные методы решения СЛАУ.

Метод простой итерации.

Рассмотрим СЛАУ в виде (2.2): $A\bar{x} = \bar{b}$.

Преобразуем систему к виду:

$$\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}. \quad (2.3)$$

Приведение системы вида (2.2) к виду (2.3) можно осуществить различными способами. Например, можно выполнить эквивалентные преобразования:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \alpha(A\bar{x} - \bar{b}) + \bar{x}, \\ \bar{x} &= (E + \alpha A)\bar{x} - \alpha\bar{b} = B\bar{x} + \bar{c}, \end{aligned}$$

где α – некоторый параметр, подбирая который, можно влиять на сходимость метода, E – единичная матрица.

Или, если матрица A имеет ненулевые диагональные элементы, то i -е уравнение делят на элемент a_{ii} , чтобы получить единичный коэффициент перед x_i . Затем в i -м уравнении в левой части оставляют x_i , а все остальные слагаемые переносят в правую часть. Получаем систему вида $\bar{x} = B\bar{x} + \bar{c}$, где:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{pmatrix} \quad (2.4).$$

В развернутой форме система имеет вид:

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \dots - a_{1n}x_n) \\ x_2 &= \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \dots - a_{2n}x_n) \\ &\dots \dots \dots \\ x_n &= \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}) \end{aligned} \quad (2.5)$$

Пусть теперь система записана в виде (2.3). Зададим произвольным образом начальное приближение \bar{x}^0 и подставим его в правую часть системы (2.3). Получим 1-е приближение.

$$\bar{x}^1 = B\bar{x}^0 + \bar{c}.$$

Вновь подставим полученное приближение \bar{x}^1 в правую часть системы (2.3), получим 2-е приближение \bar{x}^2 и т.д. Повторяя процесс подстановок k раз, на k -итерации мы получаем k -е приближение:

$$\bar{x}^k = B\bar{x}^{k-1} + \bar{c}. \quad (2.6)$$

Здесь $\bar{x}^k = \begin{pmatrix} x_1^k \\ \dots \\ x_n^k \end{pmatrix}$.

Организуя таким образом итерационный процесс, получаем рекуррентную последовательность приближений $\{\bar{x}^k\}$: $\bar{x}^0, \bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^k, \dots$. Вычисление последовательности приближений $\{\bar{x}^k\}$ по формуле (2.6) называется *методом простых итераций*. Итерационный процесс должен быть построен таким образом, чтобы последовательность приближений с ростом k стремилась к решению \bar{x}^* системы (2.3).

Достаточное условие сходимости метода простых итераций дает следующая теорема.

Теорема. Пусть $\|B\| < 1$. Тогда система (2.3) имеет решение, причем единственное, и последовательность приближений $\{\bar{x}^k\}$ сходится к этому решению со скоростью геометрической прогрессии (при любом начальном приближении \bar{x}^0).

Выполнение условия $\|B\| < 1$ берется по любой матричной норме: кубической евклидовой, октаэдрической.

Из теоремы следует, что метод простых итераций сходится, если выполняется хотя бы одно из условий:

1. $\max_{i \leq n} \sum_{j=1}^n |b_{ij}| < 1$ (по кубической норме матрицы),
2. $\sqrt{\sum_{i,j=1}^n b_{ij}^2} < 1$ (по евклидовой норме),
3. $\max_{i \neq j} \sum_{i=1}^n |b_{ij}| < 1$ (по октаэдрической норме).

Если условие (2.7) выполняется, начальное приближение \bar{x}^0 может быть выбрано любым. Например, можно положить $\bar{x}^0 = c$.

В частном случае представления системы вида (2.3) в виде (2.5), развернутая форма для итераций принимает вид:

$$\begin{aligned} x_1^k &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12}x_2^{k-1} - a_{13}x_3^{k-1} - \dots - a_{1n}x_n^{k-1}) \\ x_2^k &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21}x_1^{k-1} - a_{23}x_3^{k-1} - \dots - a_{2n}x_n^{k-1}) \\ &\dots\dots\dots \\ x_n^k &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1}x_1^{k-1} - a_{n2}x_2^{k-1} - \dots - a_{n,n-1}x_{n-1}^{k-1}) \end{aligned}$$

Погрешность k -го приближения в методе простых итераций оценивается неравенством:

$$\|\bar{x}^k - \bar{x}^k\| \leq \frac{\|B\|}{1 - \|B\|} \cdot \|\bar{x}^k - \bar{x}^{k-1}\|. \quad (2.8)$$

Заметим, что чем меньше норма матрицы $\|B\|$, тем быстрее сходятся итерации.

При решении СЛАУ обычно используют кубическую норму вектора и матрицы.

Из оценки (2.8) следуют и условия остановки итерационного процесса. Пусть требуется найти решение системы (2.2) с точностью $\varepsilon > 0$. Тогда, если норма матрицы $\|B\| \leq 1/2$, итерации продолжают до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\max_i |x_i^k - x_i^{k-1}| < \varepsilon. \quad (2.9)$$

Введем обозначение: $q = \|B\|$. Тогда, если норма матрицы $\|B\| > 1/2$, итерации заканчиваются, когда выполнится условие:

$$\max_i |x_i^k - x_i^{k-1}| < \varepsilon \frac{1-q}{q}, \quad (2.10)$$

где ε — допустимая абсолютная погрешность нахождения решения СЛАУ.

Эти условия должны быть выполнены по (k) и $(k-1)$ приближениям для всех неизвестных. Например, первое условие (2.9) можно представить через логическое «и» в виде:

$$(|x_1^k - x_1^{k-1}| < \varepsilon) \wedge (|x_2^k - x_2^{k-1}| < \varepsilon) \wedge \dots \wedge (|x_n^k - x_n^{k-1}| < \varepsilon).$$

Метод Зейделя.

Метод Зейделя является модификацией метода простых итераций. Как и в методе простых итераций приведем систему вида (2.2) каким-либо способом к виду (2.3).

При применении метода простых итераций, в общем случае итерации осуществлялись бы по формуле:

$$x_i^k = \sum_{j=1}^n b_{ij} x_j^{k-1} + c_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.11)$$

При этом значения k -го приближения по всем неизвестным x_i^k можно было бы вычислять в любом порядке. Идея метода Зейделя состоит в том, чтобы использовать уже найденные приближения x_{i-1}^k для улучшения значения последующих приближений x_i^k , т.е. проводить вычисления по формуле:

$$x_i^k = \sum_{j=1}^{i-1} b_{ij} x_j^k + \sum_{j=i}^n b_{ij} x_j^{k-1} + c_i, \quad i = \overline{1, n}. \quad (2.12)$$

Метод вычисления решения на основе итерационной последовательности (2.12) называется методом Зейделя.

Такое усовершенствование позволяет ускорить сходимость метода Зейделя по сравнению с методом простых итераций почти в два раза.

Запишем развернутую форму для итераций метода Зейделя для системы вида (2.5):

$$\begin{aligned} x_1^k &= \frac{1}{a_{11}} (b_1 - a_{12} x_2^{k-1} - a_{13} x_3^{k-1} - \dots - a_{1n} x_n^{k-1}) \\ x_2^k &= \frac{1}{a_{22}} (b_2 - a_{21} x_1^k - a_{23} x_3^{k-1} - \dots - a_{2n} x_n^{k-1}) \\ &\dots \dots \dots \\ x_n^k &= \frac{1}{a_{nn}} (b_n - a_{n1} x_1^k - a_{n2} x_2^k - \dots - a_{nn-1} x_{n-1}^k) \end{aligned} \quad (2.13)$$

Формулу для итераций системы вида (2.5) метода Зейделя можно записать в другом виде. Разложим матрицу B вида (2.4) в сумму двух строго треугольных (нулевые элементы главной диагонали) матриц, т.е. положим $B = B_1 + B_2$, где:

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ -\frac{a_{21}}{a_{22}} & 0 & \dots & 0 \\ a_{22} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ -\frac{a_{n1}}{a_{nn}} & -\frac{a_{n2}}{a_{nn}} & \dots & 0 \\ a_{nn} & a_{nn} & & \end{pmatrix} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{a_{12}}{a_{11}} & \dots & -\frac{a_{1n}}{a_{11}} \\ a_{11} & & & \\ 0 & 0 & \dots & -\frac{a_{2n}}{a_{22}} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

В этом случае система (2.3) приобретет вид:

$$\bar{x} = B_1 \bar{x} + B_2 \bar{x} + \bar{c}$$

А метод Зейделя соответственно запишется в виде:

$$\bar{x}^k = B_1 \bar{x}^k + B_2 \bar{x}^{k-1} + \bar{c} \quad (2.14)$$

Достаточным условием сходимости метода Зейделя является условие доминирования диагональных элементов в матрице A по строкам или по столбцам:

$$|a_{ii}| > \sum_{j=1, j \neq i}^n |a_{ij}|, \quad i = \overline{1, n} \quad \text{или} \quad |a_{jj}| > \sum_{i=1, i \neq j}^n |a_{ij}|, \quad j = \overline{1, n}. \quad (2.15)$$

Сформулированные условия преобладания диагональных элементов являются достаточными, поэтому возможны случаи невыполнения этих условий при достаточности метода.

В частном случае системы вида (2.5) достаточные условия сходимости (2.7) метода простых итераций приобретают вид (2.15). Таким образом, для нашего частного случая достаточными условиями сходимости для обоих методов являются условия доминирования диагональных элементов в матрице A по строкам или по столбцам.

Часто для обеспечения сходимости методов бывает достаточно поменять местами уравнения системы с тем, чтобы на главную диагональ матрицы A системы встали максимальные по абсолютной величине коэффициенты.

Для системы вида (2.5) в методе Зейделя в случае выполнения условия $\|B\| < 1$ справедлива следующая апостериорная оценка абсолютной погрешности k -приближения:

$$\|\bar{x}^* - \bar{x}^k\| \leq \frac{\|B_2\|}{1 - \|B\|} \cdot \|\bar{x}^k - \bar{x}^{k-1}\|. \quad (2.16)$$

Из оценки (2.16) следует и условие остановки итерационного процесса. Введем обозначение: $q_1 = \|B_2\|$. Итерации продолжаются до тех пор, пока не выполнится условие:

$$\max_i |x_i^k - x_i^{k-1}| < \frac{1 - q_1}{q_1} \varepsilon. \quad (2.17)$$

Для контроля полезно найти невязку полученного решения \bar{x}^k :

$$\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} |b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j^k|. \quad (2.18)$$

Рассмотрим итерационные методы на примере.

Пусть требуется решить СЛАУ с точностью $\varepsilon = 10^{-3}$.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 - x_3 = 2 \\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 4 \\ x_1 + x_2 + 4x_3 = 6. \end{cases} \quad (2.19)$$

Точное решение системы: $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = 1$. Система из 3-х уравнений, с 3 неизвестными, определитель матрицы, $\det A = 98$, система имеет единственное решение. Сразу заметим, что в системе выполняется достаточное условие сходимости (доминирование диагональных элементов матрицы A) и оба метода будут сходиться к решению системы. Диагональные элементы матрицы $a_{ii} \neq 0$, поэтому в соответствии с рекомендациями, из первого уравнения выразим x_1 , из второго x_2 , из третьего x_3 .

Получим:

$$\begin{cases} x_1 = (x_2 + x_3 + 2) / 4 \\ x_2 = (-x_3 + 2x_1 - 4) / 4 \\ x_3 = (-x_1 - x_2 + 6) / 4 \end{cases} \quad (2.20)$$

Соответственно, матрица B и вектор-столбец свободных членов имеют вид:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ -1/5 & 0 & 2/5 \\ -1/4 & -1/4 & 0 \end{pmatrix} \quad \bar{c} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 4/5 \\ 3/2 \end{pmatrix}$$

Вычислим нормы матрицы B .

Кубическая норма матрицы $\|B\|_1$ определяется как максимальное значение из сумм элементов каждой строки, взятых по модулю.

$$\|B\|_1 = \max\{1/2; 3/5; 1/2\} = 3/5 < 1.$$

Евклидова норма матрицы $\|B\|_2$ вычисляется через корень квадратный из суммы квадратов всех элементов матрицы B .

$$\|B\|_2 \leq \sqrt{1/16 + 1/16 + 1/25 + 4/25 + 1/16 + 1/16} = \sqrt{9/20} < 1.$$

Октаэдрическая норма матрицы $\|B\|_\infty$ определяется как максимальное значение из сумм элементов каждого столбца, взятых по модулю.

$$\|B\|_\infty = \max\{9/20; 1/2; 13/20\} = 13/20 < 1.$$

Решим СЛАУ *методом простой итерации*.

Зададим произвольное начальное приближение: $x_1^0 = 0, x_2^0 = 0, x_3^0 = 0$.

Подставим начальное приближение в правую часть системы (2.20), и на 1-й итерации получим 1-е приближение: $x_1^1 = 1/2, x_2^1 = 4/5, x_3^1 = 6/4$.

Подставив 1-е приближение в правую часть системы (2.20), получим 2-е приближение. На 2-й итерации имеем:

$$\begin{cases} x_1 = (0,8 + 1,5 + 2)/4 = 1,075 \\ x_2 = (-0,5 + 2 \cdot 1,5 + 4)/5 = 1,3 \\ x_3 = (-0,5 - 0,8 + 6)/4 = 1,175 \end{cases}$$

Проверим выполнение условия прекращения итераций. Т.к. норма матрицы $\|B\|_1 = 3/5 > 1/2$, применять будем условие (2.10). Оно принимает вид:

$$0,6/(1-0,6) \max |x_i^2 - x_i^1| = 1,5 \max\{0,575; 0,5; 0,325\} = 0,8625 > \varepsilon,$$

поэтому итерации продолжаются.

Продолжая процесс подстановок, на 11 итерации получим решение системы с заданной точностью: $x_1 = 1,0003; x_2 = 1,0002; x_3 = 0,9999$. Как мы уже говорили, при выполнении условия сходимости (2.7), начальное приближение может быть выбрано любым. Возьмем, например, начальное приближение $\bar{x}^0 = \bar{c}$: $x_1 = 1/2; x_2 = 4/5; x_3 = 3/2$. На 10 итерации получим решение системы с заданной точностью.

Метод Зейделя.

1-я итерация:

Подставим то же начальное приближение в первое уравнение системы (2.20), получим $x_1^1 = 0,5$. При вычислении значения x_2^1 используем только что получен-

ное значение x_1^1 . Имеем: $x_2^1 = (-0,5 + 2 \cdot 0 + 4)/5 = 0,7$. При вычислении x_3^1 , подставим в 3-е уравнение полученные на 1-й итерации значения x_1^1, x_2^1 . Получим:

$$x_3^1 = (-0,5 - 0,7 + 6)/4 = 1,2.$$

2-я итерация:

$$\begin{cases} x_1^2 = (0,7 + 1,2 + 2)/4 = 0,975 \\ x_2^2 = (-0,975 + 2 \cdot 1,2 + 4)/5 = 1,085 \\ x_3^2 = (-0,975 - 1,085 + 6)/4 = 0,985 \end{cases}$$

После двух итераций проверим выполнение условия (2.16). Матрица B_2 в нашем случае имеет вид:

$$B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1/4 & 1/4 \\ 0 & 0 & 2/5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ее кубическая норма равна $\|B_2\|_1 = \max\{1/2; 2/5\} = 1/2$. Условие (2.16) приобретает вид:

$$\frac{0,5}{1-0,6} \max |x_i^3 - x_i^1| = 1,25 \max\{0,475; 0,385; 0,215\} = 0,594 > \varepsilon.$$

Как видим, погрешность нахождения решения на второй итерации в методе Зейделя меньше, чем в методе простых итераций. На 6 итерации получим решение системы: $x_1 = 1, x_2 = 0,9999, x_3 = 1$.

Вычислим по формуле (2.18) невязку полученного решения. Для этого для каждого уравнения системы (2.19) вычислим абсолютную величину разности между значениями правой части уравнения и значением левой части уравнения при подстановке в него полученных значений неизвестных. Максимальная из полученных величин и даст нам невязку приближенного решения. Например, для первого уравнения имеем:

$$\Delta_1 = |2 - 4x_1 + x_2 + x_3| = |2 - 4 + 0,9999 + 1| = 10^{-4}.$$

Произведя вычисления по всем уравнениям, имеем:

$$\Delta = \max\{10^{-4}; 0,5 \cdot 10^{-3}; 10^{-6}\} = 0,5 \cdot 10^{-3}.$$

Задание.

1. Решить СЛАУ методом простых итераций и Зейделя согласно варианту. Варианты заданий указаны в таблице 2.1. Предусмотреть проверку достаточных условий сходимости методов. Точность нахождения решения СЛАУ $\varepsilon = 10^{-4}$.
2. Вычислить невязку полученного решения.

Таблица 2.1 – Варианты заданий

№	Матрица системы A	Вектор-столбец свободных членов
1.	$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 \\ 1 & 5 & -2 \\ 2 & -3 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 8 \\ 4 \\ -11 \end{bmatrix}$

Продолжение таблицы 2.1

2.	$\begin{bmatrix} 6 & -2 & 1 \\ 2 & 8 & -3 \\ 3 & -1 & +5 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 19 \\ 18 \end{bmatrix}$
3.	$\begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 2 & -6 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ -25 \\ -5 \end{bmatrix}$
4.	$\begin{bmatrix} 2 & -5 & -2 \\ 6 & -3 & -1 \\ 3 & 2 & -8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -14 \\ 6 \\ 35 \end{bmatrix}$
5.	$\begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -9 \\ 13 \\ -4 \end{bmatrix}$
6.	$\begin{bmatrix} 5 & -2 & 2 \\ 2 & 8 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19 \\ 20 \\ -26 \end{bmatrix}$
7.	$\begin{bmatrix} 8 & -6 & 1 \\ 3 & 9 & -5 \\ 1 & 2 & -7 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 \\ 7 \\ -21 \end{bmatrix}$
8.	$\begin{bmatrix} 6 & -10 & 2 \\ 1 & 2 & -6 \\ 8 & 1 & -3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} -20 \\ -5 \\ 5 \end{bmatrix}$
9.	$\begin{bmatrix} 3 & -3 & 9 \\ 1 & 7 & -5 \\ 11 & -3 & 3 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9 \\ 19 \\ 5 \end{bmatrix}$
10.	$\begin{bmatrix} 12 & 1 & -4 \\ 4 & -9 & 4 \\ -2 & -7 & 10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ 25 \end{bmatrix}$
11.	$\begin{bmatrix} 12 & -6 & -5 \\ 3 & 8 & -4 \\ 6 & -1 & -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 14 \\ 17 \\ -4 \end{bmatrix}$
12.	$\begin{bmatrix} 7 & 4 & -2 \\ 1 & -8 & 4 \\ 5 & -3 & 9 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 16 \\ -2 \\ 16 \end{bmatrix}$
13.	$\begin{bmatrix} 8 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 2 & 3 & -6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 17 \\ 21 \\ -12 \end{bmatrix}$
14.	$\begin{bmatrix} 9 & 3 & -4 \\ 6 & 8 & -1 \\ 2 & 4 & -10 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 11 \\ 32 \\ -24 \end{bmatrix}$

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №3

Интерполирование функций

Краткие теоретические сведения.

Задача интерполирования функции $f(x)$ на некотором отрезке $[a, b]$ формулируется следующим образом. На отрезке $[a, b]$ задано $(n+1)$ точек x_0, x_1, \dots, x_n , называемых узлами интерполирования. Последовательность точек $\{x_i\}$, $i = \overline{0, n}$ называется сеткой узлов. Обычно полагают, что $x_0 = a$ и $x_n = b$. Известны значения функции $f(x)$ в этих точках: $y_i = f(x_i)$, $i = \overline{0, n}$. Эти значения, например, могли быть получены из эксперимента или найдены с помощью достаточно сложных вычислений. Ставится задача приближенного восстановления функции $f(x)$ в произвольной точке x отрезка $[a, b]$. Часто для решения этой задачи строится алгебраический полином $P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ степени n , значения которого в узлах интерполирования совпадают со значениями функции $f(x)$ в этих узлах, т.е. выполняются равенства:

$$P_n(x_i) = f(x_i) = y_i, \quad i = \overline{0, n}. \quad (3.1)$$

Этот полином называется *интерполяционным полиномом* для функции $f(x)$. Доказано, что если точки x_0, x_1, \dots, x_n попарно различны, что предполагается при постановке задачи, то существует *единственный* алгебраический полином степени n , для которого выполняется условие (3.1).

Интерполяционный полином можно представить в различных формах. Одной из них является форма Лагранжа. Полином Лагранжа имеет следующий вид:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\dots(x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1)\dots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\dots(x_i-x_n)} \quad (3.2)$$

или в компактной форме:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^n \frac{(x-x_j)}{(x_i-x_j)}$$

Интерполяционный полином можно также представить в форме Ньютона.

Еще раз подчеркнем, что это *один и тот же интерполяционный полином*, различны лишь формы его записи и, соответственно, вычисления.

Интерполяционный полином Ньютона выражается через разделенные разности функции $f(x)$.

Напомним понятие разделенных разностей функции $f(x)$. Пусть задана система точек $\{x_i\}$, $i = \overline{0, n}$, $x_i \in [a, b]$ и значения функции в этих точках $f(x_i)$.

Разделенные разности нулевого порядка в точке x_i определяются как значения функции $f(x_i)$ в этой точке.

Разделенными разностями первого порядка функции $f(x)$ для двух точек x_i, x_{i+1} называются отношения:

$$f(x_i, x_{i+1}) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Разделенными разностями второго порядка функции $f(x)$ для трех точек x_i, x_{i+1}, x_{i+2} называются отношения:

$$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2}) = \frac{f(x_{i+1}, x_{i+2}) - f(x_i, x_{i+1})}{x_{i+2} - x_{i+1}}, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Разделенные разности n -го порядка определяются через разделенные разности $(n-1)$ порядка с помощью рекуррентного соотношения:

$$f(x_i, x_{i+1}, \dots, x_{i+n}) = \frac{f(x_{i+1}, \dots, x_{i+n}) - f(x_i, \dots, x_{i+n-1})}{x_{i+n} - x_i}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad i = 0, 1, 2, \dots$$

Интерполяционный полином Ньютона для не равностоящих узлов, выраженный через разделенные разности в начальной точке x_0 , имеет вид:

$$P_n(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) + \dots + f(x_0, x_1, \dots, x_n)(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}). \quad (3.3)$$

Интерполяционный полином Ньютона для не равностоящих узлов, записанный через разделенные разности в конечной точке x_n , имеет вид:

$$P_n(x) = f(x_n) + f(x_n, x_{n-1})(x - x_n) + f(x_n, x_{n-1}, x_{n-2})(x - x_n)(x - x_{n-1}) + \dots + f(x_n, x_{n-1}, \dots, x_0)(x - x_n)(x - x_{n-1}) \dots (x - x_1). \quad (3.4)$$

Достоинством интерполяционного полинома Ньютона является то, что при добавлении узлов нет необходимости пересчитывать весь полином, достаточно добавить лишь слагаемые, соответствующие новым узлам.

Абсолютная погрешность интерполирования для функции $f(x)$, заданной в аналитическом виде и имеющей непрерывные производные до $(n+1)$ порядка включительно на отрезке $[a, b]$, в текущей точке x оценивается выражением:

$$|R_n(x)| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} |A(x)|, \quad (3.5)$$

где $M_{n+1} = \max_{x \in [a, b]} |f^{(n+1)}(x)|$

$$A(x) = (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n) = \prod_{j=0}^n (x - x_j).$$

В наших обозначениях:

M_{n+1} — максимальное по абсолютной величине значение $(n+1)$ производной функции $f(x)$ на отрезке интерполирования $[a, b]$;

$A(x)$ — полином $(n+1)$ степени со старшим коэффициентом, равным 1 и обращающийся в нуль во всех узлах интерполирования.

Для абсолютной погрешности интерполирования на всем отрезке $[a, b]$ справедлива оценка:

$$|R| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \max_{x \in [a, b]} |A(x)|. \quad (3.6)$$

Рассмотрим построение интерполяционного полинома на примере.

Пусть дана функция:

$$f(x) = 2^x + x^2 \text{ на отрезке } [-1, 1].$$

Выберем узлы интерполирования: $x_0 = -1, x_1 = 0, x_2 = 1$ и вычислим значения функции в узлах. Данные занесем в таблицу 3.1:

Таблица 3.1 – Данные

i	0	1	2
x_i	-1	0	1
y_i	1,5	1	3

Построим интерполяционный полином Лагранжа, используя формулу (3.2):

$$P_2(x) = y_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)} + y_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)} + y_2 \frac{(x-x_0)(x-x_1)}{(x_2-x_0)(x_2-x_1)}$$

$$P_2(x) = 1,5 \frac{(x-1)(x-0)}{(-1-0)(-1-1)} + 1 \frac{(x+1)(x-1)}{(0+1)(0-1)} + 3 \frac{(x+1)(x-0)}{(1+1)(1-0)} = \frac{1,5x^2 - 1,5x}{2} - \frac{x^2 - 1}{1} + \frac{3x^2 + 3x}{2} = \frac{1,5x^2 - 1,5x - 2x^2 + 2 + 3x^2 + 3x}{2} = \frac{2,5x^2 + 1,5x + 2}{2} = \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1.$$

Построим интерполяционный полином Ньютона, выраженный через разделенные разности в начальной точке x_0 , используя формулу (3.3).

Вычислим разделенные разности:

$$f(x_0, x_1) = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} = \frac{1 - 1,5}{0 + 1} = -0,5 \quad f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{3 - 1}{1 - 0} = 2$$

$$f(x_0, x_1, x_2) = \frac{f(x_1, x_2) - f(x_0, x_1)}{x_2 - x_0} = \frac{2 + 0,5}{2} = \frac{5}{4}$$

Результаты вычислений представим в таблице 3.2:

Таблица 3.2 – Разделенные разности функции

x_i	$f(x_i)$	$f(x_i, x_{i+1})$	$f(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$
-1	1,5		
		-0,5	
0	1		1,25
		2	
1	3		

Разделенные разности образуют верхнюю убывающую диагональ, содержащую разделенные разности в начальной точке x_0 (числа 1,5; -0,5; 1,25) и нижнюю возрастающую диагональ, содержащую разделенные разности в конечной точке x_n (3; 2; 1,25).

Интерполяционный полином Ньютона будет иметь вид:

$$P_2(x) = f(x_0) + f(x_0, x_1)(x - x_0) + f(x_0, x_1, x_2)(x - x_0)(x - x_1) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(x + 1) + \frac{5}{4}(x + 1)(x - 0) = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2} + \frac{5}{4}x^2 + \frac{5}{4}x = \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1.$$

Построим полином Ньютона, выраженный через разделенные разности в конечной точке x_2 , используя формулу (3.4):

$$P_2(x) = f(x_2) + f(x_2, x_1)(x - x_2) + f(x_2, x_1, x_0)(x - x_2)(x - x_1) = 3 + 2(x - 1) + \frac{5}{4}(x - 1)(x - 0) = 3 + 2x - 2 + \frac{5}{4}x^2 - \frac{5}{4}x = \frac{5}{4}x^2 + \frac{3}{4}x + 1.$$

Построим график нашей функции и полученного интерполяционного полинома.

На рисунке 3.1:

$f(x) = 2^x + x^2$ – интерполируемая функция,

$f_1(x)$ – интерполяционный полином $P_2(x)$:

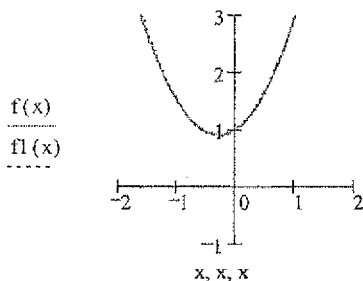


Рисунок 3.1 – Графики функции $f(x)$ и интерполяционного полинома $P_2(x)$

Оценим в соответствии с (3.6) абсолютную погрешность интерполирования на отрезке $[-1, 1]$. Погрешность оценивается выражением:

$$|R_2| \leq \frac{M_3}{3!} \max_{x \in [-1, 1]} |A(x)|.$$

Найдем третью производную нашей функции, она равна $f^{(3)}(x) = (\ln 2)^3 \cdot 2^x$.

Максимального значения по модулю на отрезке $[-1, 1]$ она достигает при значении $x = 1$:

$$M_3 = |f^{(3)}(1)| = 0,6666.$$

Найдем максимальное по модулю значение полинома $A(x)$ на отрезке $[-1, 1]$. В нашем случае полином $A(x)$ имеет вид:

$$A(x) = (x - x_0)(x - x_1)(x - x_2) = x(x - 1)(x + 1) = x^3 - x.$$

Его максимальное по модулю значение $|A_{\max}| = |A_{\min}| = 0,3849$.

Получим оценку для предельного значения абсолютной погрешности на отрезке $[-1, 1]$:

$$|R_2| \leq \frac{M_3}{3!} |A_{\max}| = \frac{0,6666 \cdot 0,3849}{6} = 0,0427.$$

Вычислим значение нашей функции и интерполяционного полинома в точке, не совпадающей с узлами, например в точке $x = 0,5$.

Значения, соответственно, равны $f(0,5) = 1,6875$ и $P_2(0,5) = 1,6642$.

Реальная абсолютная погрешность интерполирования в точке $x = 0,5$ равна

$$|f(0,5) - P_2(0,5)| = |1,6875 - 1,6642| = 0,0233.$$

Оценим погрешность интерполирования в точке $x = 0,5$ в соответствии с неравенством (3.5).

$$|R_2(0,5)| \leq \frac{M_3}{3!} |A(0,5)| = \frac{0,6666}{6} |-0,375| = 0,0417.$$

Задание.

1. Построить полином Лагранжа и Ньютона на равномерной сетке узлов для указанной функции на заданном отрезке $[a, b]$ согласно варианту. Варианты заданий указаны в таблице 3.1. Вычислить значение функции и полинома в точке $x = 0,65b$.
2. Вычислить реальную абсолютную погрешность интерполирования в точке $x = 0,65b$.

Таблица 3.1 – Варианты заданий

№	Функция	Отрезок	Число узлов
1	e^{-x}	$[0,4]$	5
2	$\ln(x)$	$[1,4]$	5
3	\sqrt{x}	$[0,4]$	5
4	$1/x$	$[1,4]$	5
5	$\text{arctg}(x)$	$[0,2]$	5
6	$1/\sqrt{x}$	$[1,4]$	4
7	$\text{tg}(x)$	$[0,1,5]$	5
8	2^x	$[0,4]$	5
9	3^x	$[0,2]$	5
10	$\ln(x) - 5 \cos(x)$	$[1,6]$	5
11	$x^3 + 5 \cos(x)$	$[1,6]$	5
12	$3^x + x^3$	$[-1,2]$	4
13	$x^2 - 10 \sin^2(x)$	$[0,3]$	5
14	$\ln(x) - 5 \sin^2(x)$	$[3,6]$	5

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №4

Численное интегрирование

Краткие теоретические сведения.

Рассмотрим задачу вычисления определенного интеграла

$$I = \int_a^b f(x) dx, \quad (4.1)$$

где $f(x)$ — функция, непрерывная на отрезке интегрирования $[a, b]$, называемая подынтегральной.

Формулы для численного решения поставленной задачи называются *квадратурными*.

В квадратурных формулах для вычисления интеграла (4.1) используются значения $y_0 = f(x_0)$, $y_1 = f(x_1)$, ..., $y_n = f(x_n)$ функции $f(x)$ в точках x_0, x_1, \dots, x_n отрезка $[a, b]$. Квадратурная формула имеет вид:

$$I \approx \sum_{i=0}^n c_i y_i, \quad (4.2)$$

где c_i — так называемые весовые коэффициенты или веса.

Рассмотрим два подхода к решению задачи численного интегрирования.

1. Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n частичных отрезков. Вычислим интегралы на частичных отрезках. Интеграл на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ равен сумме интегралов на частичных отрезках (аддитивность определенного интеграла). Полученные формулы называются составными или обобщенными.

2. Вычислим $\int_a^b f(x) dx$, заменяя подынтегральную функцию $f(x)$ на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ интерполяционным полиномом Лагранжа $P_n(x)$, построенным на $(n+1)$ узлах x_0, x_1, \dots, x_n . Такие формулы называются интерполяционными квадратурными формулами. Такие формулы применяются, например, при табличном задании функции $f(x)$. Можно также интерполировать функцию $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ сплайном $S(x)$, а затем вычислить определенный интеграл от сплайна $\int_a^b S(x) dx$. Такой метод называется сплайн — интегрированием.

Рассмотрим варианты *первого подхода* к решению задачи численного интегрирования.

Для простоты разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на n равных частичных отрезков $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$ точками: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Длина каждого отрезка, называемая шагом разбиения (шагом интегрирования), есть величина постоянная и она равна: $h = \frac{b-a}{n}$. При этом выполняется равенство: $x_k = x_0 + kh$, $k = \overline{0, n}$.

Вычислим значения функции в точках разбиения x_k : $y_k = f(x_k)$.

Формула (метод) трапеций.

Напомним геометрический смысл определенного интеграла: I от неотрицательной функции численно равен площади соответствующей криволинейной трапеции (фигуры, ограниченной графиком функции $y = f(x)$, прямыми: $x = a$, $x = b$ и осью Ox).

Заменим площадь криволинейной трапеции суммой площадей прямоугольных трапеций, построенных на частичных отрезках $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$. Площадь элементарной прямоугольной трапеции равна:

$$s_k = \frac{(y_{k-1} + y_k)}{2} h.$$

Суммируя площади прямоугольных трапеций по всем частичным отрезкам, вычислим интеграл на всем отрезке интегрирования. Он равен:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + y_1 + \dots + y_{n-1} \right) = h \left(\frac{y_0 + y_n}{2} + \sum_{k=1}^{n-1} y_k \right). \quad (4.3)$$

Рассмотрим вопрос оценки абсолютной погрешности составных квадратурных формул.

Абсолютная погрешность формулы на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ в общем случае оценивается выражением:

$$|R| \leq D(b-a) M_p h^p, \quad (4.4)$$

где D — числовая константа, определяемая методом; $M_p = \max_{x \in [a, b]} |f^{(p)}(x)|$ — максимальное по модулю значение производной p -го порядка функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$.

При оценке погрешности рассматриваемых формул будем предполагать, что функция $f(x)$ имеет непрерывную на отрезке $[a, b]$ производную порядка p .

Степень p при h^p в (4.4) принято называть *порядком точности* квадратурной формулы, и значение p также определяется методом.

Квадратурную формулу принято также характеризовать степенью полинома, для которого формула является точной. Как видно из оценки (4.4), квадратурная формула точна для алгебраического полинома степени не выше $(p-1)$, т.к. в этом случае $M_p = 0$ и, соответственно, $|R| = 0$.

Вернемся к формуле трапеций. Оценка абсолютной погрешности на всем отрезке интегрирования определяется выражением:

$$|R| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2. \quad (4.5)$$

Формула трапеций имеет второй порядок точности, и она является точной для полиномов степени не выше первой (иногда указывают максимальную степень полинома, для которого точна формула).

Формулу трапеций мы могли бы получить, заменяя функцию $f(x)$ на частичном отрезке интерполяционным полином Лагранжа первой степени, т.е. заменяя $f(x)$ прямой.

Формула средних прямоугольников.

Заменим площадь криволинейной трапеции суммой площадей прямоугольников, построенных на каждом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$, $k = \overline{1, n}$ с основанием

h и высотой $f(\bar{x}_k)$, где $\bar{x}_k = \frac{x_{k-1} + x_k}{2}$, $k = \overline{1, n}$, средняя точка каждого частичного отрезка. Получим формулу средних прямоугольников:

$$\int_a^b f(x) dx \approx h[f(\bar{x}_1) + \dots + f(\bar{x}_n)] = h \sum_{k=1}^n f(\bar{x}_k) = h \sum_{k=1}^{n-1} f(x_k + \frac{h}{2}). \quad (4.6)$$

На рисунке 4.1 приведена геометрическая иллюстрация метода средних прямоугольников.

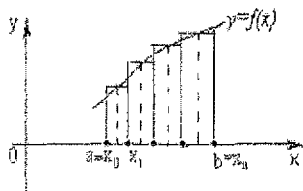


Рисунок 4.1 – Геометрическая иллюстрация метода средних прямоугольников

Абсолютная погрешность формулы средних прямоугольников на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ оценивается выражением:

$$|R| \leq \frac{M_2(b-a)}{24} h^2.$$

Формула средних прямоугольников на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ имеет второй порядок точности. Напомним, что порядок точности оценивается по степени h в соотношении для оценки абсолютной погрешности формулы.

Формула точна для полиномов первой степени, т.е. функций вида: $f(x) = c_0 + c_1x$, т.к. в этом случае $M_2 = 0$.

Формула Симпсона (формула парабол).

Разобьем отрезок интегрирования $[a, b]$ на четное число $2n$ частичных отрезков точками $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{2n} = b$, шаг разбиения $h = \frac{b-a}{2n}$. Получим $(2n+1)$ точек разбиения (узлов). Значения функции в узлах: y_0, y_1, \dots, y_{2n} . Через каждые три точки (x_{2k-2}, y_{2k-2}) , (x_{2k-1}, y_{2k-1}) , (x_{2k}, y_{2k}) , $k = \overline{1, n}$ проведем параболу, т.е. заменим нашу подынтегральную функцию на двоином частичном отрезке $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ $k = \overline{1, n}$ параболой, уравнение которой: $y_k(x) = a_k x^2 + b_k x + c_k$, $k = \overline{1, n}$. Таким образом, интеграл от функции $f(x)$ на двоином частичном отрезке $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k = \overline{1, n}$ будет приблизительно равен интегралу от параболы $y_k(x)$. Интеграл от параболы на отрезке $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ можно вычислить точно через значения функции в узлах. Полученная таким образом формула называется формулой парабол или формулой Симпсона. Она строится на трех узлах и в общем виде записывается так:

$$\int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6} (f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)). \quad (4.7)$$

Например, на стандартном математическом отрезке $[-1, 1]$ она принимает вид:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx \approx \frac{1}{3} (f(-1) + 4f(0) + f(1)). \quad (4.8)$$

На отрезке $[x_{2k-2}, x_{2k}]$ ее вид соответственно:

$$\int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} f(x) dx \approx \int_{x_{2k-2}}^{x_{2k}} (a_k x^2 + b_k x + c_k) dx = \frac{h}{3} (y_{2k-2} + 4y_{2k-1} + y_{2k}).$$

На всем отрезке интегрирования $[a, b]$ определенный интеграл равен сумме интегралов на двоянных частичных отрезках $[x_{2k-2}, x_{2k}]$, $k = \overline{1, n}$. Составная квадратурная формула Симпсона имеет вид:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &= \frac{h}{3} [y_0 + y_{2n} + 2(y_2 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + \dots + y_{2n-1})] = \\ &= \frac{h}{3} (y_0 + y_{2n} + 2 \sum_{k=1}^{n-1} y_{2k} + 4 \sum_{k=1}^n y_{2k-1}). \end{aligned} \quad (4.9)$$

В дальнейшем, слово «составная» может быть опущено.

Абсолютная погрешность формулы Симпсона на всем отрезке интегрирования оценивается выражением:

$$|R| \leq \frac{M_4 (b-a)}{180} h^4.$$

Формула Симпсона на всем отрезке интегрирования $[a, b]$ имеет четвертый порядок точности. Формула Симпсона точна для полиномов степени не выше третьей.

При приближенном вычислении определенного интеграла на компьютере оценка точности вычислений по приведенным выше формулам для погрешностей, как правило, не применяется ввиду трудности нахождения M_4 . В таких случаях используют *правило Рунге*.

Правило Рунге основано на соотношении:

$$I - I_{h/2} \approx \frac{I_{h/2} - I_h}{2^p - 1}, \quad (4.10)$$

где I – точное значение определенного интеграла, $I_h, I_{h/2}$ – приближенные значения определенного интеграла, вычисленные с шагом разбиения h и $h/2$ соответственно, p – порядок метода. При этом мы оцениваем абсолютную погрешность вычисления определенного интеграла с шагом $h/2$. Так как оценка осуществляется после вычисления, то она является апостериорной. Правило Рунге рекомендуется применять [3] в случае, если выполняется неравенство:

$$\left| 2^p \frac{I_h - I_{h/2}}{I_{2h} - I_h} - 1 \right| < 0,1.$$

Напомним порядки методов на всем отрезке интегрирования:

Таблица 4.1 – Порядки методов

№	Название метода	Порядок метода
1	средних прямоугольников	2
2	трапеций	2
3	парабол (Симпсона)	4

С уменьшением шага интегрирования h , абсолютная погрешность вычисления определенного интеграла по квадратурным формулам также уменьшается.

Рассмотрим второй подход к решению задачи численного интегрирования.

Интерполяционные квадратурные формулы.

Рассмотрим вычисление следующего интеграла:

$$I = \int_a^b f(x)\rho(x)dx, \quad (4.11)$$

где $\rho(x) > 0$, заданная интегрируемая функция, так называемая весовая функция и $f(x)$ — некоторая достаточно гладкая функция. Этот интеграл является более общим по сравнению с рассматриваемым ранее интегралом (4.1). Интеграл вида (4.1) получается из (4.11) при весовой функции $\rho(x) = 1$.

Для вычисления интеграла (4.11) применим следующий подход: выберем на отрезке $[a, b]$ $(n+1)$ точек x_0, x_1, \dots, x_n . В отличие от предыдущих методов не будем вычислять интегралы на частных отрезках, а заменим подынтегральную функцию $f(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ интерполяционным полиномом Лагранжа, построенным на узлах x_0, x_1, \dots, x_n . Запишем полином Лагранжа через полином $A(x)$. Напомним, что полином $A(x)$ имеет вид:

$$A(x) = (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n) = \prod_{j=0}^n (x-x_j).$$

Значения функции $f(x)$ в узлах: $y_i = f(x_i)$. Полином Лагранжа для функции $f(x)$ имеет вид:

$$P_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \frac{A(x)}{(x-x_i)A'(x_i)}.$$

В результате получим следующую квадратурную формулу:

$$\int_a^b f(x)\rho(x)dx \approx \int_a^b P_n(x)\rho(x)dx = \quad (4.12)$$

$$= \int_a^b \sum_{i=0}^n y_i \frac{A(x)\rho(x)dx}{(x-x_i)A'(x_i)} = \sum_{i=0}^n y_i \int_a^b \frac{A(x)\rho(x)dx}{(x-x_i)A'(x_i)} = \sum_{i=0}^n c_i y_i$$

$$c_i = \int_a^b \frac{A(x)\rho(x)}{(x-x_i)A'(x_i)} dx, \quad y_i = f(x_i) \quad (4.13)$$

Формула (4.12), в которой коэффициенты c_i определяются выражением (4.13), называется *интерполяционной квадратурной формулой Лагранжа*.

Абсолютная погрешность формулы (4.12) оценивается выражением:

$$|R| \leq \frac{M_{n+1}}{(n+1)!} \int_a^b A(x)\rho(x)dx. \quad (4.14)$$

Из выражения (4.14) видно, что полученная интерполяционная квадратурная формула точна для алгебраических полиномов n -й степени, поскольку в этом случае $M_{n+1} = 0$. О такой квадратурной формуле говорят, что *степень ее точности* равна n (не путать с порядком метода).

Таким образом, квадратурная формула интерполяционного типа (4.12), построенная на $n+1$ узлах x_0, x_1, \dots, x_n , является точной для полиномов степени не выше n .

Рассмотренные нами ранее формулы средних прямоугольников, трапеций, Симпсона на частичном отрезке являются квадратурными формулами интерполяционного типа при $n = 0, 1, 2$ (1, 2 и 3 узла соответственно) и $\rho(x) = 1$.

Рассмотрим полином $A(x)$. Как мы видим, полином $A(x)$ зависит только от самих узлов, на которые разбит отрезок $[a, b]$, и не зависит от функции $f(x)$. Следовательно, коэффициенты c_i , вычисляемые по формуле (4.13), также не зависят от вида функции, и, используя эти коэффициенты, можно считать интегралы от различных функций (при условии одинакового разбиения на узлы).

Как мы уже говорили, если наша функция является полиномом степени не выше n , то формула (4.12) является точной, и имеет место *точное равенство*:

$$\int_a^b x^k dx = \sum_{i=0}^n c_i x_i^k, k = \overline{0, n}.$$

Коэффициенты c_i можно найти при помощи метода неопределенных коэффициентов. Поясним суть метода на примере.

Построим интерполяционную квадратурную формулу на трёх узлах для вычисления интеграла $\int_{-1}^1 f(x) dx$, $\rho(x) = 1$.

Выберем на стандартном отрезке $[-1, 1]$ три *равностоящих* узла: $x_0 = -1$, $x_1 = 0$, $x_2 = 1$. Т.к. у нас три узла, то формула (4.12) точна для полиномов степени $n \leq 2$, и имеет место точное равенство для полиномов степени $k = 0, 1, 2$.

$$\int_{-1}^1 x^k dx = \sum_{i=0}^2 c_i x_i^k$$

Тогда имеем:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 x^0 dx = 2 &= c_0 x_0^0 + c_1 x_1^0 + c_2 x_2^0 = c_0 + c_1 + c_2 \\ \int_{-1}^1 x dx = 0 &= c_0 x_0 + c_1 x_1 + c_2 x_2 = -c_0 + c_2 \\ \int_{-1}^1 x^2 dx = \frac{2}{3} &= c_0 x_0^2 + c_1 x_1^2 + c_2 x_2^2 = c_0 + c_2 \end{aligned}$$

Получим СЛАУ из 3 уравнений, с 3 неизвестными: c_0 , c_1 , c_2 . Определитель основной матрицы системы равен 2, решая систему, получим:

$$c_0 = \frac{1}{3}, c_1 = \frac{4}{3}, c_2 = \frac{1}{3}.$$

Формула имеет вид:

$$\int_{-1}^1 f(x) dx = \frac{1}{3} f(-1) + \frac{4}{3} f(0) + \frac{1}{3} f(1)$$

и совпадает с формулой Симпсона (4.8) на отрезке $[-1, 1]$. Формулы Симпсона (4.7) и (4.8) являются интерполяционными квадратурными формулами, построенными на 3 равностоящих узлах.

На самом деле формула Симпсона является симметрической и верна для полиномов степени $n \leq 3$.

Мы можем построить другие интерполяционные квадратурные формулы на 3 любых не равностоящих узлах, соответственно выбранным узлам будут подсчитаны коэффициенты c_i .

Рассмотрим данные методы на примере.

Вычислим интеграл $\int_0^1 \frac{dx}{1+x}$.

Этот интеграл сводится к табличному интегралу, и его значение равно $\ln 2$.

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \ln 2 = 0,693147.$$

Вычислим интеграл по формуле трапеций (4.3).

Разобьем отрезок интегрирования $[0,1]$ на 5 равных частей, $n=5$. Вычислим h : $h = \frac{b-a}{n} = \frac{1-0}{5} = 0,2$. Вычислим значения подынтегральной функции $f(x) = \frac{1}{1+x}$ в узлах: 0; 0,2; 0,4; 0,6; 0,8; 1. Количество узлов – 6. Напомним, что нумерация узлов начинается с 0. Данные занесем в таблицу 4.2.

Таблица 4.2 – Исходные данные

i	0	1	2	3	4	5
x_i	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
$f(x_i)$	1	0,833333	0,714286	0,625	0,555556	0,5

Получаем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,2 \left(\frac{f(0)+f(1)}{2} + f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8) \right) = 0,695635.$$

Вычислим интеграл по формуле средних прямоугольников (4.6). Т.к. нам необходимо взять середины каждого из 5 частичных отрезков, то получим узлы: 0; 0,1; 0,3; 0,5; 0,9. Вычислим значения функции в узлах, данные сведем в табл. 4.3.

Таблица 4.3 – Исходные данные

x_i	0,1	0,3	0,5	0,7	0,9
$f(x_i)$	0,909091	0,769231	0,666667	0,588235	0,526316

Интеграл равен:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = 0,2(f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9)) = 0,691908$$

Вычислим интеграл по формуле Симпсона (4.9). Разобьем отрезок интегрирования $[0,1]$ на $2n = 10$ равных частей с шагом $h = \frac{b-a}{2n} = \frac{1-0}{10} = 0,1$. Получим 11 узлов: 0; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4; 0,5; 0,6; 0,7; 0,8; 0,9; 1. Для нахождения значения интеграла воспользуемся значениями функции, вычисленными в предыдущих методах. Получим:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{0,1}{3} [y_0 + y_{10} + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)] = \frac{0,1}{3} [f(0) + f(1) + 2(f(0,2) + f(0,4) + f(0,6) + f(0,8)) + 4(f(0,1) + f(0,3) + f(0,5) + f(0,7) + f(0,9))] = 0,693150$$

И, наконец, вычислим интеграл по интерполяционной квадратурной формуле, построенной на трёх узлах 0; 0,5; 1: Как мы знаем, она совпадает с формулой Симпсона (4.7), $h = 0,5$. Имеем:

$$\int_0^1 \frac{dx}{1+x} = \frac{1}{6}(f(0) + 4f(0,5) + f(1)) = 0,694444.$$

Рассмотрим вопрос погрешности вычисления нашего интеграла. Произведем оценку абсолютной погрешности вычисления методом трапеций с шагом $h = 0,2$ в соответствии с соотношением (4.5). Найдем вторую производную функции $f(x)$ и вычислим ее максимальное по модулю значение на отрезке $[0,1]$. Соответственно получим:

$$f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad M_2 = \max_{x \in [0,1]} |f''(x)| = |f''(0)| = 2.$$

В результате имеем:

$$|R| \leq \frac{M_2(b-a)}{12} h^2 = \frac{2 \cdot 1}{12} \cdot (0,2)^2 = 0,006667.$$

При этом, т.к. точное значение интеграла I мы знаем, реальная погрешность составляет: $|I - I_h^{**}| = |0,693147 - 0,695635| = 0,002488$. В обозначении приближенного значения определенного интеграла будем указывать два индекса: верхний соответствует методу вычисления, нижний – шагу интегрирования.

Вычислим интеграл методом трапеций с шагом $\frac{h}{2} = 0,1$. Имеем:

$$I_{h/2}^{**} = 0,1 \left(\frac{f(0) + f(1)}{2} + f(0,2) + f(0,3) + f(0,4) + f(0,5) + f(0,6) + f(0,7) + f(0,8) + f(0,9) \right) = 0,693771$$

Оценим погрешность вычисления интеграла методом трапеций с шагом $h/2$ по правилу Рунге (4.10).

$$|I - I_{h/2}^{**}| \approx \frac{|I_{h/2}^{**} - I_h^{**}|}{2^2 - 1} = \frac{|0,693771 - 0,695635|}{3} = 0,000621.$$

При этом реальная погрешность: $|I - I_{h/2}^{**}| = |0,693147 - 0,693771| = 0,000624$.

Полученные различными методами приближенные значения определенного интеграла и его точное значение сведем в итоговую таблицу 4.4.

Таблица 4.4 – Итоговая таблица

Метод	$I_{\text{точный}}$	$I_{0,5}^{\text{ит.кл.ф.}}$	$I_{0,2}^{\text{тр.тр.}}$	$I_{0,2}^{\text{тр.}}$	$I_{0,1}^{\text{тр.}}$	$I_{0,1}^{\text{ит.тр.}}$
Значение	0,693147	0,694444	0,691908	0,695635	0,693771	0,693150

Задание.

1. Вычислить точное значение определенного интеграла, указанного в варианте. Варианты заданий указаны в таблице 4.5.
2. Вычислить приближенное значение определенного интеграла с шагом h и $h/2$ методом согласно варианту. Количество частичных отрезков 6 и 12 соответственно. Оценить погрешность вычисления с шагом $h/2$ по правилу Рунге.

3. Методом неопределенных коэффициентов построить интерполяционную квадратурную формулу на 4 равностоящих узлах, вычислить интеграл.
4. Вычислить определенный интеграл по формуле Гаусса-Кристоффеля на 2 и 3 узлах соответственно.
5. Сравнить методы по точности; оценить фактическую погрешность вычисления интеграла по составной формуле с шагом h и $h/2$. Полученные результаты свести в итоговую таблицу.

Таблица 4.5 – Варианты заданий

№	Определенный интеграл	Методы
1.	$\int_1^2 \frac{\ln x}{x} dx$	средних прямоугольников
2.	$\int_1^2 \frac{x}{1+x^2} dx$	трапеций
3.	$\int_0^2 \frac{x}{\sqrt{1+x}} dx$	Симпсона
4.	$\int_0^{\pi} x \sin x dx$	средних прямоугольников
5.	$\int_0^1 x e^{2x} dx$	трапеций
6.	$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\cos x}{\sin^2 x} dx$	средних прямоугольников
7.	$\int_{-1}^0 e^{-2x} dx$	Симпсона
8.	$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x} dx$	трапеций
9.	$\int_0^9 \frac{dx}{1+\sqrt{x}}$	Симпсона
10.	$\int_0^4 \sqrt{x} dx$	трапеций
11.	$\int_0^2 \sqrt{1+x^2} x dx$	средних прямоугольников
12.	$\int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$	Симпсона
13.	$\int_1^2 x \ln x dx$	трапеций
14.	$\int_1^6 \frac{dx}{\sqrt{3+x}}$	Симпсона

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №5

Численное решение задачи Коши для дифференциальных уравнений 1-го порядка

Краткие теоретические сведения.

Соотношение вида:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0, \quad (5.1)$$

где F – некоторая функция независимой переменной x , функции $y = y(x)$ и ее производных $y' = y'(x) = \frac{dy(x)}{dx}$, $y'' = y''(x) = \frac{d^2 y}{dx^2}$, ..., $y^{(n)} = y^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n}$, называется обыкновенным дифференциальным уравнением n -го порядка.

Порядком дифференциального уравнения называется порядок старшей производной, входящей в это уравнение.

Решить уравнение – значит найти n раз дифференцируемую функцию $y = y(x)$, превращающее соотношение (5.1) в тождество. Существует понятие общего и частного решения этого дифференциального уравнения.

Общим решением дифференциального уравнения называется n раз дифференцируемая функция $y = \varphi(x, C_1, C_2, \dots, C_n)$, зависящая от n произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n .

Решение дифференциального уравнения, полученное из общего решения при конкретных значениях произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n , называется частным решением этого уравнения.

Для выделения частного решения из общего решения ДУ, кроме самого уравнения, необходимо иметь некоторые дополнительные условия, позволяющие определить значения произвольных постоянных C_1, C_2, \dots, C_n . Одним из таких условий является задание искомой функции и ее производных до $(n-1)$ порядка в некоторой точке x_0 , т.е. условий вида:

$$y(x_0) = y_0, y'(x_0) = y'_0, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}. \quad (5.2)$$

Здесь $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(n-1)}$ – заданные числа. Эти дополнительные данные называют начальными условиями или *условиями Коши*. Наличие начальных условий позволяет получить частное решение дифференциального уравнения. Задача нахождения частного решения уравнения (5.1), удовлетворяющего начальным условиям (5.2), называется *задачей Коши*. Для ДУ n -го порядка имеет место теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. График каждого частного решения называется интегральной кривой.

Методы решения дифференциальных уравнений можно условно разбить на точные, приближенные и численные. Точные методы позволяют выразить решение ДУ через элементарные функции. Получить точное решение ДУ можно не всегда. Приближенные методы дают решение в виде некоторой последовательности функций $y_m(x)$, сходящейся к решению $y(x)$ при $m \rightarrow \infty$. Примером может служить метод разложения решения в обобщенный степенной ряд. Чис-

ленные методы дают значения искомого решения на некоторой выбранной сетке значений аргумента (узлов). Решение при этом получается в виде таблицы. Численные методы не позволяют найти общего решения уравнения (5.1), они могут дать только какое-то частное решение, например, решение задачи Коши.

Рассмотрим задачу Коши для обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка:

$$y' = f(x, y), \quad (5.3)$$

$$y(x_0) = y_0. \quad (5.4)$$

Будем предполагать, что функция $f(x, y)$ непрерывная и непрерывно дифференцируемая по y функция в окрестности замкнутой области $D = \{(x, y) | a \leq x \leq b, c \leq y \leq d\}$, содержащей внутри себя точку (x_0, y_0) .

Будем решать задачу Коши численными методами.

Выберем на отрезке $[a, b]$ упорядоченную систему точек $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, называемую сеткой. Точки называют узлами, а $h = (b - a) / n$ — шагом сетки. Будем рассматривать равномерную сетку. Тогда узлы разбиения имеют вид:

$$x_k = x_0 + kh, \quad k = \overline{0, n}.$$

Будем обозначать через $y(x_0), y(x_1), \dots, y(x_n)$ значения точного решения задачи Коши в узлах сетки, через y_1, y_2, \dots, y_n — значения приближенного решения в этих же узлах.

При численном решении задачи Коши для ОДУ первого порядка, используя начальные условия x_0, y_0 , мы последовательно находим по соответствующей рекуррентной формуле приближенное значение решения y_1 в узле x_1 , затем значение решения y_2 в узле x_2 и т.д.

Рассмотрим некоторые из методов.

Метод Эйлера.

Расчетная формула имеет вид:

$$y_{k+1} = y_k + hf(x_k, y_k), \quad k = \overline{0, n-1}. \quad (5.5)$$

Метод Эйлера имеет первый порядок точности. Порядок точности метода p определяется по степени p при величине h^p , стоящей в оценке абсолютной погрешности соответствующего метода.

Метод Эйлера иногда называют методом ломаных из-за его геометрического смысла. В точке (x_0, y_0) проводится касательная к интегральной кривой $y(x)$. Новое значение функции y_1 определяется как точка пересечения касательной с вертикальной прямой $x = x_1 = x_0 + h$.

Вообще говоря, мы попадаем на новую интегральную кривую уравн. (5.3). Следующая касательная к новой интегральной кривой проводится в точке (x_1, y_1) .

Таким образом, интегральная кривая заменяется ломаной линией.

Метод Эйлера можно отнести к методам Рунге-Кутты 1-го порядка.

При возрастании x погрешность решения может накапливаться.

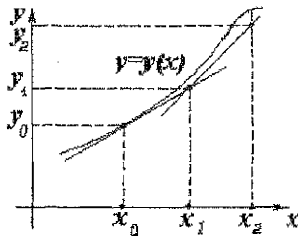


Рисунок 5.1 – Геометрическая иллюстрация метода Эйлера

Методы Рунге-Кутты 2-го порядка.

Метод Эйлера-Коси (или метод типа «предиктор-корректор»).

Метод состоит из двух этапов. Сначала находят по методу Эйлера грубое решение, предиктор:

$$y_{k+1}^* = y_k + hf(x_k, y_k).$$

На следующем шаге это грубое решение сглаживается, корректор:

$$y_{k+1} = y_k + h \frac{f(x_k, y_k) + f(x_{k+1}, y_{k+1}^*)}{2}, \quad k = \overline{0, n-1}.$$

Запишем метод в более удобной для расчетов и программирования форме:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f(x_k + h, y_k + hk_1) \\ y_{k+1} &= y_k + h \frac{(k_1 + k_2)}{2} \end{aligned} \quad (5.6)$$

На каждом шаге метода вычисляются коэффициенты k_1, k_2 и значения решения, начиная с точки x_0, y_0 .

Метод имеет второй порядок точности.

Модифицированный метод Эйлера.

Расчеты осуществляются по формулам:

$$y_{k+1} = y_k + hf\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}f(x_k, y_k)\right), \quad k = \overline{0, n-1}$$

Или в другой форме записи:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \\ y_{k+1} &= y_k + hk_2 \end{aligned} \quad (5.7)$$

Метод имеет второй порядок точности.

Метод Рунге-Кутты 4-го порядка.

Расчеты осуществляют по формулам:

$$\begin{aligned} k_1 &= f(x_k, y_k) \\ k_2 &= f\left(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_1\right) \end{aligned} \quad (5.8)$$

$$\begin{aligned}
 k_3 &= f(x_k + \frac{h}{2}, y_k + \frac{h}{2}k_2) \\
 k_4 &= f(x_k + h, y_k + hk_3) \\
 y_{k+1} &= y_k + h \cdot \frac{(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4)}{6}
 \end{aligned}
 \tag{5.8}$$

Как видно из заголовка, метод имеет четвертый порядок точности.

Оценка погрешности методов по правилу Рунге.

Для практической оценки погрешности используется правило Рунге. Вначале вычисляют решение на равномерной сетке узлов с шагом h , затем сгущают сетку вдвое и производят вычисления на новой сетке с шагом $h/2$. Таким образом, в узле x_k вычисляется приближенное решение с шагом h и $h/2$. Разность между точным решением $y(x_k)$ и приближенным решением $y_{h/2}$ (значение решения в узле x_k с шагом $h/2$) оценивается выражением:

$$y(x) - y_{h/2} \approx \frac{y_{h/2} - y_h}{2^p - 1}, \tag{5.9}$$

где y_k — значение решения в узле x_k , вычисленное с шагом h , p — порядок метода.

Правило (5.9) используют и для автоматического выбора шага интегрирования. Для этого на каждом шаге вычисляют значения приближенного решения с шагом h и $h/2$. Если величина вычисляемой по (5.9) погрешности больше некоторой заданной величины ε (точность нахождения решения), шаг интегрирования уменьшается, если существенно меньше, то шаг увеличивается.

Рассмотрим данные методы на примере. Будем решать задачу Коши для дифференциального уравнения

$$\begin{aligned}
 y' &= y - \frac{2x}{y}, \quad y(0) = 1. \\
 f(x, y) &= y - \frac{2x}{y}
 \end{aligned}
 \tag{5.10}$$

Найдем решение уравнения (5.10) на отрезке $[0, 1]$ численными методами.

Разобьем отрезок интегрирования на 5 равных частей:

$$a = x_0 = 0, \quad b = 1, \quad n = 5, \quad h = \frac{|b-a|}{n} = 0,2, \quad k = \overline{0,5}, \quad x_k = a + kh.$$

Получили 6 узлов, в них будем искать значения решения нашего уравнения.

Точное решение уравнения имеет вид: $y(x) = \sqrt{2x+1}$.

Еще раз напомним, что при численном решении задачи Коши решение получаем в виде таблицы значений решения в узлах.

Решим уравнение *методом Эйлера*.

Найдем значение решения в узле $x_1 = 0.2$. Для этого подставим в формулу для расчетов (5.5) начальные условия. Получим:

$$y_1 = y_0 + hf(x_0, y_0) = y_0 + h \cdot (y_0 - \frac{2 \cdot x_0}{y_0}) = 1 + 0,2 \cdot (1 - \frac{2 \cdot 0}{1}) = 1,2.$$

Вычислим значение решения в узле $x_2 = 0,4$:

$$y_2 = y_1 + hf(x_1, y_1) = y_1 + h \cdot (y_1 - \frac{2 \cdot x_1}{y_1}) = 1,2 + 0,2 \cdot (1,2 - \frac{2 \cdot 0,2}{1,2}) = 1,373333.$$

Вычислим значения решения на всей сетке узлов, данные занесем в табл. 5.1.

Таблица 5.1 – Решение уравнения методом Эйлера

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_k	1	1,2	1,37333	1,58150	1,68108	1,82695
$y(x_k)$	1	1,18322	1,34164	1,48324	1,61245	1,73205

Найдем решение уравнения методом Эйлера – Коши по формуле (5.6).

В узле x_1 , с шагом h :

$$k_1 = f(x_0, y_0) = y_0 - \frac{2 \cdot x_0}{y_0} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{1} = 1$$

$$k_2 = f(x_0 + h, y_0 + hk_1) = (1 + 0,2 \cdot 1) - \frac{2 \cdot 0,2}{(1 + 0,2 \cdot 1)} = 0,86667$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2}(k_1 + k_2) = 1 + 0,1 \cdot (1 + 0,86667) = 1,18667$$

Теперь сгустим сетку, уменьшим шаг интегрирования вдвое: $h_1 = \frac{h}{2} = 0,1$. Ана-

логично вычислим значения решения методом Эйлера-Коши на новой сетке.

Как видим, теперь значение решения в узле $x = 0,2$ мы получили через значение решения в узле $x = 0,1$. Значение решения на новой сетке будем обозначать как $y_{h/2}$.

Произведем расчеты для метода Эйлера – Коши по всей сетке узлов, данные сведем в таблицу 5.2.

Таблица 5.2 – Решение уравнения методом Эйлера-Коши

k	x_k	$y(x_k)$	y_h	Δ_h	$y_{h/2}$	$\Delta_{h/2}$	$\Delta_{\text{Рунге}}$
0	0	1	1	0	1	0	0
1	0,2	1,18322	1,18667	0,00345	1,18410	0,00088	0,00086
2	0,4	1,34164	1,34831	0,00667	1,34336	0,00172	0,00165
3	0,6	1,48324	1,4937	0,01046	1,48526	0,00272	0,00258
4	0,8	1,61245	1,62786	0,01541	1,61647	0,00402	0,0038
5	1	1,73205	1,7542	0,02215	1,73787	0,00582	0,00545

Оценим абсолютные погрешности решений (точное решение нам известно) с шагом h и $\frac{h}{2}$ на первоначальной сетке узлов. В узле $x = 0,2$, с шагом h и $\frac{h}{2}$ соответственно:

$$\Delta_h = |y(x) - y_h| = |1,18322 - 1,18667| = 0,00345$$

$$\Delta_{h/2} = |y(x) - y_{h/2}| = |1,18322 - 1,1841| = 0,00088$$

Оценим также погрешность решения с шагом $\frac{h}{2}$ в узле $x = 0,2$ по правилу

Рунге (5.9):

$$|y(x) - y_{h/2}| \approx \frac{|y_{h/2} - y_h|}{2^p - 1} = \frac{|1,18410 - 1,18667|}{3} = 0,00086.$$

Как видно из таблицы, с уменьшением шага интегрирования погрешность нахождения решения уменьшается, вместе с тем, с ростом x (к концу отрезка) погрешность может накапливаться. Последние две колонки характеризуют реальную и ожидаемую погрешность решения с шагом $\frac{h}{2}$.

Решим наше уравнение методом Рунге-Кутты 4-го порядка (5.8). Найдем решение в узле $x_1 = 0,2$.

$$k_1 = f(x_0, y_0) = y_0 - \frac{2 \cdot x_0}{y_0} = 1 - \frac{2 \cdot 0}{1} = 1$$

$$k_2 = f\left(x_0 + \frac{h}{2}, y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) = \left(y_0 + \frac{h}{2}k_1\right) - \frac{2 \cdot \left(x_0 + \frac{h}{2}\right)}{\left(y_0 + \frac{h}{2}k_1\right)} =$$

$$= (1 + 0,1 \cdot 1) - \frac{2 \cdot 0,1}{(1 + 0,1 \cdot 1)} = 0,91818$$

$$k_3 = f\left(x_0 + h, y_0 + hk_2\right) = \left(y_0 + hk_2\right) - \frac{2 \cdot \left(x_0 + h\right)}{\left(y_0 + hk_2\right)} =$$

$$= (1 + 0,1 \cdot 0,91818) - \frac{2 \cdot 0,1}{(1 + 0,1 \cdot 0,91818)} = 0,90864$$

$$k_4 = f\left(x_0 + h, y_0 + hk_3\right) = \left(y_0 + hk_3\right) - \frac{2 \cdot \left(x_0 + h\right)}{\left(y_0 + hk_3\right)} =$$

$$= (1 + 0,2 \cdot 0,90864) - \frac{2 \cdot 0,2}{(1 + 0,2 \cdot 0,90864)} = 0,84324$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{6} \cdot (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) = 1 + \frac{0,2}{6} \cdot (1 + 2 \cdot 0,91818 + 2 \cdot 0,90864 + 0,84324) = 1,18323$$

Произведем расчеты для метода Рунге-Кутты 4-го порядка по всей сетке узлов, данные сведем в таблицу 5.3.

Таблица 5.3 – Решение уравнения методом Рунге-Кутты 4-го порядка

k	0	1	2	3	4	5
x_k	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1
y_k	1	1,18323	1,34167	1,48328	1,61251	1,73214
$y(x_k)$	1	1,18322	1,34164	1,48324	1,61245	1,73205

Задание.

1. Решить задачу Коши для ОДУ 1-го порядка методом Рунге–Кутты 4-го порядка. Количество узлов – 6. Сгустить сетку, вычислить значения решения с шагом $\frac{h}{2}$. Произвести оценку погрешности приближенного решения $y_{h/2}$ по правилу Рунге.
2. Решить ОДУ методом в соответствии с вариантом.
3. Сравнить значения точного и приближенного решений различными методами на сетке с шагом h , сделать выводы.

Таблица 5.3 – Варианты заданий

№	ОДУ	Начальные условия	Отрезок	Точное решение уравнения	Метод
1	$y' = x + y$	$y(0) = 0$	$[0,1]$	$y = e^x - x - 1$	Эйлера
2	$y' = \frac{xy}{2}$	$y(0) = 1$	$[0,1]$	$y = e^{\frac{x^2}{4}}$	Эйлера-Коши
3	$y' = y + 1$	$y(0) = 1$	$[0,1]$	$y = 2e^x - 1$	Эйлера
4	$y' = \frac{2y}{x}$	$y(1) = 3$	$[1,2]$	$y = 3x^2$	мод. метод Эйлера
5	$y' = e^x + y$	$y(0) = 1$	$[0,1]$	$y = e^x(x + 1)$	Эйлера-Коши
6	$y' = \frac{y}{x} - \frac{2}{x^2}$	$y(1) = 1$	$[1,2]$	$y = \frac{1}{x}$	мод. метод Эйлера
7	$y' = 2xy$	$y(0) = 1$	$[0,1]$	$y = e^{x^2/2}$	Эйлера-Коши
8	$y' = 2x + y - 3$	$y(0) = 2$	$[0,1]$	$y = e^x - 2x + 1$	Эйлера
9	$y' = x^2(1 - y)$	$y(0) = 2$	$[0,1]$	$y = 1 + e^{-\frac{x^3}{3}}$	мод. метод Эйлера
10	$y' = 2xe^{-x^2} - 2xy$	$y(0) = 1$	$[0,1]$	$y = e^{-x^2}(x^2 + 1)$	Эйлера-Коши
11	$y' = \frac{y}{x} + x^2$	$y(1) = 0$	$[1,2]$	$y = x(x^2 - 1) \cdot 0,5$	мод. метод Эйлера
12	$y' = \frac{y}{x} + x \sin x$	$y(\frac{\pi}{2}) = 1$	$[\frac{\pi}{2}, \pi]$	$y = x(\frac{2}{\pi} - \cos x)$	Эйлера
13	$y' = \frac{y}{x} - \frac{12}{x^2}$	$y(1) = 4$	$[1,2]$	$y = \frac{6}{x} - 2x$	Эйлера-Коши
14	$y' = -\frac{2y}{x} + x^3$	$y(1) = \frac{5}{6}$	$[1,2]$	$y = \frac{x^4}{6} - \frac{1}{x^2}$	мод. метод Эйлера

ЛАБОРАТОРНАЯ РАБОТА №6

Решение задачи Коши для системы дифференциальных уравнений 1-го порядка

Краткие теоретические сведения.

Нормальной системой n дифференциальных уравнений первого порядка с неизвестными функциями $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$ называется система:

$$\begin{aligned} y_1' &= f_1(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ y_2' &= f_2(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \\ &\dots\dots\dots \\ y_n' &= f_n(x, y_1, y_2, \dots, y_n) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Решением системы (6.1) на интервале (a, b) называется совокупность n функций $y_1 = y_1(x), y_2 = y_2(x), \dots, y_n = y_n(x)$, непрерывно дифференцируемых на (a, b) и превращающих при их подстановке уравнения системы (6.1) в тождества. Задача Коши для системы (6.1) формулируется следующим образом: найти решение этой системы, удовлетворяющее начальным условиям

$$\begin{aligned} y_1(x_0) &= y_{1,0} \\ y_2(x_0) &= y_{2,0} \\ &\dots\dots\dots \\ y_n(x_0) &= y_{n,0} \end{aligned} \quad (6.2)$$

где $y_{1,0}, y_{2,0}, \dots, y_{n,0}$ — заданные числа, $x_0 \in (a, b)$. Для нормальной системы ДУ (6.1) имеет место теорема о существовании и единственности решения задачи Коши. Решение задачи Коши является *частным* решением нормальной СДУ.

Запишем систему (6.1) в векторной форме, для этого введем векторные функции: вектор-столбец неизвестной функции $\bar{y}(x)$, ее производной $\bar{y}'(x)$ и вектор-столбец функции правой части системы (6.1) $\bar{f}(x, \bar{y})$.

$$\bar{y}(x) = \begin{bmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x) \end{bmatrix} \quad \bar{y}'(x) = \begin{bmatrix} y_1'(x) \\ y_2'(x) \\ \dots\dots\dots \\ y_n'(x) \end{bmatrix} \quad \bar{f}(x, \bar{y}) = \begin{bmatrix} f_1(x, \bar{y}) \\ f_2(x, \bar{y}) \\ \dots\dots\dots \\ f_n(x, \bar{y}) \end{bmatrix}$$

С использованием введенных обозначений задача Коши для системы (6.1) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \bar{y}'(x) &= \bar{f}(x, \bar{y}) \\ \bar{y}(x_0) &= \bar{y}_0 \end{aligned} \quad (6.3)$$

Через $\bar{y}(x_0)$ обозначен вектор-столбец начальных условий (6.2):

$$\bar{y}(x_0) = \begin{bmatrix} y_1(x_0) \\ y_2(x_0) \\ \dots\dots\dots \\ y_n(x_0) \end{bmatrix}$$

Как мы видим, векторная запись (6.3) задачи Коши для СДУ 1-го порядка имеет тот же вид, что и для ДУ 1-го порядка. В случае СДУ вместо функций y, y', f мы имеем вектор-функции $\bar{y}, \bar{y}', \bar{f}$ соответственно. Методы Эйлера, Рунге-Кутты для ДУ 1-го порядка можно формально распространить на СДУ 1-го порядка, коэффициенты k_i в этом случае будут являться также векторами. Например, векторная запись метода Рунге-Кутты 2-го порядка для системы (6.3) имеет вид:

$$\begin{aligned}\bar{k}_1 &= \bar{f}(x_k, \bar{y}_k) \\ \bar{k}_2 &= \bar{f}(x_k + h, \bar{y}_k + h\bar{k}_1) \\ \bar{y}_{k+1} &= \bar{y}_k + \frac{h}{2}(\bar{k}_1 + \bar{k}_2)\end{aligned}$$

Ниже мы рассмотрим методы на конкретном примере.

Приведение дифференциального уравнения n -го порядка к нормальной системе ДУ 1-го порядка.

Рассмотрим задачу Коши для дифференциального уравнения n -го порядка:

$$\Phi(x, u, u', u'', \dots, u^{(n)}) = 0 \quad (6.4)$$

$$u(x_0) = u_0, u'(x_0) = u'_0, u''(x_0) = u''_0, \dots, u^{(n-1)}(x_0) = u_0^{(n-1)} \quad (6.5)$$

Если уравнение (6.4) разрешимо относительно старшей производной $u^{(n)}(x)$, то его можно привести к нормальной системе n дифференциальных уравнений 1-го порядка.

Пусть уравнение (6.4) представлено в виде:

$$u^{(n)}(x) = F(x, u(x), u'(x), u''(x), \dots, u^{(n-1)}(x)). \quad (6.6)$$

Положим:

$$\begin{aligned}u(x) &= y_1(x) \\ u'(x) &= y_2(x) = y'_1(x) \\ u''(x) &= y_3(x) = y'_2(x) \\ &\dots \\ u^{(n-1)}(x) &= y_n(x) = y'_{n-1}(x)\end{aligned}$$

Уравнение (6.6) тогда примет вид $u^{(n)}(x) = y'_n(x) = F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))$.

Таким образом, наше уравнение (6.4) свелось к нормальной системе СДУ:

$$\begin{aligned}y'_1(x) &= y_2(x) \\ y'_2(x) &= y_3(x) \\ &\dots \\ y'_{n-1}(x) &= y_n(x) \\ y'_n(x) &= F(x, y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x))\end{aligned}$$

Начальные условия (6.5) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned}y_1(x_0) &= u_0 = y_{1,0} \\ y_2(x_0) &= u'_0 = y_{2,0} \\ y_3(x_0) &= u''_0 = y_{3,0} \\ &\dots \\ y_n(x_0) &= u_0^{(n-1)} = y_{n,0}\end{aligned}$$

Рассмотрим методы на *примере*.

Решим задачу Коши для ДУ уравнения 2-го порядка численными методами. Напомним, что решение при этом мы получим в виде сеточной функции, т.е. получим значения решения на заданной сетке узлов.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения:

$$u'' - 2u' + u = xe^x, \quad u(0) = 1, u'(0) = 1,5. \quad (6.7)$$

Точное решение задачи Коши для уравнения имеет вид:

$$u(x) = e^x \left(\frac{x^3}{6} + \frac{x}{2} + 1 \right). \quad (6.8)$$

Т.к. наше уравнение разрешимо относительно второй производной, приведем его к системе ДУ из двух уравнений первого порядка. Имеем:

$$u'' = 2u' - u + xe^x,$$

Положим:

$$y_1(x) = u(x)$$

$$y_2(x) = u'(x)$$

Тогда получим:

$$y_1'(x) = u'(x) = y_2(x) = y_2$$

$$y_2'(x) = u''(x) = 2y_2(x) - y_1(x) + xe^x = 2y_2 - y_1 + xe^x$$

Пришли к нормальной системе ДУ первого порядка:

$$y_1' = y_2 = f_1(x, y_1, y_2)$$

$$y_2' = 2y_2 - y_1 + xe^x = f_2(x, y_1, y_2)$$

Начальные условия примут вид:

$$y_1(0) = 1$$

$$y_2(0) = 1,5$$

Будем искать решение на отрезке $[0, 0,5]$, с шагом $h = \frac{0,5 - 0}{5} = 0,1$, в узлах: 0;1;

0,2; 0,3; 0,4; 0,5;

Решим СДУ *методом Эйлера*. Решение находим по формулам:

$$y_{1,k+1} = y_{1,k} + hf_1(x_k, y_{1,k}, y_{2,k})$$

$$y_{2,k+1} = y_{2,k} + hf_2(x_k, y_{1,k}, y_{2,k})'$$

начиная с начальных условий: $x_0 = 0, y_{1,0} = 1, y_{2,0} = 1,5$.

Получим решение в узле $x_1 = 0,1$:

$$y_{1,1} = y_{1,0} + hf_1(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = y_{1,0} + h \cdot y_{2,0} = 1 + 0,1 \cdot 1,5 = 1,15$$

$$\begin{aligned} y_{2,1} &= y_{2,0} + hf_2(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = y_{2,0} + h \cdot (2y_{2,0} - y_{1,0} + x_0 \cdot e^{x_0}) = \\ &= 1,5 + 0,1 \cdot (2 \cdot 1,5 - 1 + 0 \cdot e^0) = 1,7. \end{aligned}$$

Аналогично получаем решение в узле $x_2 = 0,2$.

$$y_{1,2} = y_{1,1} + hf_1(x_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = y_{1,1} + h \cdot y_{2,1} = 1,15 + 0,1 \cdot 1,7 = 1,32$$

$$\begin{aligned} y_{2,2} &= y_{2,1} + hf_2(x_1, y_{1,1}, y_{2,1}) = y_{2,1} + h \cdot (2y_{2,1} - y_{1,1} + x_1 \cdot e^{x_1}) = \\ &= 1,7 + 0,1 \cdot (2 \cdot 1,7 - 1,15 + 0,1 \cdot e^{0,1}) = 1,936. \end{aligned}$$

Решим СДУ методом Рунге-Кутты 2-го порядка. Решение находим по формулам:

$$\begin{aligned}k_{1,1} &= f_1(x_k, y_{1,k}, y_{2,k}) \\k_{1,2} &= f_2(x_k, y_{1,k}, y_{2,k}) \\k_{2,1} &= f_1(x_k + h, y_{1,k} + h \cdot k_{1,1}, y_{2,k} + h \cdot k_{1,2}) \\k_{2,2} &= f_2(x_k + h, y_{1,k} + h \cdot k_{1,1}, y_{2,k} + h \cdot k_{1,2}) \\y_{1,k+1} &= y_{1,k} + \frac{h}{2}(k_{1,1} + k_{2,1}) \\y_{2,k+1} &= y_{2,k} + \frac{h}{2}(k_{1,2} + k_{2,2})\end{aligned}$$

Получим решение в узле $x_1 = 0,1$:

$$\begin{aligned}k_{1,1} &= f_1(x_0, y_{1,0}, y_{2,0}) = y_{2,0} = 1,5 \\k_{1,2} &= f_2(x_k, y_{1,k}, y_{2,k}) = (2y_{2,0} - y_{1,0} + x_0 \cdot e^{x_0}) = (2 \cdot 1,5 - 1 + 0 \cdot e^0) = 2 \\k_{2,1} &= f_1(x_0 + h, y_{1,0} + h \cdot k_{1,1}, y_{2,0} + h \cdot k_{1,2}) = y_{2,0} + h \cdot k_{1,2} = 1,5 + 0,1 \cdot 2 = 1,7 \\k_{2,2} &= f_2(x_0 + h, y_{1,0} + h \cdot k_{1,1}, y_{2,0} + h \cdot k_{1,2}) = \\&= [2 \cdot (y_{2,0} + h \cdot k_{1,2}) - (y_{1,0} + h \cdot k_{1,1}) + (x_0 + h) \cdot e^{x_0+h}] = \\&= 2 \cdot (1,5 + 0,1 \cdot 2) - (1 + 0,1 \cdot 1,5) + 0,1 \cdot e^{0,1} = 2,361 \\y_{1,1} &= y_{1,0} + \frac{h}{2}(k_{1,1} + k_{2,1}) = 1 + 0,05 \cdot (1,5 + 1,7) = 1,16 \\y_{2,1} &= y_{2,0} + \frac{h}{2}(k_{1,2} + k_{2,2}) = 1,5 + 0,05 \cdot (2 + 2,361) = 1,718\end{aligned}$$

Решим СДУ методом Рунге-Кутты 4-го порядка. Решение находим по формулам:

$$\begin{aligned}k_{1,1} &= f_1(x_k, y_{1,k}, y_{2,k}) \\k_{1,2} &= f_2(x_k, y_{1,k}, y_{2,k}) \\k_{2,1} &= f_1(x_k + \frac{h}{2}, y_{1,k} + \frac{h}{2} \cdot k_{1,1}, y_{2,k} + \frac{h}{2} \cdot k_{1,2}) \\k_{2,2} &= f_2(x_k + \frac{h}{2}, y_{1,k} + \frac{h}{2} \cdot k_{1,1}, y_{2,k} + \frac{h}{2} \cdot k_{1,2}) \\k_{3,1} &= f_1(x_k + \frac{h}{2}, y_{1,k} + \frac{h}{2} \cdot k_{2,1}, y_{2,k} + \frac{h}{2} \cdot k_{2,2}) \\k_{3,2} &= f_2(x_k + \frac{h}{2}, y_{1,k} + \frac{h}{2} \cdot k_{2,1}, y_{2,k} + \frac{h}{2} \cdot k_{2,2}) \\k_{4,1} &= f_1(x_k + h, y_{1,k} + h \cdot k_{3,1}, y_{2,k} + h \cdot k_{3,2}) \\k_{4,2} &= f_2(x_k + h, y_{1,k} + h \cdot k_{3,1}, y_{2,k} + h \cdot k_{3,2}) \\y_{1,k+1} &= y_{1,k} + \frac{h}{6}(k_{1,1} + 2k_{2,1} + 2k_{3,1} + k_{4,1}) \\y_{2,k+1} &= y_{2,k} + \frac{h}{6}(k_{1,2} + 2k_{2,2} + 2k_{3,2} + k_{4,2})\end{aligned}$$

Полученные различными методами значения приближенных решений уравнения (6.7) и значения точного решения (6.8) на выбранной сетке узлов сведем в итоговую таблицу.

Таблица 6.1 – Решение уравнения различными методами

№	Узлы	Точное решение $u(x)$	Метод Эйлера	Метод Рунге-Кутта 2-го п.	Метод Рунге-Кутта 4-го п.
1.	0	1	1	1	1
2.	0,1	1,16061	1,15000	1,16000	1,16061
3.	0,2	1,34517	1,32000	1,34373	1,34517
4.	0,3	1,55841	1,51360	1,55589	1,55841
5.	0,4	1,80610	1,73517	1,80216	1,80610
6.	0,5	2,09525	1,98997	2,08947	2,09524

Как и ожидалось, метод Рунге-Кутта 4-го порядка оказался самым точным. Он и наиболее употребим.

Задание.

1. Решить СДУ согласно варианту методом Рунге-Кутта четвертого порядка, ДУ 2-го порядка, предварительно приведя его к СДУ, решить методом Рунге-Кутта второго порядка. Количество узлов – 8.
2. Сравнить значения точного и приближенного решений, сделать выводы.

Таблица 6.2 – Варианты заданий

№	ДУ или СДУ	Начальные условия	Отрезок $[a, b]$	Точное решение ДУ или СДУ
1.	$u'' + 4u' + 4u = x^2 e^{-2x}$	$u(0) = 0$ $u'(0) = 0$	[0,1]	$u(x) = \frac{x^4}{12} e^{-2x}$
2.	$y_1' = \frac{y_1}{x} - \frac{y_2}{e^x} + 1$ $y_2' = \frac{y_1}{2x} + y_2 - 1$	$y_1(1) = 2$ $y_2(1) = e$	[1,3]	$y_1 = 2x$ $y_2 = e^x$
3.	$u'' + u' = x^2 + 2x$	$u(0) = 4$ $u'(0) = -2$	[0,2]	$u(x) = 2 + 2e^{-x} + \frac{x^3}{3}$
4.	$4u'' - 4u' + u = e^{\frac{x}{2}}$	$u(0) = -2$ $u'(0) = 0$	[0,1]	$u(x) = \left(\frac{x^2}{8} + x - 2\right) e^{\frac{x}{2}}$
5.	$u'' - 2u' + 2u = 0$	$u(0) = 0$ $u'(0) = 1$	[0,2]	$u(x) = e^x \sin x$
6.	$y_1' = y_1 + y_2 - 2x - e^x + 2$ $y_2' = y_1 + y_2 - 2x$	$y_1(1) = 2$ $y_2(1) = e$	[1,2]	$y_1 = 2x$ $y_2 = e^x$
7.	$u'' - u = 2 \sin^2(x/2)$	$u(0) = 0$ $u'(0) = 1$	[0,2]	$u(x) = -1 + \frac{1}{2} \cos x + \frac{e^x + e^{-x}}{4}$

8.	$y_1' = \frac{2x}{y_1} + \frac{y_2}{e^x}$ $y_2' = \frac{y_1 \cdot e^{2x}}{2x \cdot y_2}$	$y_1(3) = 6$ $y_2(3) = e^3$	[3,4]	$y_1 = 2x$ $y_2 = e^x$
9.	$u'' + 4u = \sin 2x$	$u(0) = 0$ $u'(0) = 0$	[0,2]	$u(x) = -\frac{x}{4} \cos 2x + \frac{1}{8} \sin 2x$
10.	$y_1' = \frac{y_1 \cdot e^x}{x \cdot y_2}$ $y_2' = \frac{2x}{y_1} + y_2 - 1$	$y_1(3) = 6$ $y_2(3) = e^3$	[3,4]	$y_1 = 2x$ $y_2 = e^x$
11.	$u'' + 3u' + 2u = 2x^3 + 1$	$u(0) = 4$ $u'(0) = -3$	[0,1]	$u(x) = x^2 - 3x + 4$
12.	$y_1' = y_2 - y_1 + e^x$ $y_2' = y_1 - y_2 + e^x$	$y_1(0) = 1$ $y_2(0) = 1$	[0,2]	$y_1 = e^x$ $y_2 = e^x$
13.	$y_1' = 3y_1 + 8y_2$ $y_2' = -y_1 - 3y_2$	$y_1(0) = 6$ $y_2(0) = -2$	[0,2]	$y_1 = 4e^x + 2e^{-x}$ $y_2 = -e^x - e^{-x}$
14.	$y_1' = 3y_1 - y_2$ $y_2' = 4y_1 - y_2$	$y_1(0) = 1$ $y_2(0) = 2$	[0,2]	$y_1 = e^x$ $y_2 = 2e^x$

ЛИТЕРАТУРА

1. Бахвалов, Н.С. Численные методы. – М.: БИНОМ, 2004. – 636 с.
2. Калиткин, Н.Н. Численные методы. – М.: Наука, 1978. – 612 с.
3. Вояков, Е.А. Численные методы. – М.: Наука, 1982. – 255 с.
4. Самарский, А.А. Численные методы / А.А. Самарский, А.В. Гулин. – М.: Наука, 1989. – 432 с.
5. Мудров, А.Е. Численные методы для ПЭВМ на языках Бейсик, Фортран и Паскаль. – Томск: МП РАСКО, 1991. – 272 с.
6. Амосов, А.А. Вычислительные методы для инженера / А.А. Амосов, Ю.А. Дубинский, Н.В. Копченова. – М.: Высшая школа, 1994. – 544 с.
7. Вержбицкий, В.М. Численные методы – М.: Высшая школа, 2005. – 866 с.
8. Рябенский, В.С. Введение в вычислительную математику: учебное пособие. – 2-е изд., исправл. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2000. – 296 с.
9. Петров, И.Б. Лекции по вычислительной математике: учебное пособие / И.Б. Петров, А.И. Лобанов. – М.: Институт-Университет Информационных Технологий, БИНОМ. Лаборатория знаний, 2006. – 523 с.
10. Бабенко, К.И. Основы численного анализа. – Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 848 с.
11. Демидович, Б.П. Основы вычислительной математики: учеб. пособие для вузов – 6-е изд., стереотип. / Б.П. Демидович, И.А. Маров. – СПб: Лань, 2007. – 672 с.

УЧЕБНОЕ ИЗДАНИЕ

Составитель: Глущенко Татьяна Александровна

МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ

к выполнению лабораторных работ
по дисциплине

«Вычислительная математика»

для студентов специальности

1-53 01 02 «Автоматизированные системы обработки информации»

Ответственный за выпуск:	Глущенко Т.А.
Редактор:	Боровикова Е.А.
Компьютерная верстка:	Кармаш Е.Л.
Корректор:	Никитчик Е.В.

Подписано к печати 24.01.2014 г. Бумага «Снегурочка». Формат 60x84 $\frac{1}{16}$.
Гарнитура Times New Roman. Усл. печ. л. 2,79. Уч. изд. л. 3,0. Заказ № 1279.
Тираж 50 экз. Отпечатано на ризографе Учреждения образования
«Брестский государственный технический университет»
224017, г. Брест, ул. Московская, 267.