Список цитированных источников

1. Wolfram Web Resources [Electronic resource] / ed. S. Wolfram. – Champaign, 2011. – Mode of access: www.wolfram.com.
2. Heikii Ruskieaa Mathematica Navigator Mathematics, Statistics and Graphics. – Elsevier Inc., 2009. – 1112 p.

УДК 519.6:517.9:532.63

ЧИСЛЕННОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ КАПИЛЛЯРНОЙ ГИДРОСТАТИКИ О РАВНОВЕСНЫХ ФОРМАХ ЖИДКОСТИ, ВЫДАВЛИВАЕМОЙ ИЗ КАПИЛЛЯРА

Волотовская Ю.Н.
УО «Гомельский государственный университет им. Ф. Скорины», г. Гомель
Научный руководитель – Полевиков В.К., к. ф.- м. н., доцент

Задачи с нерегулярными условиями на границе занимают важное место в гидромеханике невесомости. Например, численное моделирование процесса выращивания монокристаллов, как и решение многих других прикладных задач гидромеханики невесомости, требует определения равновесных форм свободной поверхности с нерегулярными условиями на границе, при которых свободная поверхность опирается на линию излома твердой стенки [1]. Такие задачи ранее численно не решались, лишь некоторые подходы предложены в [2].

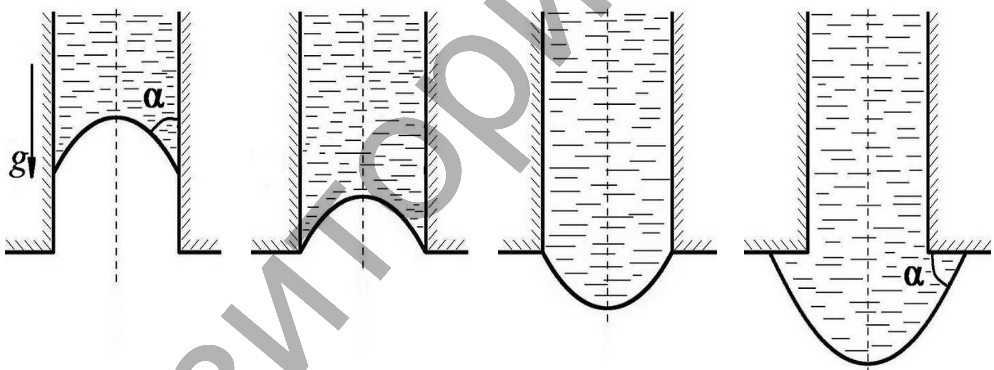

Рисунок 1 – Иллюстрация эволюции свободной поверхности

Данная работа посвящена численному моделированию равновесных капиллярных поверхностей с нерегулярными условиями контакта в случае классической задачи капиллярной гидростатики – о квазистатическом процессе медленного выдавливания жидкости из вертикального цилиндрического капилляра, примыкающего к плоской торцевой стенке [1]. Характерные стадии эволюции свободной поверхности показаны на рисунке 1.

Пусть R_0 – радиус капилляра; V – объем жидкости; α – угол смачивания. Радиус R_0 примем за единицу длины и сформулируем осесимметричную задачу о равновесной форме свободной поверхности жидкости в безразмерных переменных. Для этого введем безразмерные цилиндрические координаты z и r так, чтобы ось z совпала с осью симметрии капилляра, и направим её против вектора ускорения свободного падения g. Выберем начало координат на плоской горизонтальной пластине, а именно – в центре основания капилляра. Обозначим через s безразмерную длину дуги искомой равновесной линии, изменяющуюся от $s = 0$ в точке контакта меридиана с плоскостью $r = 0$ до $s = L$ в точке контакта меридиана с плоскостью $z = 0$ или твердой стенкой капилляра.

В предположении осевой симметрии конфигурация свободной поверхности описывается некоторой парой параметрических функций $r(s)$, $z(s)$, которые в условиях равновесия и присутствия силы тяжести удовлетворяют параметрическим уравнениям [1]:

$$\begin{aligned} &z'' = r'F, \quad r'' = -z'F, \quad 0 \le s \le L, \\ &F = -Boz - z'/r + C, \end{aligned} \tag{1}$$

где производные берутся по переменной s; $Bo = \rho g R_0^2 / \sigma$ – число Бонда; C – неопределенная пока константа; ρ – плотность жидкости; σ – коэффициент поверхностного натяжения.

Система дифференциальных уравнений (1) дополняется краевыми условиями симметрии на оси капилляра

$$r(0) = 0, \quad r'(0) = 1, \quad z'(0) = 0, \tag{2}$$

и краевыми условиями контакта с твердой стенкой в зависимости от положения свободной поверхности жидкости:

а) $$r(L) = 1, \quad r'(L) = \sin\alpha, \quad z'(L) = -\cos\alpha, \tag{3}$$

если точка контакта находится внутри капилляра;

б) $$r(L) = 1, \quad z(L) = 0, \tag{4}$$

если точка контакта закреплена на основании капилляра;

в) $$z(L) = 0, \quad r'(L) = \cos\alpha, \quad z'(L) = \sin\alpha, \tag{5}$$

если точка контакта находится на горизонтальной поверхности пластины.

Безразмерный объем жидкости определим как объем тела вращения

$$U = -2\pi \int_0^L z r r' ds, \text{ где } U = V / R_0^3. \tag{6}$$

Таким образом, задача разбивается на три подзадачи в зависимости от точки контакта свободной поверхности с твердой стенкой.

Следуя стратегии в [2], для получения явной формулы вычисления безразмерной длины L в процессе итерационного решения нелинейной задачи, сформулируем подзадачу (1), (2), (4), (6) в новых переменных

$$\bar{s} = s/L \in [0, 1], \ \bar{z} = z/L, \ \bar{r} = r/L.$$

Введем в рассмотрение новое неизвестное $\beta(\bar{s})$ – угол между касательной к равновесной линии $\bar{r}(\bar{s})$, $\bar{z}(\bar{s})$ и осью $O\bar{r}$. В силу того, что $\bar{r}' = \cos\beta$, $\bar{z}' = \sin\beta$ подзадача (1), (2), (4), (6) примет вид

$$\begin{aligned} &\beta' = \Phi, \quad \beta(0) = 0, \quad \beta(1) = \gamma, \\ &\bar{r}' = \cos\beta, \quad \bar{r}(0) = 0, \quad \bar{r}(1) = 1/L, \quad \bar{z}' = \sin\beta, \quad \bar{z}(1) = 0, \end{aligned} \tag{7}$$

где $\Phi = \Phi(\beta, \bar{r}, \bar{z}, L, C) = -BoL^2\bar{z} - \sin\beta/\bar{r} + C$, $\alpha - \pi/2 \le \gamma \le \alpha$ – свободный параметр, $C = L(2\sin\gamma - BoU/\pi)$, $U = -2\pi L^3 \int_0^1 \bar{z}\bar{r} \cos\beta d\bar{s}$.

На равномерной сетке $\{\bar{s}_i = ih \mid i = \overline{0, N}, h = 1/N\}$ для подзадачи (7) построим разностную схему второго порядка аппроксимации

$$
\begin{aligned}
&(\beta_i - \beta_{i-1})/h = \Phi_{i-1/2}, \quad \Phi_{i-1/2} = \Phi(\beta_{i-1/2}, \bar r_{i-1/2}, \bar z_{i-1/2}, L, C),\\
&(\bar r_i - \bar r_{i-1})/h = \cos\beta_{i-1/2}, \quad (\bar z_i - \bar z_{i-1})/h = \sin\beta_{i-1/2}, \quad i = \overline{1, N},\\
&\beta_{i-1/2} = (\beta_{i-1} + \beta_i)/2, \quad \bar r_{i-1/2} = (\bar r_{i-1} + \bar r_i)/2, \quad \bar z_{i-1/2} = (\bar z_{i-1} + \bar z_i)/2,\\
&\beta_0 = 0, \quad \beta_N = \gamma, \quad \bar r_0 = 0, \quad \bar z_N = 0,\\
&L = 1/\bar r_N, \quad U = -2\pi L^3 h \sum_{i=1}^{N-1} \bar z_i \bar r_i \cos\beta_i, \quad C = L(2\sin\gamma - BoU/\pi).
\end{aligned}
$$

Тогда итерационный алгоритм для вычисления координат свободной поверхности построим в виде [2]

$$
\begin{aligned}
&\beta_i^{n+1} = \beta_{i+1}^{n+1} - h\Phi_{i+1/2}^n + (1-\tau)(\beta_i^n - \beta_{i+1}^n + h\Phi_{i+1/2}^n),\\
&i = N-1, N-2, \ldots, 1, \quad \beta_N^{n+1} = \gamma, \quad \beta_0^{n+1} = 0,
\end{aligned} \tag{8}
$$

$$
\bar r_i^{n+1} = \bar r_{i-1}^{n+1} + h\cos\beta_{i-1/2}^{n+1}, \quad i = \overline{1, N}, \quad \bar r_0^{n+1} = 0, \tag{9}
$$

$$
\bar z_i^{n+1} = \bar z_{i+1}^{n+1} - h\sin\beta_{i+1/2}^{n+1}, \quad i = N-1, \ldots, 0, \quad \bar z_N^{n+1} = 0, \tag{10}
$$

где $n = 0, 1, 2, \ldots$ – номер итерации, $\tau > 0$ – параметр релаксации.

Вычисления на каждой итерации осуществляются прямыми алгоритмами бегущего счета. Сначала по рекуррентному правилу (8) вычисляются сеточные значения β_i^{n+1}. Затем при помощи процедур (9) и (10) определяются новые итерационные приближения для координат свободной поверхности. И, наконец, по найденным значениям $\bar r_i^{n+1}$, $\bar z_i^{n+1}$, β_i^{n+1} вычисляются L^{n+1}, U^{n+1}, C^{n+1}, $\Phi_{i+1/2}^{n+1}$. Итерационный процесс продолжается до тех пор, пока невязка разностного уравнения (8) на n-ой итерации не будет удовлетворять условию

$$
\max_{0<i<N} \left| (\beta_{i+1}^n - \beta_i^n)/h - \Phi_{i+1/2}^n \right| \le \varepsilon .
$$

Расчеты осуществлялись для *h = 1/100*, $\varepsilon = 10^{-4}$, $Bo = 1$. Получен широкий спектр равновесных форм свободной поверхности для различных углов смачивания, проведено численное исследование устойчивости равновесных форм свободной поверхности жидкости. На рис. 2 построена зависимость, отражающая влияние угла смачивания на критический объем жидкости, при котором наступает кризис равновесия в виде отрыва порции жидкости от пластины. Полученные значения согласуются с теоретическими результатами линейной теории устойчивости [1].

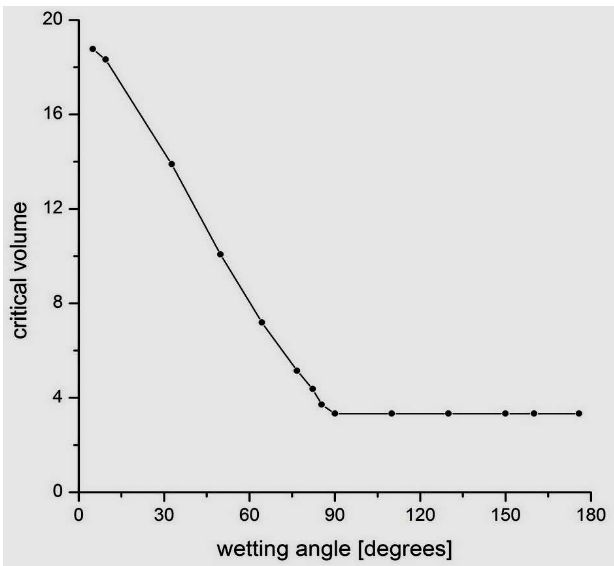

Рисунок 2 – Влияние угла смачивания на критический объем жидкости

Список цитированных источников

1. Методы решения задач гидромеханики для условий невесомости / А. Д. Мышкис [и др.]; под ред. А. Д. Мышкиса. – Киев: Наукова думка, 1992. – 592 с.

2. Polevikov, V. K. Methods for numerical modeling of two-dimensional capillary surfaces / V. K. Polevikov // Computational Methods in Applied Mathematics. – 2004. – Vol. 4, № 1. – P. 66-93.