Международная научно-практическая конференция
"Напрягающие цементы, бетоны и самонапряженные конструкции"
Брестский государственный технический университет
БГТУ г. Брест, 18 – 20 декабря 2000 года

УДК 624.04

РАСЧЕТ КРЕСТООБРАЗНОЙ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

Босаков С.В.[*]
Белорусская государственная политехническая академия

ВВЕДЕНИЕ

В последнее время при строительстве на слабых грунтах стали широко использоваться плитные фундаменты, что позволяет значительно снизить продолжительность строительства и уменьшить стоимость работ нулевого цикла по сравнению с аналогичными показателями у свайных фундаментов. Однако теория расчета плит на упругом основании с распределительными свойствами разработана лишь для круглых и прямоугольных плит [1-3]. Для плит сложной формы в плане используются численные методы конечных разностей [4-6] и конечных элементов [7]. Ниже излагается подход, основанный на симбиозе способа Б.Н. Жемочкина [2] и метода Ритца [8], позволяющий рассчитывать плиты любой формы в плане на упругом основании любого типа на произвольную внешнюю нагрузку. Ранее в работах автора этот подход реализован для расчета прямоугольной плиты [9] и с соавтором плиты в форме сектора круга [1щ] на упругом основании.

[*] *Босаков С.В. – д.т.н., профессор каф. строительной механики БГПА.*

ПОСТАНОВКА И РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

Рассмотрим крестообразную плиту постоянной цилиндрической жесткости D, лежащую без трения на упругом основании под действием нормальной к срединной плоскости плиты внешней нагрузки (рис.1).

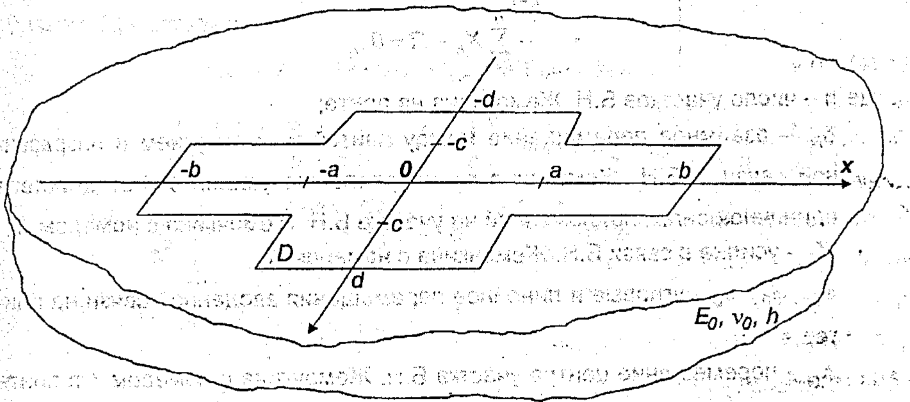

Рис.1. Крестообразная плита на упругом основании

Для расчета плиты разобьем ее поверхность на прямоугольные участки Б.Н. Жемочкина прямыми, параллельными координатным осям. В центре каждого участка поставим жесткий вертикальный стержень, через который осуществляется контакт плиты с упругим основанием. Будем считать, что усилие в каждом стержне вызывает равномерную эпюру реактивных давлений на упругое основание в пределах каждого участка. Полученную многократно статически неопределимую систему рассчитываем смешанным методом строительной механики, приняв за неизвестные усилия в связях Б.Н. Жемочкина, линейное и угловые перемещения введенного на плите в начале координат (рис.1) защемления. Таким образом, способ Б.Н. Жемочкина позволяет перейти от решения сложной контактной задачи теории упругости для гибкой плиты сложной в плане формы со статическими граничными условиями к расчету методами строительной механики статически неопределимой плиты на упругоподатливых связях. Система канонических уравнений способа Б.Н. Жемочкина для расчета рассматриваемой плиты на упругом основании принимает вид [2]

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\delta_{ik}X_k+\varphi_{0x}y_i+\varphi_{0y}x_i+u_0+\Delta_{iP}\right)=0\,; \\ -\sum_{k=1}^{n}X_k y_k+M_{px}=0\,; \\ -\sum_{k=1}^{n}X_k x_k+M_{py}=0\,; \\ -\sum_{k=1}^{n}X_k+R=0\,. \end{cases} \qquad (1)$$

где n – число участков Б.Н. Жемочкина на плите;

δ_{ik} — взаимное перемещение между плитой и основанием в разрезанной связи i Б.Н. Жемочкина по направлению усилия X_i от действия единичной силы, приложенной на участке Б.Н. Жемочкина с номером k;

X_k - усилие в связи Б.Н. Жемочкина с номером k;

$\varphi_{0x}, \varphi_{0y}, u_0$ - угловые и линейное перемещения введенной связи на плите;

Δ_{ip} - перемещение центра участка Б.Н. Жемочкина с номером i в плите с защемленной точкой от внешней нагрузки;

M_{px}, M_{py}, R - моменты равнодействующей внешней нагрузки R относительно координатных осей и величина равнодействующей;

Согласно теории способа Б.Н Жемочкина коэффициенты при неизвестных в (1) зависят от осадок упругого основания $V(x,y)$ и прогибов плиты с защемленной точкой $Z(x,y)$ и определяется формулой

$$\delta_{ik}=V_{ik}+Z_{ik}\,. \qquad (2)$$

Осадки упругого основания $V(x,y)$ для большинства существующих моделей упругого основания можно представить в форме [11]

$$V_{ik}=\frac{1-\nu^2}{\pi E_0 h}\left(F_{ik}^0+F_{ik}^1\right), \qquad (3)$$

где E_0, ν_0, h - параметры, характеризующие упругие свойства и размеры (например, толщину слоя) упругого основания;

F_{ik}^0 - безразмерная функция для определения перемещений центра прямоугольного участка Б.Н. Жемочкина с номером i на поверхности упругого полупространства от единичной силы, равномерно распределенной по участку с номером k [2];

F_{ik}^1 - корректирует функцию F_{ik}^0 применительно к данной модели упругого основания.

Значительно большую сложность вызывает определение прогибов плиты с защемленной точкой $Z_{ik}(x_i, y_i)$. Предлагается их определять следующим образом. Представим

$$Z_{ik}(x_i,y_i) = Z_{ik}^0(x_i,y_i) + \sum_{n=1} A_n^k w_m(x_i,y_i), \tag{4}$$

$$Z_{ik}^0(x_i;y_i) = \frac{1}{16\pi D}\Bigg\{\left[\alpha^2\left(\frac{x_i}{a}-\frac{t}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{b}-\frac{z}{b}\right)^2\right] ln\left[\alpha^2\left(\frac{x_i}{a}-\frac{t}{a}\right)^2 + \left(\frac{y_i}{b}-\frac{z}{b}\right)^2\right] -$$

$$2\left(\alpha^2\frac{x_i t}{a^2} + \frac{y_i z}{b^2}\right)\left[1 + ln\left(\alpha^2\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right)\right] + \left(\alpha^2\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right) ln\left(\alpha^2\frac{t^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2}\right) +$$

$$\left(\alpha^2\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}\right) ln\left(\alpha^2\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}\right)\Bigg\}; \quad \alpha = \frac{a}{b};$$

$$w_1(x_i,y_i) = 2\alpha\frac{x_i y_i}{ab}; \quad w_2(x_i,y_i) = \alpha^2\frac{x_i^2}{a^2} - \frac{y_i^2}{b^2};$$

$$w_3(x_i,y_i) = \alpha\frac{x_i}{a}\left(\alpha^2\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}\right); \quad w_4(x_i;y_i) = \frac{y_i}{b}\left(\alpha^2\frac{x_i^2}{a^2} + \frac{y_i^2}{b^2}\right);$$

... .

В представлении (4) $Z_{ik}^0(x_i, y_i)$ представляет прогибы точки $M(x_i, y_i)$ плиты бесконечных размеров с защемленной в начале координат точкой от действия единичной силы, приложенной к точке $N(t,z)$. Впервые получено в работе [12];

$w_m(x_i, y_i)$ - частные решения Клебша [4], априори удовлетворяющие уравнениям равновесия плиты с защемленной точкой под действием сосредоточенной силы и кинематическим граничным условиям в защемленной точке. То есть, эти решения получаются из бигармонического уравнения [8]

$$\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4 w_m}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w_m}{\partial y^4} = 0.$$

A_n^k - неопределенные коэффициенты. Для их определения используем метод Ритца [8]. Составляем функционал полной энергии плиты с защемленной точкой и действующей на нее сосредоточенной единичной силой. Этот функционал будет квадратичной функцией неопределенных коэффициентов A_n^k после интегрирования полной энергии по площади плиты Ω. Из условия минимума этого функционала определяются искомые коэффициенты в (4), которые будут зависеть от размеров плиты, ее жесткости и положения единичной силы. Доказано, что при этом автоматически удовлетворяются статические граничные условия на свободных краях плиты с защемленной точкой [8].

Получено для плиты:

$$A_{22}=\frac{Pb^2}{D}\,\frac{\dfrac{t^2}{b^2}-\dfrac{z^2}{b^2}+\dfrac{1}{16\pi}S_{22}^{A}}{\dfrac{16}{b^2}\left[bc+a(d-c)\right]\beta};\qquad B_{22}=\frac{Pb^2}{D}\,\frac{\dfrac{2tz}{b^2}-\dfrac{1}{16\pi}S_{22}^{B}}{\dfrac{16}{b^2}\left[bc+a(d-c)\right]\beta};$$

$$A_{31}=\frac{Pb^2}{D}\,\frac{\dfrac{t\left(t^2+z^2\right)}{b^3}-\dfrac{1}{16\pi}S_{31}^{A}}{\dfrac{16}{3b^4}\left[b^3c(16-3\beta)+bc^3\beta+a\left(d^3-c^3\right)\beta+a^3(c-d)(3\beta-16)\right]};$$

$$B_{31}=\frac{Pb^2}{D}\,\frac{\dfrac{z\left(t^2+z^2\right)}{b^3}-\dfrac{1}{16\pi}S_{31}^{B}}{\dfrac{16}{3b^4}\left[a^3(d-c)\beta+a\left(c^3-d^3\right)(3\beta-16)+bc^3(16-3\beta)+b^3c\beta\right]}.\qquad (5)$$

$$S_{22}^{A}=\frac{\beta}{b^2}\iint\limits_{\Omega}\frac{8(ty-xz)\left[ty+x(z-2y)\right]}{\left(x^2+y^2\right)\left[(t-x)^2+(y-z)^2\right]}dxdy;$$

$$S_{22}^{B}=\frac{\beta}{b^2}\iint\limits_{\Omega}\frac{8(ty-xz)\left[(t-x)x+y(y-z)\right]}{\left(x^2+y^2\right)\left[(t-x)^2+(y-z)^2\right]}dxdy;$$

$$S_{31}^{A}=\frac{8}{b^3}\iint\limits_{\Omega}\frac{-(y-z)(ty-xz)\beta+x\left[(t-x)^2+(y-z)^2\right](\beta-4)\ln\dfrac{x^2+y^2}{(t-x)^2+(y-z)^2}}{\left[(t-x)^2+(y-z)^2\right]}dxdy;$$

$$S_{31}^{A}=\frac{8}{b^3}\iint\limits_{\Omega}\frac{-(t-x)(ty-xz)\beta+y\left[(t-x)^2+(y-z)^2\right](\beta-4)\ln\dfrac{x^2+y^2}{(t-x)^2+(y-z)^2}}{\left[(t-x)^2+(y-z)^2\right]}dxdy.$$

В выражениях (5) интегрирование распространяется по всей площади плиты Ω. Поэтому (5) частично применимо для плит любой формы в плане, но постоянной цилиндрической жесткости D.

Сделаем одно существенное с точки зрения реализации указанного подхода замечание. При вычислении прогибов плиты с защемленной точкой от действия сосредоточенной силы мы будем ограничиваться искомым выражением для прогибов в виде суммы особого решения и первых четырех частных решений Клебша. Подчеркнем, что для определения интегральной величины как прогиб крестообразной плиты этого выражения вполне достаточно для получения требуемой точности. Однако для получения усилий в плите с защемленной точкой от действия внешней нагрузки этого числа решений Клебша явно недостаточно. Но нашей целью является определение именно прогибов плиты с защемленной точкой для определения коэффициентов канонических уравнений способа Б.Н. Жемочкина (1). В то же время снова подчеркнем, что первые четыре решения Клебша (4) соответствуют всем случаям симметричного и антисимметричного действия единичной силы на плиту.

Таким образом находятся коэффициенты при неизвестных усилиях в связях Б.Н. Жемочкина и свободные члены системы канонических уравнений (1).

результате решения системы определяются усилия в связях Б.Н. Жемочкина, а по ним – осадки плиты, численное дифференцирование которых позволяет определить усилия в плите.

РЕЗУЛЬТАТЫ

В качестве примера рассмотрим крестообразную плиту а = 6 м, b = 20 м, с = 6 м, d = 20 м; толщиной h = 1.2 м, лежащую на двухслойном основании [13] с характеристиками слоев:

$E_1 = 15 МПа$, $h_1 = 2м$, $\nu_1 = 0.3$; $E_2 = 25 МПа$, $\nu_2 = 0.25$, под действием равномерно распределенной нагрузки: $q = 100\ КН/м^2$.

При расчете плита разбивалась на 204 участка Б.Н. Жемочкина. На рис.2 представлены результаты расчетов по оси симметрии плиты для прогибов и реактивных давлений.

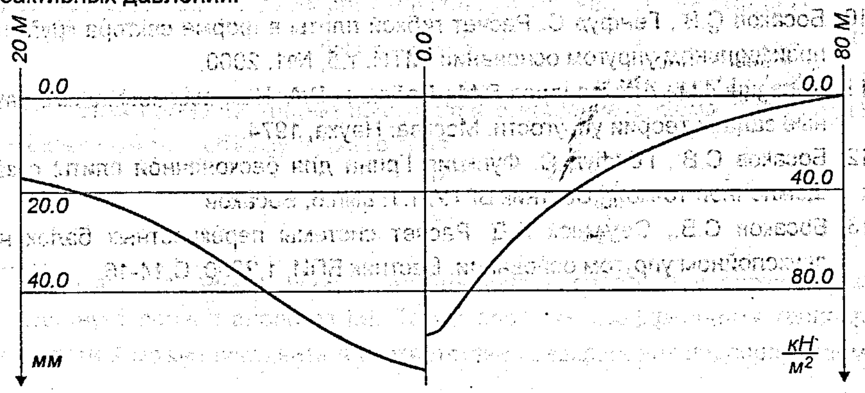

Рис.2. Распределение осадок (слева) и реактивных давлений (справа) по оси симметрии плиты.

ВЫВОДЫ

Предлагаемый подход по расчету плит на упругом основании позволяет рассчитывать плиты различной формы в плане на упругом основании любого типа при действии произвольной внешней нагрузки. При необходимости подход может быть легко обобщен для плит переменной жесткости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Горбунов-Посадов М. И., Маликова Т. А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. Москва: Стройиздат (1984).
2. Жемочкин Б. Н., Синицын А. П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. Москва: Стройиздат (1962)
3. Клубин П.И. Расчет балочных и круглых плит на упругом основании. Инженерный сборник, 12, 1952.
4. Дураев А.Е. Расчет методом конечных разностей прямоугольных плит, лежащих на грунтовом основании, модуль деформации которого изменяется с глубиной. ОФиМГ, 4, 1971. С.32-34.
5. Соломин В.И. Расчет прямоугольных плит на упругом полупространстве методом сеток. СМиРС, 6,1960. С.
6. Дураев А.Е. Расчет конструкций на упругом основании с возрастающим по глубине модулем деформации. Изд-во Морд. ун-та, 1991. 192с.
7. Программный Комплекс МИРАЖ. Руководство пользователя. Киев, 1994.
8. Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С. Пластинки и оболочки. Москва: Физматгиз, (1963)
9. Босаков С.В. К расчету прямоугольных плит на упругом основании. МТИ, т.5, №3, 2000.
10. Босаков С.В., Генфуд С. Расчет гибкой плиты в форме сектора круга на произвольном упругом основании. МТИ, т.5, №1, 2000.
11. Ворович И.И., Александров В.М., Бабешко В.А. Неклассические смешанные задачи теории упругости. Москва: Наука, 1974.
12. Босаков С.В., Генфуд С. Функция Грина для бесконечной плиты с защемленной точкой// Вестник БГТУ, т.1, вып.6, Босаков
13. Босаков С.В., Семенюк Я.Д. Расчет системы перекрестных балок на двухслойном упругом основании. Вестник БПИ, 1,2000. С.14-16.