УДК 519.948

НЕЛОКАЛЬНЫЙ ВАРИАНТ МЕТОДА МИНИМАЛЬНЫХ НЕВЯЗОК ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Гречко О.Г., Ершова Е.П.
УО «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», г. Брест
Научный руководитель – Мадорский В.М., к. ф.- м. н., доцент

Для решения нелинейных уравнений вида:

$$F(x) = f(x) + g(x) = 0; \tag{1}$$

$f(D \subset R^m \to R^m)$, $g(D \subset R^m \to R^m)$, $f \in C_D^2, g \in C_D$;

Применим нелокальный вариант метода минимальных невязок. В результате получим нелинейную систему *F(x)*, состоящую из m нелинейных уравнений. Полученную систему решим с помощью нелокального варианта метода Канторовича-Красносельского.

Рассмотрим алгоритм решения:

<u>Шаг 1.</u> Находится очередное приближение по формуле

$$x_{n+1} = x_n - \beta_n \frac{\overline{f'}(x_n) f(x_n)}{\|\overline{f'}(x_n) f(x_n)\|^2} \left(\|f(x_n)\|^2 + \beta_{n-1}\|g(x_n)\|^2\right); \tag{2}$$

<u>Шаг 2.</u> Проверяется выполнение условия $\|F(x_{n+1})\| < \varepsilon$, где ε-малая величина (параметр останова). Если условие выполняется, то конец просчетов, иначе

<u>Шаг 3.</u> Производится пересчет шаговой длины по формуле

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\beta_n(\|f(x_n)\|^2 + \beta_{n-1}\|g(x_n)\|^2)}{(\|f(x_{n+1})\|^2 + \beta_n\|g(x_{n+1})\|^2)}\right), \beta_0 \in [10^{-4}, 10^{-1}], \qquad \beta_{-1} = \beta_0; \tag{3}$$

и переход на шаг 1.

Пусть выполняются соотношения:

$$\|f''(x)\| \le K, \|\beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_n)\| \le \beta_n L\|x_{n+1} - x_n\|, \|f(x_n)\|^{-1} \le B.$$

Теорема:

Пусть в области $D = \bar{S}\left(\frac{B\|f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0)\|}{1 - q_0}\right)$ существует x^* – решение уравнения (1), операторы f и g удовлетворяют перечисленным выше условиям, начальное приближение x_0 и шаговые длины β_{-1}, β_0 таковы, что

$\varepsilon_0 = \beta_0(KB + LB^2)\|f(x_0) + \beta_{-1}g(x_0)\| < 1.$

Тогда алгоритм (2) – (3) со сверхлинейной (локально с квадратичной) скоростью сходится к x^*.

Доказательство:

Доказательство этой теоремы связано с громоздкими преобразованиями, и его можно посмотреть в используемой нами литературе. Поэтому рассмотрим лишь этапы этого доказательства:

1) Доказывается релаксационность процесса (2) – (3):
$\|f(x_{n+1})\| \le q_n\|f(x_n)\|, 0 < q_n < 1, n = 0,1,\dots$;
2) Показывается, что последовательность $\{\beta_n\} \nearrow 1, \{q_n\} \searrow 0$ при $n \to \infty$;
3) Проводится доказательство того, что $\lim\limits_{n\to\infty}\|f(x_n)\| = 0,$ следовательно, последовательность приближений $\{x_n\}$ сходится к точному решению x^*;

4) Показывается, что шаговая длина на некотором шаге становится равной 1,то есть $\exists k, i \geq k, \beta_i = 1;$

5) Определяется область $D = \bar{S}(x_0, r)$, где сходится рассматриваемый метод;

6) Доказывается сверхлинейность процесса (2) – (3).

Численный эксперимент и его обсуждение

Рассматривается система нелинейных уравнений

$$F = \begin{cases} x_1 + 3|x_2| + x_3^3 - x_4 + p_1, \\ 2|x_1| - 2x_2 + x_3 + x_4 + p_2, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4^2 + p_3, \\ x_1 + 2x_2 + x_3^2 - 3x_4 + p_4; \end{cases}$$

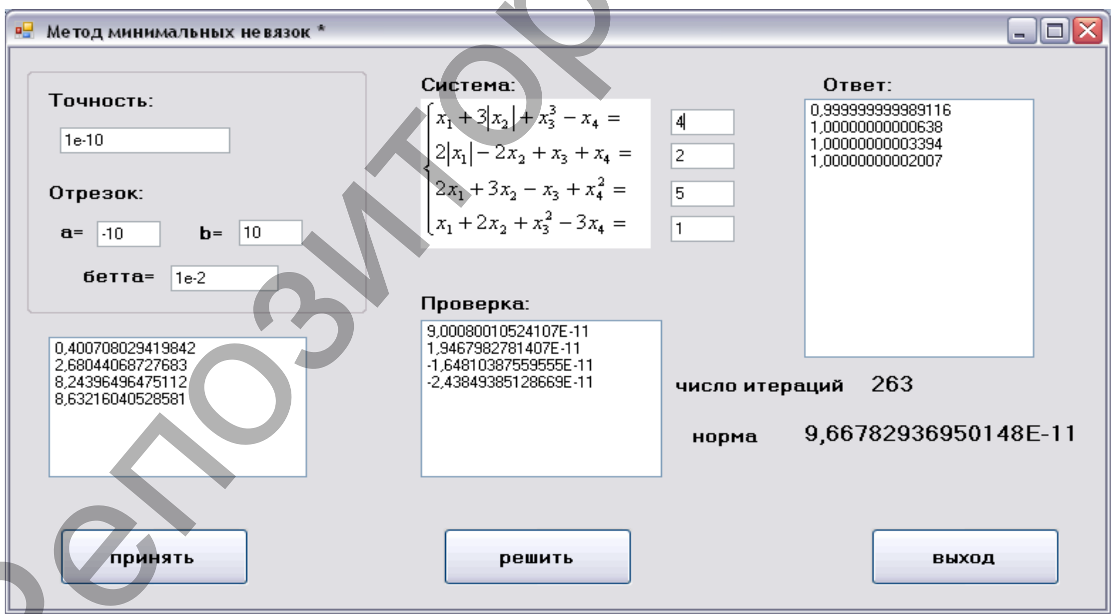
где $F(x) = 0, f(D \in R^m \to R^m)$. Представим эту систему в виде, применимом для решения методом Канторовича-Красносельского:

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 3x_2^2 + x_3^3 - x_4 + p_1 \\ 2x_1^2 - 2x_2 + x_3^{\square} + x_4 + p_2 \\ 2x_1^{\square} + 3x_2 - x_3 + x_4^2 + p_3 \\ x_1^{\square} + 2x_2 + x_3^2 - 3x_4 + p_4 \end{pmatrix};$$

$$g(x) = \begin{pmatrix} 3|x_2| - 3x_2^2 \\ 2|x_1| - 2x_1^2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Система решается методом (2)-(3) с произвольных начальных приближений, где вектор $p = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ выбирается в зависимости от предполагаемого точного решения.

Ниже приводится окно программы:



В результате эксперимента с различными правыми частями *p* (соответственно с различными точными решениями) исследуем эффективность предлагаемого метода.

Результат эксперимента приведен в таблице, точность приближенного решения по норме невязки 1E-10, меняется отрезок [a,b], из которого случайным образом выбираются начальные приближения. Одно из точных решений системы имеет вид:

а) предполагаемое точное решение системы (1) $x^* =$ (1,1,1,1), т.е. вектор *p* примет вид: *p* = (4,2,5,1) б) предполагаемое точное решение системы (1) $x^* =$ (-1,-1,1,1), т.е. вектор *p* примет вид: *p* = (2,6,-5,-5)

Таблица – Связь между начальным приближением и эффективностью итерационного процесса

Количество успешных запусков из 10 в случае / Отрезок [a, b]	а	б
[-1,1]	10	9
[-2,2]	9	8
[-3,3]	9	8
[-4,4]	8	7
[-5,5]	7	6
[-6;6]	7	6
[-10,10]	7	6

Вывод:

Анализ таблицы показывает, что предложенный метод позволяет довольно успешно решать системы нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором и с увеличением промежутка, из которого выбирается начальное приближение, уменьшается эффективность метода при различных вариантах предполагаемого решения.

Список цитированных источников

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.
2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

УДК 519.6+517.983

ОСТАНОВ ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Дерачиц Н.А.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Научный руководитель – Матысик О.В., к. ф.- м. н., доцент

Проблема решения некорректных задач и разработки новых методов их решения весьма актуальна, поскольку такие задачи часто встречаются в многочисленных приложениях математики. Целью данной статьи является исследование неявной итерационной схемы решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода. Для достижения поставленной цели необходимо было разработать итерационный метод, доказать его сходимость в исходной норме гильбертова пространства с использованием правила останова по соседним приближениям.

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода:

$$Ax = y, \qquad (1)$$

где A – оператор положительный, ограниченный, несамосопряжённый.