УДК 697.137.2

ПРИМЕНЕНИЕ ПАКЕТА "МАТЕМАТИКА" ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ФУНКЦИЙ ВЛИЯНИЯ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ МОДЕЛЕЙ ОСНОВАНИЙ

Босаков С.В.
Белорусская государственная политехническая академия
Тарасевич А.Н. *
Брестский государственный технический университет

До настоящего времени не создана единая модель грунтового основания [1]. Поэтому при расчете фундаментных балок и плит инженер выбирает модель основания в соответствии с видом реального грунта и своей интуицией. В недавно вышедшей статье польских исследователей М. Грышманского и Р. Ярчыка [2] сделана попытка дать классификацию различных моделей упругого основания.

Для большинства моделей упругого основания функции влияния (функции перемещений граничной поверхности основания от сосредоточенной единичной силы) выражаются в виде несобственных интегралов от специальных функций и поэтому трудны для практического использования при непосредственных расчетах. В настоящей статье с помощью математической системы "Mathematika" получены выражения для функций влияния наиболее распространенных грунтовых моделей, причем отдельно выделена сингу-

---

* *Босаков С.В. – д.т.н., профессор каф. строительной механики БГПА*
Тарасевич А.Н. – ст. преподаватель каф. ОФиГиГ БГТУ

лярная часть, содержащая особенность в виде решения Буссинеска [3] для упругого полупространства.

§ 1. МОДЕЛЬ УПРУГОГО, ОДНОРОДНОГО, ИЗОТРОПНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА.

В этой модели грунт рассматривается как непрерывная, однородная, изотропная среда, характеризующаяся модулем деформации E_0 и коэффициентом Пуасссна υ_0. Для определения напряжений и деформаций в этой среде используется решение теории упругости. Осадка полупространства, распространяющегося бесконечно в стороны и в глубину, при действии на него сосредоточенной силы определяется решением Буссинеска [4]

$$W(R)=\frac{P(1-\upsilon_0^2)}{\pi E_0}\cdot\frac{1}{R}, \tag{1}$$

где: P – сосредоточенная сила;

R – расстояние от точки приложения силы до точки, где определяется осадка;

υ_o и E_o – коэффициент Пуассона и модуль деформации грунта.

В точке приложения сосредоточенной силы осадка равна бесконечности. Функция, определяющая осадку полупространства действия единичной силы, и будет функцией влияния для данной модели грунта.

§ 2. МОДЕЛЬ ОДНОРОДНОГО, ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ, ШАРНИРНО СОЕДИНЕННОГО С ЖЕСТКИМ НЕДЕФОРМИРОВАННЫМ ОСНОВАНИЕМ.

Модель упругого полупространства дает завышенные значения распределительной способности, поэтому разрабатывались модели распределительная способность которых занимала бы промежуточное положение между моделью Винклера и моделью упругого полупространства. Одной из таких моделей является модель сжимаемого слоя на недеформированном основании. Рассмотрим вначале шарнирное соединение слоя и основания. Данная модель характеризуется 3-мя параметрами: толщиной сжимаемого слоя, модулем деформации, коэффициентом Пуассона. Изменяя параметры модели, можно изменять ее распределительные способности и добиться хорошего совпадения теоретических расчетов с реальной работой грунта. При применении этой модели возникают трудности назначения мощности сжимаемого слоя. Построим функцию влияния для данной модели. Перемещение поверхности от действия сосредоточенной силы определится по формуле [4]:

$$W(R)=\frac{P(1-\upsilon)}{\pi E_o h}\int_0^\infty L(u)J_o(u\frac{R}{h})du;$$

где: h – мощность сжимаемого слоя;

L(u) – ядро интегрального уравнения.

Для данной модели грунта L(u) имеет следующий вид:

$$L(u)=\frac{ch2u-1}{sh2u+2u};$$

Выражение L(u) с помощью разложения в ряд преобразуем к виду удобному для интегрирования

$$L(u)=1+\frac{e^{-2u}-2u-1}{sh2u+2u}=1+e^{-2u}\sum_{k=0}^{\infty}a_k u^k;$$

Коэффициенты ряда находим с помощью пакета "Mathematica"

a_0 = -1, a_1 = - 3/2, a_2 = -1, a_3 = 1/3, a_4 = 0, a_5 = 1/18, a_6 = 1/45, a_7 = -1/945, a_8 = -4/945, a_9 = -1/675, a_{10}= 2/14175, a_{11}= 2209/467775.

Наибольшая погрешность определения $L(u)$ с помощью 12 коэффициентов a_k на интервале изменения $0<u<\infty$ не превышает 0,0001%

Воспользовавшись значениями интегралов [5]

$$\int_0^\infty J_o(\frac{R}{h}u)du=\frac{h}{R};$$

$$\int_0^\infty e^{-\alpha x}J_o(\beta x)u^k dx=\frac{\Gamma_{k+1}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{k+1}{2}}}P_k(\frac{2}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}),$$

получим выражение для W(R) в виде

$$W(R)=\frac{P(1-\upsilon_o^2)}{\pi E_o h}\left[\frac{h}{R}+\sum_{k=0}^{N}a_k\frac{\Gamma_{k+1}}{(4+\beta^2)^{\frac{k+1}{2}}}P_k(\frac{2}{\sqrt{4+\beta^2}})\right],$$

где: $\Gamma_{(z)}$ - Гамма функция [5];

$P_{(z)}$ - полином Лежандра [5].

§ 3. МОДЕЛЬ ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО СЛОЯ, ЖЕСТКО СОЕДИНЕННОГО С НЕДЕФОРМИРУЕМЫМ ОСНОВАНИЕМ.

Другой разновидностью модели упругий слой-несжимаемое основание, является модель с жестким соединением слоя и основания, т.е. отсутствие горизонтальных перемещений вдоль нижней границы слоя. Такое предположение ближе соответствует действительной работе грунта и дает меншие значения осадок [1]. Перемещение поверхности от единичной силы определяется по формуле:

$$W(R)=\frac{P(1-\upsilon_o^2)}{\pi Eh}\int_0^\infty L(u)J_0(u\frac{R}{h})du;$$

Ядро интегрального уравнения имеет для данной модели следующий вид:

$$L(u)=\frac{2\chi\times sh2u-4u}{2\chi\times ch2u+\chi^2-1+4u^2};\quad \chi=3-4\mu_o.$$

Преобразуем выражения ядра к виду:

$$1+e^{-2u}\sum_{k=0}^{N}b_k u^k.$$

Аналогично § 2 находим значение коэффициентов b_k:

$$b_1=-1,\qquad b_2=\frac{2(1+\chi^2)}{(\chi-1)^2},$$

$$b_3=\frac{2(3-8\chi+12\chi^2+\chi^4)}{(\chi-1)^4},\qquad b_4=\frac{4(17-16\chi+18\chi^2+4\chi^3+\chi^4}{3(\chi-1)^4},$$

$$b_5=\frac{2(55-138\chi+171\chi^2+56\chi^3+37\chi^4+10\chi^5+\chi^6}{3(\chi-1)^6},$$ значения остальных

коэффициентов b_k приведены в численном виде в таблице №1, в связи со сложностью их выражений.

Таблица 1

μ, b_k	b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7	b_8	b_9	b_{10}	b_{11}
0.25	-1.0	-1.556	-1.111	-0.444	-0.074	0.016	0.003	-0.001	0.009	0.003	-0.011
0.30	-1.0	-1.592	-1.183	-0.488	-0.064	0.019	-0.029	-0.008	0.051	0.014	-0.062
0.35	-1.0	-1.645	-1.289	-0.538	-0.023	0.023	-0.114	-0.021	0.169	0.032	-0.223
0.40	-1.0	-1.722	-1.444	-0.593	0.074	0.019	-0.306	-0.026	0.468	0.046	-0.686
0.45	-1.0	-1.834	-1.669	-0.642	0.275	-0.013	-0.720	0.011	1.197	-0.008	-1.953
0.50	-1.0	-2.000	-2.000	-0.667	0.667	-0.133	-1.600	0.205	2.952	-0.371	-5.403

Воспользовавшись значениями интегралов [5] по аналогии слоя, шарнирно соединенного с недеформируемым основанием, получим следующее выражение для осадки поверхности от сосредоточенной силы:

$$W(R)=\frac{P(1-\upsilon_o^2)}{\pi E_o h}\left[\frac{h}{R}+\sum_{k=0}^{N} b_k \frac{\Gamma_{k+1}}{(4+\beta^2)^{\frac{k+1}{2}}} P_k\left(\frac{2}{\sqrt{4+\beta^2}}\right)\right].$$

§ 4. УПРУГОЕ ОДНОРОДНОЕ ИЗОТРОПНОЕ ЧЕТВЕРТЬПОРОСТРАНСТВО

В практике строительства возникает необходимость возведения зданий на неспокойном рельефе. В некоторых случаях обосновано применение модели упругого однородного четвертьпространства со свободными гранями. Выражение для вертикальных перемещений загруженной грани от действия нормальной сосредоточенной силы, приложенной в точке *(a,0)* получим на основании работы [6]

$$W(r,z)=\frac{P(1-\upsilon_o^2)}{G_o\pi^3}\int_0^\infty\int_0^\infty\int_0^\infty F(\upsilon_o,\tau,t)e^{-\sigma a cht}Cos(\tau t)Cos(\sigma z)k_{i\tau}(\sigma r)dtd\sigma d\tau.$$

После аппроксимации и последовательного интегрирования получим выражение для определения перемещения границы однородного четвертьпространства

$$W(r,z)=\frac{P(1-\upsilon_o^2)}{\pi E}\left[\frac{1}{\sqrt{(r-a)^2+z^2}}+\frac{1+2f(\upsilon_o)}{\sqrt{(r+a)^2+z^2}}\right];$$

где: $f(\upsilon_o)$ - функция зависящая от υ_o имеет следующее значение:

$$f(\upsilon_o)=\frac{1-4(1-2\upsilon_o)+4(1-2\upsilon_o)^2\frac{\pi^2}{16}}{\frac{\pi^2}{4}-1+4(1-2\upsilon_o)\frac{\pi}{4}-4(1-2\upsilon_o)^2\frac{\pi^2}{16}}$$

§ 5. МОДЕЛЬ УПРУГОГО ОДНОРОДНОГО ИЗОТРОПНОГО ВЕСОМОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА.

В статье [7]решена задача о вдавливании гладкого штампа в упругое полупространство с учетом начальных напряжений создаваемых собственным весом полупространства. Рассмотрена задача о действии сосредоточенно единичной силы на границу полупространства, однако в формуле не выделена сингулярная часть и имеются неточности. Осадка поверхности полупространства определяется по формуле:

$$W(R)=\frac{P}{4\pi G_o}\int_0^\infty L(u)J_o(Ru)du.$$

Ядро интегрального уравнения для данной модели представим в следующем виде:

$$L(u)=\frac{2u}{2u+\gamma}=1-\frac{\gamma}{\gamma+2u},$$

тогда

$$W(R)=\frac{P}{4\pi G_o}\{\frac{1}{R}-\frac{\gamma\pi}{4}[H_o(\frac{\gamma R}{2})-Y_o(\frac{\gamma R}{2})]\}.$$

где $\gamma=\frac{\gamma_o}{G_o}$; γ_o – удельный вес полупространства, G_o - модуль сдвига;

$H_o(z), Y_o(z)$ - функции Бесселя [5].

Учитывая, что выражение $\frac{\gamma R}{2}$ для реальных грунтов меньше единицы, после разложения в ряд разности функций будем иметь:

$$W(R)=\frac{P}{4\pi G_o}\{\frac{1}{R}-\frac{\gamma}{2}[\frac{\gamma R}{2}-Ln(\frac{\gamma R}{4})+C]\},$$

Здесь C-постоянная Эйлера (0.57721...).

§ 6. МОДЕЛЬ НЕОДНОРОДНОГО ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ПЕРЕМЕННЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ ПУАССОНА.

Все реальные тела, в том числе и грунт, обладают неоднородностью упругих и других свойств. Обзор известных публикаций для различных, неоднородных моделей дан в [8]. Из этого обзора видно, что чаще всего рассматривают степенную зависимость модуля упругости или модуля сдвига от глубины, реже рассматривается экспоненциальная зависимость, а коэффициент Пуассона принимают постоянной величиной. Однако известно, что коэффициент Пуассона зависит от пористости. В работах [9,10] даны общие решения задач теории упругости с переменным коэффициентом Пуассона и модулем сдвига и рассмотрено ряд конкретных примеров при постоянном модуле сдвига. В работе [10] дано выражение для вертикальных перемещений границы неоднородного полупространства под действием единичной, нормальной сосредоточенной силы P, приложенной в начале координат, когда коэффициент Пуассона изменяется по закону:

$$\upsilon(z)=\frac{1}{A+Be^{-\alpha z}}.$$

Осадка поверхности полупространства определяется по формуле:

$$W(R)=\frac{P}{2\pi G_o}\int_0^\infty L(u)J_o(Ru)du.$$

Функция $L(u)$ имеет вид:

$$L(u)=\frac{2u+\alpha}{2u(A+B)+\alpha A}=\frac{(A+B)(2u+\alpha)}{(A+B)[2u(A+B)+\alpha A]}=$$

$$=\frac{1}{A+B}[1+\frac{\alpha B}{2u(A+B)+\alpha A}].$$

Тогда

$$W(R)=\frac{P}{2\pi G_o(A+B)}\int_0^\infty[1+\frac{\alpha B}{2u(A+B)+\alpha A}]J_o(uR)du=$$

$$=\frac{P}{2\pi G(A+B)}\{\frac{1}{R}+\frac{\alpha B}{2(A+B)}\frac{\pi}{2}[H_o(z)-Y_o(z)]\}.$$

При малых $z=\frac{\alpha AR}{2(A+B)}$, что соответствует для реальных грунтов

$$W(R)=\frac{P}{2\pi G_o(A+B)}\{\frac{1}{R}+\frac{\alpha B}{2(A+B)}[\frac{\alpha AR}{2(A+B)}-Ln(\frac{\alpha AR}{2(A+B)})+C]\}.$$

Постоянные A и B определяются по значениям коэффициента Пуассона на поверхности и бесконечной глубине полупространства, α определяет глубину изменения коэффициента Пуассона.

Так при $\upsilon(0)=0.5$ и $\upsilon(\infty)=0.25$ A=1,3333 B=0,6667.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на утругом основании. М.:, Стройиздат, 1984. 679с.
2. Gryczmanski M., Jurczyk P. Modele podloza gruntowege i ich ocena // Inzyneria i Budqwnictwa. – 1995. – № 2. – P. 98-104.
3. Градштейн П.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., ФМ, 1963. 1093 с.
4. Boussinesq I. Applications des potentiels a l'etude de l'equilibre et du mouvement des solides elastiques. Paris, 1885.
5. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешенные задачи теории упругости. М.:Наука, 1979. 222 с.

6. Босаков С.В. Действие сосредоточенной силы на упругое четверть пространство. Теоретическая и прикладная механика, вып. 15. Мн., 1988, С. 100-108.
7. Филиппова Л.М. Об учете сил веса в контактной задаче для упругого полупространства. Изв.Северо-Кавказского центра высшей школы. Естественные науки. 1, 1982. С. 32-33.
8. Развитие теории контактных задач в СССР. М.: Наука, 1976. 493 с.
9. Плевако В.П. О возможности использования гармонических функций при решении задач теории упругости неоднородных сред. – ПММ, 1972, т. 36, вып. 5, с. 886-894.
10. Кузнецов Е.А. Равновесие неоднородного полупространства в плоском и осесимметричном случаях. МТТ. № 2, 1984, с. 83-92.