АНАЛИТИЧЕСКИЕ И ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЙ В МАТЕМАТИКЕ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ

УДК 517.977

К АНАЛИЗУ ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТИ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ОПТИМИЗАЦИИ

Актанорович С.В., Лещев А.Е.
УО «Белорусский государственный университет информатики и радиоэлектроники», г. Минск
Научный руководитель – Минченко Л.И., д-р ф.-м. н., профессор

Вычислению и оценкам производных функции оптимального значения в параметрических задачах математического программирования посвящена обширная литература [1,2]. Данная статья рассматривает вычисление производных второго порядка функции оптимального значения в задаче математического программирования.

Пусть *f(x, y), h_i (x, y) i = 1,…, p* – дважды непрерывно дифференцируемые функции из $R^n \times R^m$ в *R* . Рассмотрим задачу *P(x)* минимизации по переменной *y* функции *f(x, y)* на множестве

$$F(x) = \left\{ y \in R^m : \ h_i(x, y) \le 0 \quad i \in I \right\},$$

где $x \in R^n$ – вектор параметров, I = {1, …, *p*} .

Будем предполагать, что многозначное отображение *F(x)* при всех *x* принимает непустые значения и равномерно ограничено в окрестности точки x_0.

Обозначим через *φ(x)* функцию оптимального значения (т.е. минимальное по *y* на множестве *F(x)* значение целевой функции *f(x,y)*) и через *ω(x)* множество оптимальных решений задачи *P(x).*

Пусть $\rho(x, C) = \inf\limits_{y \in C}\{\rho(x, y)\}$, *B* – открытый единичный шар с центром в 0 в соответствующем пространстве.

Определение 1. Будем говорить, что задача *P(x_0) R*-регулярна, если найдутся числа $\alpha>0$, $\delta_1>0$, $\delta_2>0$ такие, что

$$\rho(y, F(x)) \le \alpha \max\left\{0, \ \ h_i(x, y) \quad i \in I\right\}$$

для всех $x \in x_0 + \delta_1 B$, $y \in y_0 + \delta_2 B$, $y_0 \in \omega(x_0)$.

Пусть $z = (x, y), \quad z_0 = (x_0, y_0)$.

Для задачи *P(x)* введем функцию Лагранжа

$L(z, \lambda) = f(z) + \langle \lambda, h(z) \rangle$, где $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_p)$, $h = (h_1, ..., h_p)$.

Обозначим через

$$\Lambda(z) = \{ \ \lambda \in \mathrm{R}^p \mid \nabla_x L(z, \lambda) = 0, \ \lambda_i \ge 0 \ \text{и} \ \lambda_i h_i(z) = 0, \quad i \in I \ \}$$

множество множителей Лагранжа в точке *z* = (*x,y*).

В [1,2] получен ряд достаточных условий, при которых в *R*-регулярных задачах математического программирования *P(x_0)* существуют производные $\varphi'(x_0; \overline{x})$ функции *φ* в точке x_0 по направлениям $\overline{x}$. В частности, доказано существование $\varphi'(x_0; \overline{x})$ в задаче с линейными по переменной *y* функциями *h_i(x, y) i = 1, … , p* и получена формула

$$\varphi'(x_0; \overline{x}) = \inf_{y_0 \in \omega(x_0)} \max_{\lambda \in \Lambda(z_0)} \langle \nabla_x L(z_0, \lambda), \overline{x} \rangle$$

для вычисления причем этой производной.

В то же время для изучения функции оптимального значения представляют интерес и вторые ее производные по направлениям.

Положим $\overline{z}=(\overline{x},\overline{y})$ и в точке $z_0=(x_0,y_0)\in gr\omega$ введем множества

$$I(z)=\{i\in I\mid h_i(z)=0\},$$

$$\Gamma(z_0;\overline{x})=\left\{\overline{y}\in R^n\mid \langle\nabla h_i(z_0),\overline{z}\rangle\le 0\quad i\in I(z_0)\right\},$$

$$\Lambda^2(z_0;\overline{x})=\{\ \lambda\in\Lambda(z_0)\mid \langle\nabla_x L(z_0,\lambda),\overline{x}\rangle=\max_{\lambda\in\Lambda(z_0)}\langle\nabla_x L(z_0,\lambda),\overline{x}\rangle\}.$$

Определим производную второго порядка функции φ в точке x_o по направлениям $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2$ как
$$\varphi''(x_0;\overline{x}_1,\overline{x}_2)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{2}{t^2}(\varphi(x_0+t\overline{x}_1+t^2\overline{x}_2)-\varphi(x_0)-t\varphi'(x_0;\overline{x}_1)).$$

В [1,2] показано, что существование $\varphi''(x_0;\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ обеспечивают условия *R*-регулярностью задачи (или более жесткими условиями) и дополнительным требованием выполнения сильного достаточного условия второго порядка

$$\sup_{\lambda\in\Lambda^2(z_0;\overline{x}_1)}\langle\overline{y},\nabla^2_{yy}L(z_0,\lambda)\overline{y}\rangle\ >\ 0$$

для всех ненулевых $\overline{y}\in D(z_0)=\left\{\overline{y}\in\Gamma(z_0;0)\ \mid\ \langle\nabla_y f(z_0),\overline{y}\rangle\le 0\right\}$.

Очевидно, такое условие никогда не выполняется в параметрических задачах математического программирования, где функции *f(x, y), h_i (x, y) i = 1, … , p* линейны по переменной *y*. Покажем, что тем не менее производные второго порядка функции оптимального значения существуют в этом случае даже без каких-либо значительных дополнительных предположений.

Теорема. Пусть в *R*-регулярной задаче *P(x_0)* функции *f(x,y), h_i(x, y) i = 1,…, p* линейны по переменной *y* и их вторые производные локально липшицевы. Тогда в точке x_0 существует производная второго порядка функции φ по всем направлениям $\overline{x}_1,\ \overline{x}_2$, причем

$$\varphi''(x_0;\overline{x}_1,\overline{x}_2)=\inf_{y_0\in\omega(x_0)}\ \inf_{\overline{y}_1\in\Gamma(z_0;\overline{x}_1)}\ \max_{\lambda\in\Lambda^2(z_0;\overline{x}_1)}\{\langle 2\nabla_x L(z_0,\lambda),\overline{x}_2\rangle+\langle\overline{z}_1,\nabla^2 L(z_0,\lambda)\overline{z}_1\rangle\},$$

где $\overline{z}_1=(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$.

Список цитированных источников

1. Bonnans, J.F. Perturbations Analysis of Optimization Problems / J.F. Bonnans, A. Shapiro. – New York: Springer-Verlag, 2000.

2. Luderer, B. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad Publishers / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. – Dordrecht/Boston/London, 2002.

УДК 517.9, 519.61

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ И ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА РИККАТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И СИСТЕМЫ ЛОТКЕ-ВОЛЬТЕРА

Бобкович О.И., Ковш В.А.

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

Научный руководитель – Чичурин А.В., д. ф.-м. н., доцент (Украина)

В работе рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка типа Риккати

$$a_0(x)(y''+3yy'+y^3)+a_1(x)(y'+y^2)+a_2(x)y+a_3(x)=0 \tag{1}$$

и система Лотке – Вольтера вида [1]