В то же время для изучения функции оптимального значения представляют интерес и вторые ее производные по направлениям.

Положим $\overline{z}=(\overline{x},\overline{y})$ и в точке $z_0=(x_0,y_0)\in gr\omega$ введем множества

$$I(z)=\{i\in I\mid h_i(z)=0\},$$

$$\Gamma(z_0;\overline{x})=\left\{\overline{y}\in R^n \mid \langle\nabla h_i(z_0),\overline{z}\rangle\le 0 \quad i\in I(z_0)\right\},$$

$$\Lambda^2(z_0;\overline{x})=\left\{\ \lambda\in\Lambda(z_0)\mid \langle\nabla_x L(z_0,\lambda),\overline{x}\rangle=\max_{\lambda\in\Lambda(z_0)}\langle\nabla_x L(z_0,\lambda),\overline{x}\rangle\right\}.$$

Определим производную второго порядка функции φ в точке x_0 по направлениям $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$ как
$$\varphi''(x_0;\overline{x}_1,\overline{x}_2)=\lim_{t\downarrow 0}\frac{2}{t^2}(\varphi(x_0+t\overline{x}_1+t^2\overline{x}_2)-\varphi(x_0)-t\varphi'(x_0;\overline{x}_1)).$$

В [1,2] показано, что существование $\varphi''(x_0;\overline{x}_1,\overline{x}_2)$ обеспечивают условия R-регулярностью задачи (или более жесткими условиями) и дополнительным требованием выполнения сильного достаточного условия второго порядка

$$\sup_{\lambda\in\Lambda^2(z_0;\overline{x}_1)}\langle\overline{y},\nabla^2_{yy}L(z_0,\lambda)\overline{y}\rangle\ >\ 0$$

для всех ненулевых $\overline{y}\in D(z_0)=\left\{\overline{y}\in\Gamma(z_0;0)\ \mid\ \langle\nabla_y f(z_0),\overline{y}\rangle\le 0\right\}$.

Очевидно, такое условие никогда не выполняется в параметрических задачах математического программирования, где функции $f(x, y)$, $h_i(x, y)$ $i = 1, \dots , p$ линейны по переменной y. Покажем, что тем не менее производные второго порядка функции оптимального значения существуют в этом случае даже без каких-либо значительных дополнительных предположений.

Теорема. Пусть в R-регулярной задаче $P(x_0)$ функции $f(x,y)$, $h_i(x, y)$ $i = 1,\dots, p$ линейны по переменной y и их вторые производные локально липшицевы. Тогда в точке x_0 существует производная второго порядка функции φ по всем направлениям $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, причем

$$\varphi''(x_0;\overline{x}_1,\overline{x}_2)=\inf_{y_0\in\omega(x_0)}\ \inf_{\overline{y}_1\in\Gamma(z_0;\overline{x}_1)}\ \max_{\lambda\in\Lambda^2(z_0;\overline{x}_1)}\{\langle 2\nabla_x L(z_0,\lambda),\overline{x}_2\rangle+\langle\overline{z}_1,\nabla^2 L(z_0,\lambda)\overline{z}_1\rangle\},$$

где $\overline{z}_1=(\overline{x}_1,\overline{y}_1)$.

Список цитированных источников

1. Bonnans, J.F. Perturbations Analysis of Optimization Problems / J.F. Bonnans, A. Shapiro. – New York: Springer-Verlag, 2000.

2. Luderer, B. Multivalued analysis and nonlinear programming problems with perturbations. Kluwer Acad Publishers / B. Luderer, L. Minchenko, T. Satsura. – Dordrecht/Boston/London, 2002.

УДК 517.9, 519.61

ОБ АНАЛИТИЧЕСКОМ И ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ТИПА РИККАТИ ВТОРОГО ПОРЯДКА И СИСТЕМЫ ЛОТКЕ-ВОЛЬТЕРА

Бобкович О.И., Ковш В.А.

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

Научный руководитель – Чичурин А.В., д. ф.-м. н., доцент (Украина)

В работе рассматривается дифференциальное уравнение второго порядка типа Риккати

$$a_0(x)(y''+3yy'+y^3)+a_1(x)(y'+y^2)+a_2(x)y+a_3(x)=0 \qquad (1)$$

и система Лотке – Вольтера вида [1]

$$\frac{dx}{dt} = x(a - py),\ \frac{dy}{dt} = y(qx - b), \qquad (2)$$

где a, b, p, q – постоянные.

1. Исследование уравнения (1) интересно с точки зрения его связи с линейными дифференциальными уравнениями третьего порядка. Оно редуцируется к таким уравнениям с искомой функцией u посредством замены $u' = y(x)u$. Уравнение (1) изучалось с помощью аналитических и численных методов. Для уравнения (1), когда коэффициенты $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ равны нулю, можно найти общее решение в виде

$$y = \frac{2}{x + C_2 + \dfrac{C_1}{x + C_2}}, \qquad (3)$$

где C_1, C_2 – произвольные постоянные. Его график для различных значений произвольных постоянных представлен на рис. 1. Для неинтегрируемых в квадратурах случаев уравнения (1) использовались численные методы, реализованные в системе *Mathematica* [2]. Так, например, для уравнения (1) с коэффициентами $a_0(x) = 1,\ a_1(x) = x^2$, $a_2(x) = 0, a_3(x) = 0$ посредством интерполяционных функций построены интегральные кривые, соответствующие решениям задач Коши (рис. 2). Представляет интерес изучение уравнения (1) также с точки зрения аналитической теории дифференциальных уравнений, поскольку его решения не имеют подвижных критических особых точек. Так, например, визуализация мнимой части решения (3) имеет вид, представленный на рис. 3 (где имеются четыре простых полюса).

2. Интересными и важными приложениями теории устойчивости обыкновенных дифференциальных уравнений являются экологические задачи взаимодействия двух или более видов, живущих в одной локальной области. Рассмотрим модель «хищник-жертва» [1], соответствующую двухвидовой задаче сосуществования лис и кроликов, живущих в одном лесном массиве. Пусть *x* – число кроликов, *y* – число лис и *t* означает время. Тогда возникает система двух дифференциальных уравнений вида (2). Эта система имеет нетривиальную точку равновесия (рис. 4) – устойчивый центр. Рассмотрены также модели трех-видового существования и симуляция двухвидовой модели в режиме реального времени.

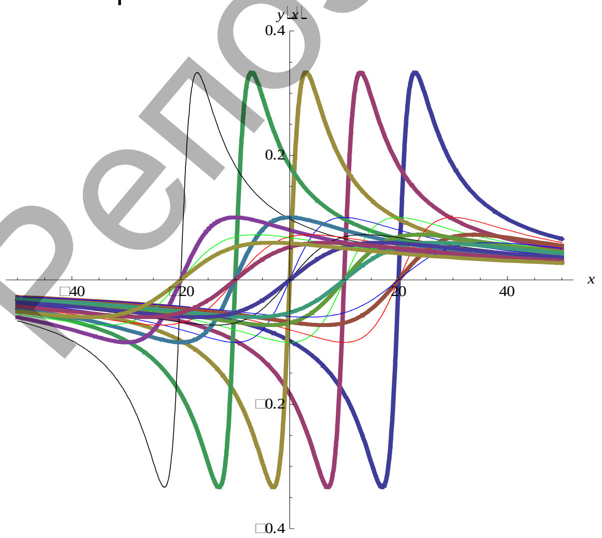

Рисунок 1 – Интегральные кривые уравнения $y'' + 3yy' + y^3 = 0$

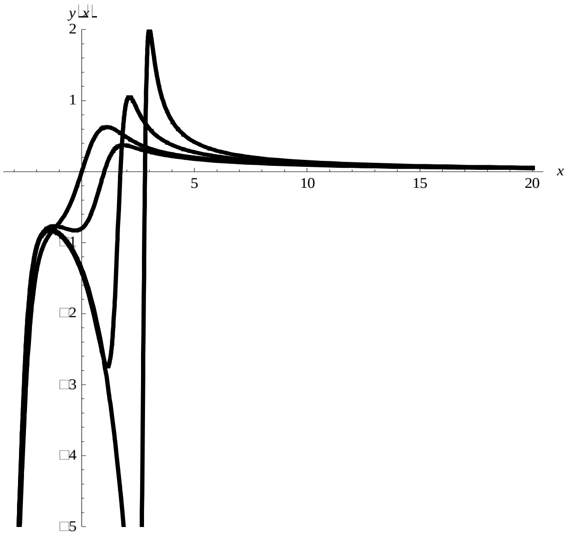

Рисунок 2 – Интегральные кривые уравнения $y'' + 3yy' + y^3 + x^2(y' + y^2) = 0$

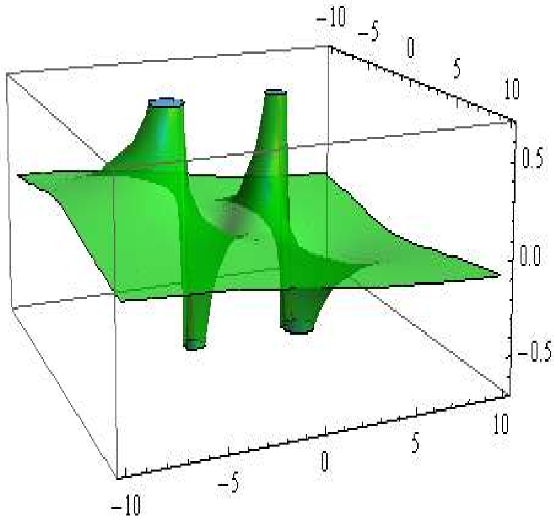

Рисунок 3 – График мнимой части функции (3)

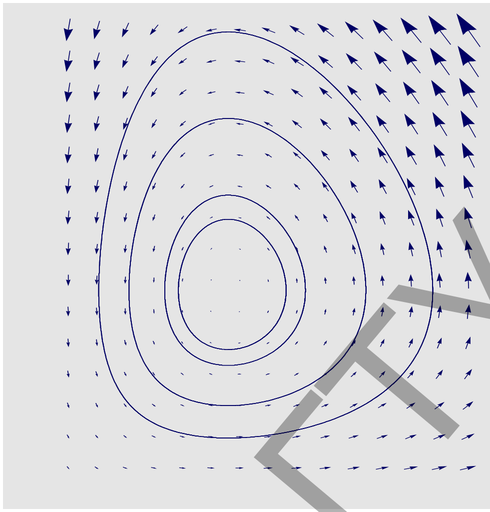

Рисунок 4 – Фазовый портрет системы «хищник-жертва» $x_t' = x(2-y),\ y_t' = y(2x-3)$, ***с критическими точками (0;0) и (1.5;2)***

Список цитированных источников

1. Edwards, C. Henry. Differential Equations and Boundary Value Problems: Computing and Modeling / C. Henry Edwards, David E. Penny. – Pearson Education, Inc., 2008. – 816 p.
2. Abel, M.L. Differential Equations with Mathematica Burlington / M.L. Abel, P. Braselton. – Academic press in imprint of Elsevier, 2004. – 257 p.

УДК 517.9, 519.61

МОДЕЛИРОВАНИЕ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПОВ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ АНИМАЦИОННЫХ ВОЗМОЖНОСТЕЙ СИСТЕМЫ *Mathematica*

Велесевич А.А., Марзан Е.И.

УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест

Научный руководитель – Чичурин А.В., д. ф.-м. н., доцент (Украина)

Рассматриваются задачи поиска и визуализации решений с помощью системы *Mathematica* для уравнений гиперболического и параболического типов.

Общее решение одномерного волнового уравнения $\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ (*a* – параметр) находится в символьном виде

$$u(x,t) = C_1[x - \sqrt{a^2}t] + C_2[x + \sqrt{a^2}t],$$

где C_1, C_2 – произвольные функции от своих аргументов, причем $x = \sqrt{a^2}t + c,\ x = -\sqrt{a^2}t + c$ – характеристики (*c* есть произвольная постоянная). Используя функцию Manipulate [1], построим модуль, позволяющий изобразить форму поверхности *u* как функции переменных *t* и *x* (рис. 1, рис. 2). Аналитическое решение

$$u(x,t) = C_1[y + a^{-1}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})x/2] + C_2[y - a^{-1}(-b - \sqrt{b^2 - 4ac})x/2]$$

мы можем получить для дифференциального уравнения