



УДК 624.012

## KRZYWE INTERAKCJI $M - N$ W PRZEKROJACH ŻELBETOWYCH ELEMENTÓW ŚCISKANYCH WEDŁUG ZAŁOŻEŃ MODELU DEFORMACYJNEGO

**ŁAPKO Andrzej**  
Politechnika Białostocka

### WSTĘP

W obliczeniach stanów granicznych nośności elementów poddanych kombinacji podłużnej siły ściskającej  $N_{Sd}$  oraz momentu zginającego  $M_{Sd}$  (określonych według teorii I rzędu) stosuje się równoważne oddziaływanie powyższej siły podłużnej na mimośrodzie  $e_0$  uwzględniającym w słupach smukłych efekty II rzędu.

W Eurokodzie 2 [1] oraz w normach krajowych zharmonizowanych z EC 2 [2], [3] wprowadzono ogólną metodę obliczeń opartą na modelu odkształceniowym sformułowanym w oparciu o hipotezę płaskich przekrojów, z uwzględnieniem obliczeniowych związków  $\sigma - \epsilon$  dla betonu i stali zbrojeniowej. Założenia tego modelu w odniesieniu do granicznych wartości odkształceń w przekroju można znaleźć m.in. w pracach [4], [5].

W niniejszej pracy<sup>2)</sup> podano podstawowe związki opisujące krzywe interakcji nośności granicznej  $M_{Rd} - N_{Rd}$ , sformułowane na podstawie modelu deformacyjnego przekroju elementu ściskanego mimośrodowo. Podane rozwiązania tworzą algorytm postępowania przy sprawdzaniu nośności ściskanych elementów żelbe-

<sup>2)</sup> ŁAPKO Andrzej – d. t. n., profesor, prorektor Białostockiej Politechniki, RP

towych. Mogą być one, po odpowiednim rozbudowaniu, zastosowane do analizy nośności elementów sprężonych.

## 1. ZAŁOŻENIA OBLICZENIOWE

W oparciu o odkształcenia graniczne betonu i stali zbrojeniowej w analizie stanu granicznego nośności elementów ściskanych można wprowadzić podział na dwa podstawowe zakresy obliczeniowe związane z wartością mimośrodowość  $\epsilon_0$  działania siły podłużnej ściskającej [2]:

- **przypadek dużego mimośrodowość**, gdzie spełniony jest warunek zasięgu strefy ściskanej  $\xi$

$$\xi \leq \xi_{lim} \quad (1)$$

- **przypadek małego mimośrodowość**, gdzie spełniony jest warunek

$$\xi > \xi_{lim} \quad (2)$$

W obu przypadkach  $\xi_{lim}$  oznacza graniczną wysokość strefy ściskanej przekroju, wyznaczanej z prawa płaskich przekrojów według zależności

$$\xi_{lim} = \frac{0,0035}{0,0035 + f_{yd}/E_s} \quad (3)$$

gdzie:  $f_{yd}$  oraz  $E_s$  – oznaczają odpowiednio obliczeniową granicę plastyczności i moduł sprężystości stali zbrojeniowej.

Do analizy nośności granicznej zaleca się wykorzystywać paraboliczno – prostokątną zależność  $\sigma - \epsilon$  dla betonu i bilinearny wykres naprężeń w zbrojeniu (przy założeniu poziomej półki plastycznej) [2]. W metodzie ogólnej analizy przekrojów obciążonych momentem zginającym i siłą podłużną nośność wygodnie jest rozpatrywać w kilku zakresach, związanych z odkształceniami granicznymi w betonie i stali zbrojeniowej [5]. Klasyfikację zakresów odkształceń w funkcji zasięgu strefy ściskanej dla ogólnego przypadku obciążenia elementu mimośrodowo ściskanego pokazano schematycznie na rys.1, natomiast przedziały odkształceń w betonie i stali zbrojeniowej w poszczególnych zakresach zestawiono w tabl. 1.

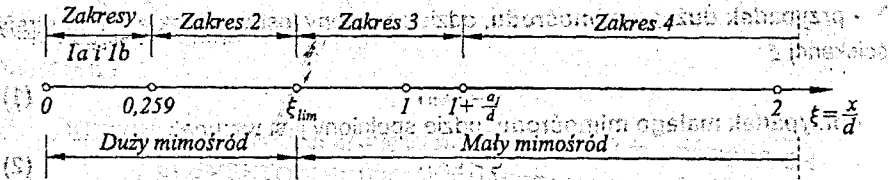
**Tablica 1**

Zakresy odkształceń w betonie i stali zgodne z założeniami modelu odkształceniowego

Zakres odkształceń /symbol/	Przedziały odkształceń [ $\ddot{a}$ ]		Uwagi
	$\epsilon_{s1}$ w zbrojeniu $A_{s1}$	$\epsilon_c$ w betonie ściskanym	
<b>1</b>	<b>2</b>	<b>3</b>	<b>4</b>
1a	$\epsilon_{s1} = 10,0 \ddot{a}$	$\epsilon_c < 2,0$	Duży mimośród

**Tablica 1 (zakążczenie)**

1	2	3	4
1b	$\epsilon_{s1} = 10,0 \%$	$2,0 \leq \epsilon_c < 3,5$	Duży mimośród
2	$\epsilon_{sy} \leq \epsilon_{s1} < 10,0 \%$	$\epsilon_c = 3,5 \%$	
3a	$0 \leq \epsilon_{s1} < \epsilon_{sy}$	$\epsilon_c = 3,5 \%$	Mały mimośród
3b	$\epsilon_{s1} < 0$	$\epsilon_c = 3,5 \%$	
4	$-2 \%$ $\leq \epsilon_{s1} < 0$	$2 \%$ $\leq \epsilon_c < 3,5 \%$	



**Rys. 1.** Zasięg strefy ściskanej w zakresach obliczeniowych w przypadku dużego i małego mimośrodu, (oznaczenia zgodne z konwencją przyjętą w Eurokodzie 2)

## 2. OKREŚLANIE NOŚNOŚCI PRZEKROJU MIMOŚRODOWO ŚCISKANEGO - WYKRESY INTERAKCJI

W wybranym przekroju prostokątnym elementu ściskanego o zadanych wymiarach  $b \times h$  i znanym zbrojeniu  $A_{s1}$  oraz  $A_{s2}$  (znanych cechach wytrzymałości betonu i stali zbrojeniowej), sprawdzanie nośności wymaga rozpatrzenia możliwych do wystąpienia kombinacji momentu zginającego  $M_{Sd}$  i siły podłużnej  $N_{Sd}$ .

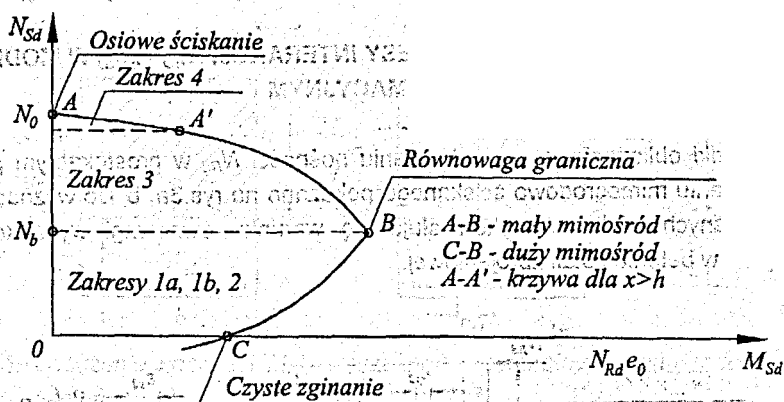
Postępowanie obliczeniowe może dotyczyć następujących przypadków:

- zadany jest mimośród całkowity momentu i siły podłużnej i niezbędne jest określenie nośności  $N_{Rd}$  lub  $M_{Rd}$ ,
- zadany jest moment zginający  $M_{Sd}$  i zachodzi potrzeba określenia nośności  $N_{Rd}$ ,
- zadana jest siła podłużna  $N_{Sd}$ , należy określić nośność  $M_{Rd}$ .

W obliczeniach tych przypadków projektowania należy wykorzystywać równania równowagi sił przekrojowych i momentów zginających z jednoczesnym spełnieniem warunków zgodności odkształceń ze stanem naprężeń wywołanych przez obciążenie. Ogólne rozwiązania, nawet dla przekroju prostokątnego mają jednak bardzo rozbudowaną postać, stąd są mało przydatne w obliczeniach inżynierskich.

Kombinacje wartości siły  $N_{sd}$  oraz momentu  $M_{sd}$  wywołujących stan graniczny nośności rozpatrywanego przekroju, mogą być analizowane poprzez wykresy interakcji. Przykładowy schemat takiego wykresu dla przekroju dowolnego pokazano na rys. 2.

Wykres interakcji zbudowany jest z dwu krzywych: A – B oraz B – C, które przecinają się w punkcie B. Punkt ten jest wyznaczony poprzez określenie nośności granicznej  $N_{Rd}$  oraz  $M_{Rd}$  dla granicznego zasięgu strefy ściskanej  $\xi = \xi_{lim}$ , gdzie  $\xi_{lim}$  jest określone z zależności (3):



Rys. 2. Schematyczny wykres interakcji momentu i siły podłużnej w przekroju ściskanym mimośrodowo

Dowolna kombinacja obciążenia w punktach leżących na krzywej B – C wskazuje na przypadki obliczeniowe dużego mimośrodu (mechanizm zniszczenia elementu poprzez zbrojenie w strefie rozciąganej). Kombinacje obciążenia dające na wykresie punkty położone na krzywej A – B wskazują na przypadki obliczeniowe małego mimośrodu (mechanizm zniszczenia poprzez wyczerpanie nośności betonu w strefie ściskanej). Punkty położone wewnątrz obszaru ograniczonego krzywymi A – B i B – C należy rozpatrywać jako przypadki obliczeniowe obciążeń, dla których nośność przekroju nie zostaje osiągnięta. Natomiast kombinacje obciążenia wyznaczające punkty położone na zewnątrz obszaru ograniczonego krzywymi nie mogą być rozpatrywane w ujęciu założeń wynikających z Eurokodu 2.

Wykres interakcji dla rozpatrywanego przekroju prostokątnego ściskanego mimośrodowo może być sporządzony metodą kolejnego określania nośności  $N_{Rd}$  oraz  $M_{Rd}$ . Poniżej podano zależności pozwalające obliczać poszczególne punkty wykresu interakcji metodą analityczną. Poszukiwaną nośność  $N_{Rd}$  określimy z

równania sumy rzutów sił wewnętrznych na oś podłużną elementu ściskanego natomiast nośność  $M_{Rd}$  może być obliczona z sumy momentów względem środka ciężkości przekroju. Zapisujemy odpowiednio

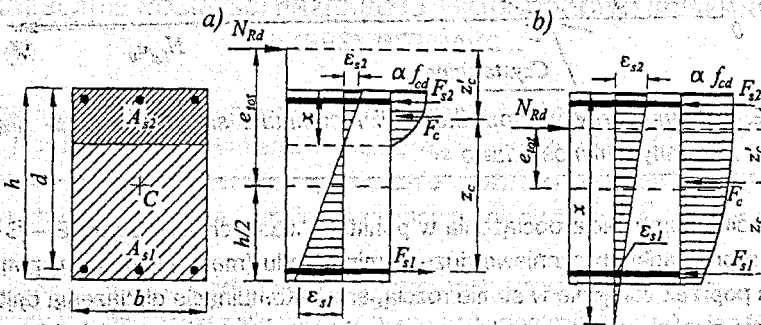
$$N_{Rd} = N_{Sd} = \omega db \alpha f_{cd} + A_{s2} \sigma_{s2} \pm A_{s1} \sigma_{s1}, \quad (4)$$

$$M_{Rd} = \omega db \alpha f_{cd} \left( \zeta d - \frac{h}{2} + a_1 \right) + A_{s2} \left( \frac{h}{2} - a_2 \right) \sigma_{s2} + A_{s1} \left( \frac{h}{2} - a_1 \right) \sigma_{s1} \quad (5)$$

gdzie:  $\omega$  oraz  $\zeta$  są funkcjami położenia osi obojętnej przekroju  $\xi$ ,  $\sigma_{s1}$  oraz  $\sigma_{s2}$  są naprężeniami w zbrojeniu, odpowiednio  $A_{s1}$  oraz  $A_{s2}$ ,  $a_1$ ,  $a_2$  – odległości od krawędzi przekroju do środka ciężkości zbrojenia  $A_{s1}$  i  $A_{s2}$ .

### 3. RÓWNANIA OPISUJĄCE WYKRESY INTERAKCJI $N_{RD}$ - $M_{RD}$ W MODELU DEFORMACYJNYM

Przypadki obliczeniowe przy określaniu nośności  $N_{Rd}$  w prostokątnym przekroju elementu mimośrodowo ściskanego pokazano na rys.3a, b. Do wyznaczenia poszukiwanych wielkości wykorzystuje się warunki równowagi wypadkowych naprężeń w betonie i stali zbrojeniowej.



Rys. 3. Przypadki obliczeniowe przy określaniu nośności  $N_{Rd}$  w przekroju ściskanym

#### 3.1. Zakres odkształceń 2

Nośności graniczne  $N_{Rd}$  i  $M_{Rd}$  można obliczyć z równań (4) i (5) podstawiając odpowiednie wyrażenia na funkcje  $\omega$  oraz  $\zeta$ . Wyprowadzenie tych funkcji podano m. in. w pracy [5]. Naprężenia  $\sigma_{s1}$  w zbrojeniu rozciągającym  $A_{s1}$  w zakresie 2. przyjmują wartość  $f_{yd}$ . Oznacza to, że zbrojenie to jest w pełni wykorzystane. Nośność  $N_{Rd}$  zapisujemy

$$N_{Rd} = N_{Sd} = \frac{17}{21} \xi db \alpha f_{cd} + A_{s2} \sigma_{s2} - A_{s1} f_{yd} \quad (6)$$

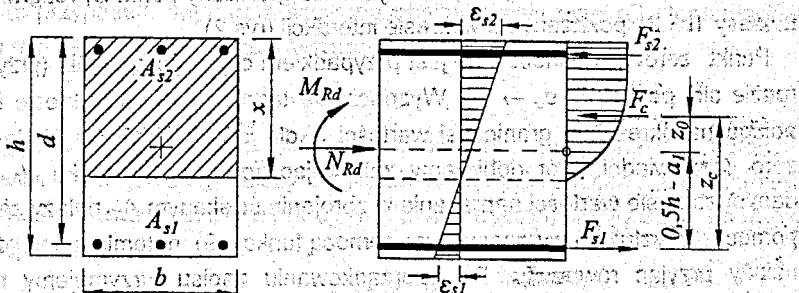
gdzie naprężenie  $\sigma_{s2}$  w zbrojeniu ściskającym określa się z prostej zależności

$$\sigma_{s2} = \varepsilon_{s2} E_s,$$

obliczając odkształcenie  $\varepsilon_{s2}$  ustalone z zasady płaskich przekrojów

$$\frac{0,0035}{\xi d} = \frac{\varepsilon_{s2}}{\xi d - a_2} \rightarrow \varepsilon_{s2} = 0,0035 \frac{\xi - a_2 / d}{\xi} \leq \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (7)$$

Zasadę obliczenia nośności granicznej  $M_{Rd}$  w przekroju mimośrodkowo ściskającym według modelu deformacyjnego pokazano na rys. 4.



Rys. 4. Obliczenie nośności  $M_{Rd}$  w przekroju prostokątnym mimośrodkowo ściskającym

Nośność graniczną  $M_{Rd}$  w zakresie odkształceń 2. oblicza się z wzoru

$$M_{Rd} = \frac{17}{21} \xi \left[ \left( 1 - \frac{99}{238} \xi \right) d - \frac{h}{2} + a_j \right] db \alpha f_{cd} + A_{s2} \left( \frac{h}{2} - a_2 \right) \sigma_{s2} + A_{s1} \left( \frac{h}{2} - a_j \right) f_{yd} \quad (8)$$

Punkt B równowagi granicznej na wykresie interakcji otrzymamy podstawiając do powyższych równań  $\xi = \xi_{lim}$ .

### 3.2. Zakres odkształceń 1b

Dla tego zakresu maksymalny zasięg strefy ściskanej (rys.1) wynosi:  $\xi \leq 0,259$ . Ponieważ wartość ta jest mniejsza od granicznej wartości  $\xi_{lim}$ , naprężenia w zbrojeniu  $A_{s1}$  są równe  $f_{yd}$ . (podobnie jak w zakresie odkształceń 2.). Naprężenia w zbrojeniu  $A_{s2}$  można obliczyć na podstawie odkształceń  $\varepsilon_{s2}$ , ustalonych jak poprzednio z zasady płaskich przekrojów (rys.3).

$$\frac{0,010}{d - \xi d} = \frac{\varepsilon_{s2}}{\xi d - a_2} \rightarrow \varepsilon_{s2} = 0,01 \frac{\xi - a_2 / d}{\xi} \leq \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (9)$$

Wykorzystując wyrażenie na funkcje  $\omega$  i  $\zeta$  określone w pracy [5] dla zakresu odkształceń 1b otrzymujemy zapis równań określających budowę wykresów interakcji

$$N_{Rd} = N_{Sd} = \left( \frac{16\xi - 1}{15} \right) db a f_{cd} + A_{s2} \sigma_{s2} - A_{s1} f_{yd} \quad (10)$$

$$M_{Rd} = \left( \frac{16\xi - 1}{15} \right) \left[ \left( 1 - \frac{8,55\xi^2 - 1,1\xi + 0,05}{16\xi - 1} \right) d - \frac{h}{2} + a_1 \right] db a f_{cd} + A_{s2} \left( \frac{h}{2} - a_2 \right) \sigma_{s2} + A_{s1} \left( \frac{h}{2} - a_1 \right) f_{yd} \quad (11)$$

Podstawienie wartości  $\xi = 0,259$  wyznacza graniczny punkt B<sub>1</sub> rozgraniczający zakresy 1b i 2, pokazany na wykresie interakcji (rys.2).

Punkt zerowej nośności  $N_{Rd}$  jest przypadkiem czystego zginania (przy mimośrodku sily podłużnej  $e_0 \rightarrow \infty$ ). Wyznaczenie tego punktu na wykresie interakcji polega na określeniu granicznej wartości  $\xi$ , dla której wyrażenie (4) jest równe zero. Odpowiedni wzór dobieramy zakładając spełnienie warunku  $N_{Rd} = 0$ . W danym zakresie wartości naprężenie w zbrojeniu ściskanym  $A_{s2}$  należy zapisać za pomocą odkształceń wyrażonych za pomocą funkcji (9), natomiast naprężenia  $\sigma_{s2}$  należy przyjąć równe  $f_{yd}$ . Po uporządkowaniu zapisu otrzymujemy równanie kwadratowe ze względu na  $\xi$ , którego rozwiązanie pozwala obliczyć poszukiwaną nośność  $M_{Rd}$  ze wzoru (5). Wartość ta wyznacza punkt C na wykresie interakcji (rys.2).

### 3.3. Zakres odkształceń 3a i 3b

W tym zakresie odkształceń (tabl.1) funkcje pomocnicze  $\omega$  i  $\zeta$  zapisane są identycznie jak w zakresie 2, dlatego też do określenia nośności granicznych  $N_{Rd}$  i  $M_{Rd}$  możemy wykorzystać wyrażenia (6) i (7), z odpowiednią korektą naprężeń w zbrojeniu.

Ponieważ w zakresie 3a spełniony jest warunek:  $1 \geq \xi \geq \xi_{lim}$  ustalamy, że naprężenia w zbrojeniu  $A_{s2}$  są równe granicy plastyczności. Natomiast z definicji zakresu 3a (tabl.1) naprężenia w zbrojeniu  $A_{s1}$  wyrazić należy w funkcji odkształceń następująco

$$\epsilon_{s1} = \frac{0,0035(1 - \xi)}{\xi} \quad (12)$$

W zakresie odkształceń 3b spełniony jest warunek  $\beta_h \geq \xi \geq 1$ , gdzie  $\beta_h = h/d = 1 + a_1/d$ . W tym przypadku odkształcenia zbrojenia  $A_{s1}$  zmieniają znak na ujemny

(ściskanie). Do wyznaczenia odkształceń  $\varepsilon_{s1}$  nadal obowiązuje wzór (10). Zatem wykres interakcji w zakresie 3a i 3b opisują równania

$$N_{Rd} = N_{Sd} = \frac{17}{21} \xi db \alpha f_{cd} + A_{s2} f_{yd} \pm A_{s1} \sigma_{s1}, \quad (13)$$

$$M_{Rd} = \frac{17}{21} \xi \left[ \left( 1 - \frac{99}{238} \xi \right) d - \frac{h}{2} + a_1 \right] db \alpha f_{cd} + A_{s2} \left( \frac{h}{2} - a_2 \right) f_{yd} \pm A_{s1} \left( \frac{h}{2} - a_1 \right) \sigma_{s1}. \quad (14)$$

Powyższe wartości wyznaczają punkt  $A_2$  na wykresie interakcji (rys.2).

### 3.4. Zakres odkształceń 4

Jest to przypadek, gdy strefa ściskana obejmuje cały przekrój elementu ściskanego mimośrodowo. Powyższy warunek można zapisać

$$x \geq h \text{ oraz } \xi \geq \beta_h = 1 + \frac{a_1}{d}$$

Naprężenia  $\sigma_{s2}$  w zbrojeniu  $A_{s2}$  jak poprzednio są równe  $f_{yd}$ , natomiast naprężenia w zbrojeniu  $A_{s1}$  należy ustalić obliczając odkształcenia tego zbrojenia na podstawie prawa płaskich przekrojów. Można posłużyć się wyrażeniem danym w pracy [5]

$$\varepsilon_{s1} = -0,001 \frac{14(\xi - 1)}{7\xi - 3\beta_h}. \quad (15)$$

Do obliczenia nośności jak poprzednio wykorzystujemy wyrażenia (4) i (5). Zapis ogólny jest w tym zakresie bardziej złożony, z uwagi na rozbudowaną formę funkcji  $\omega$  i  $\zeta$  zależnych zarówno od  $\xi$  oraz  $\beta_h$ . Na podstawie pracy [5] zapisujemy

$$N_{Rd} = \left\{ \frac{2}{3} \left[ \xi + \frac{3}{14} \beta_h - (\xi - \beta_h)^2 \left( \xi - \frac{1}{7} \beta_h \right) / \left( \xi - \frac{3}{7} \beta_h \right)^2 \right] \right\} db \alpha f_{cd} + A_{s2} f_{yd} - A_{s1} \sigma_{s2} \quad (16)$$

$$M_{Rd} = \left\{ \frac{3}{7} \beta_h \left( 1 - \frac{3}{14} \beta_h \right) + \frac{2}{3} \left( \xi - \frac{3}{7} \beta_h \right) \left( 1 - \frac{15}{56} \beta_h - \frac{3}{8} \xi \right) + \frac{7}{12} [8(\xi - 1)(7\xi - \beta_h) - (\xi - \beta_h)(35\xi - 3\beta_h)] \frac{(\xi - \beta_h)^2}{(7\xi - 3\beta_h)^2} \right\} d^2 b \alpha f_{cd} +$$

$$- \frac{2}{3} \left( \frac{h}{2} - a_1 \right) \left[ \xi + \frac{3}{14} \beta_h - (\xi - \beta_h)^2 \left( \xi - \frac{1}{7} \beta_h \right) / \left( \xi - \frac{3}{7} \beta_h \right)^2 \right] db \alpha f_{cd} +$$

$$+ A_{s2} \left( \frac{h}{2} - a_2 \right) f_{yd} - A_{s1} \left( \frac{h}{2} - a_1 \right) \sigma_{s1} \quad (17)$$

Obliczone wartości wyznaczają punkt  $A_3$  na wykresie interakcji danym na rys.2.

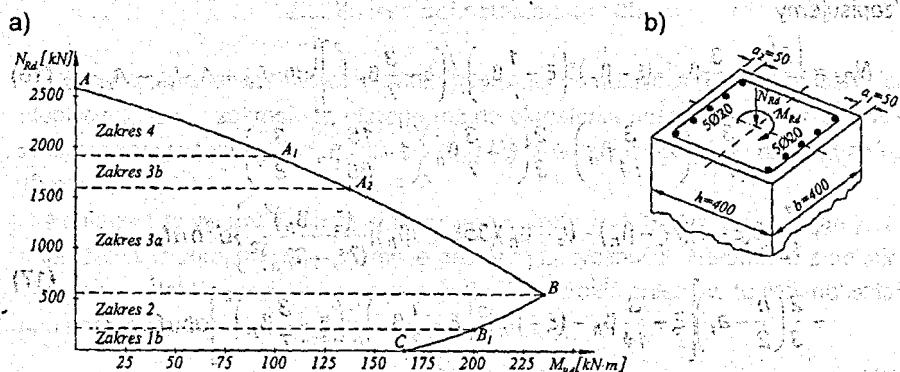


Punkt wykresu interakcji przy  $e \rightarrow 0$  jest teoretycznym przypadkiem osiowego ściskania. W ujęciu metody obliczeń opartej na modelu deformacyjnym odpowiada to przypadkowi  $\xi \rightarrow \infty$ . Dla tego przypadku nośność  $M_{Rd} \rightarrow 0$ , natomiast nośność  $N_{Rd}$  można obliczyć ze wzoru (16) podstawiając możliwie dużą wartość  $\xi$  (np.  $\xi = 100$ ) oraz przyjmując naprężenia w zbrojeniu  $\sigma_{s2} = \sigma_{s1} = f_{yd}$ . Określona w ten sposób nośność wyznacza punkt A na wykresie interakcji (punkt na osi rzędnych).

#### 4. PRZYKŁAD OBLICZENIOWY

Opracowano przykładowy wykres interakcji elementu mimośrodowo ściskanego o przekroju prostokątnym. Wymiary przekroju oraz układ zbrojenia pokazano na rys.5b. Założono, że beton jest klasy B20 ( $f_{cd} = 10,60$  MPa) oraz stal klasy A-III ( $f_{yd} = 350$  MPa) wg [2]. Zgodnie z założeniami Eurokodu 2 i norm krajowych [2], [3] obliczono dopuszczalne zakresy nośności granicznych  $N_{Rd}$  i  $M_{Rd}$  oraz odpowiadające im rzędne wykresu interakcji.

Obliczenia przeprowadzono dla kilku charakterystycznych punktów wykresu leżących na granicy między zakresami odkształceń obowiązującymi w modelu deformacyjnym. Przy obliczaniu rzędnej punktu na wykresie (nośność przekroju  $N_{Rd}$ ) oraz odciętej punktu interakcji (nośność przekroju  $M_{Rd}$ ) wykorzystano zależności wyprowadzone w p.3 niniejszej pracy. Wykonany na tej podstawie wykres interakcji  $M - N$  pokazano na rys.5a.



Rys. 5. Przykładowy wykres interakcji dla przekroju elementu mimośrodowo ściskanego o rzędnych obliczonych na podstawie modelu deformacyjnego

## PODSUMOWANIE

Równania krzywych interakcji wyprowadzone dla pryzmatycznego elementu ściskanego mimośrodowo na podstawie założeń wynikających z podanego w Eurokodzie 2 modelu deformacyjnego umożliwiają analizę wzajemnie dopuszczalnych przedziałów nośności granicznej momentu zginającego i siły podłużnej w przekroju. Wyprowadzone zależności w funkcji zasięgu strefy ściskanej przekroju dają się łatwo algorytmizować i rozwiązywać analitycznie metodą kolejnych podstawień lub przy użyciu wspomaganie komputerowego.

## LITERATURA

1. prEN 1992-1(1<sup>st</sup> draft). Eurokode 2. Design of Concrete Structures – Part 1: General Rules and rules for buildings. CEN. Brussels, December 1999.
2. PN-B-03264:1999. Konstrukcje betonowe, żelbetowe i sprężone. Obliczenia statyczne i projektowanie. PKN, Warszawa, styczeń 1999.
3. SNB 2.06.01- 97. Stroitielnyje Normy Respubliki Bieloruś. Konstrukciji Betonnyje i Żelezobetonnyje. Normy projektowaniija. (Projekt), Minsk 1997.
4. Podstawy projektowania konstrukcji żelbetowych i sprężonych według Eurokodu 2. Praca zbiorowa pod red. *M. Knauffa*. Raport Projektu KBN. T. I + III, Warszawa, 1997.
5. Łapko A.: Projektowanie konstrukcji żelbetowych. Wyd. Arkady, Warszawa, 2000 (w druku).