б) предполагаемое точное решение системы (1) $x^* =$ (-1,-1,1,1), т.е. вектор *p* примет вид: *p* = (2,6,-5,-5)

Таблица – Связь между начальным приближением и эффективностью итерационного процесса

Количество успешных запусков из 10 в случае / Отрезок [a, b]	а	б
[-1,1]	10	9
[-2,2]	9	8
[-3,3]	9	8
[-4,4]	8	7
[-5,5]	7	6
[-6;6]	7	6
[-10,10]	7	6

Вывод:

Анализ таблицы показывает, что предложенный метод позволяет довольно успешно решать системы нелинейных уравнений с недифференцируемым оператором и с увеличением промежутка, из которого выбирается начальное приближение, уменьшается эффективность метода при различных вариантах предполагаемого решения.

Список цитированных источников

1. Приближённое решение операторных уравнений / М.А. Красносельский [и др.]. – Москва: Наука, 1969. – 455 с.

2. Мадорский, В.М. Квазиньютоновские процессы для решения нелинейных уравнений / В.М. Мадорский. – Брест: БрГУ, 2005. – 174 с.

УДК 519.6+517.983

ОСТАНОВ ПО СОСЕДНИМ ПРИБЛИЖЕНИЯМ В МЕТОДЕ ИТЕРАЦИЙ НЕЯВНОГО ТИПА РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНО ПОСТАВЛЕННЫХ ЗАДАЧ

Дерачиц Н.А.

УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест

Научный руководитель – Матысик О.В., к. ф.- м. н., доцент

Проблема решения некорректных задач и разработки новых методов их решения весьма актуальна, поскольку такие задачи часто встречаются в многочисленных приложениях математики. Целью данной статьи является исследование неявной итерационной схемы решения некорректных задач, описываемых операторными уравнениями первого рода. Для достижения поставленной цели необходимо было разработать итерационный метод, доказать его сходимость в исходной норме гильбертова пространства с использованием правила останова по соседним приближениям.

В гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение первого рода:

$$Ax = y, \tag{1}$$

где A – оператор положительный, ограниченный, несамосопряжённый.

Предполагается, что нуль не является собственным значением оператора *A*. Однако нуль принадлежит спектру оператора *A*, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Предположим, что $y \in R(A)$, т.е. при точной правой части *y* уравнение (1) имеет единственное решение *x*. Будем искать его, используя неявный итерационный метод

$$x_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^3\right)^{-1}\left[x_n + \alpha\left(A^*A\right)^2 A^* y\right],\ \ x_0 = 0. \tag{2}$$

В случае, когда правая часть уравнения задана приближённо $\|y - y_\delta\| \le \delta$, метод (2) примет вид

$$z_{n+1} = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^3\right)^{-1}\left[z_n + \alpha\left(A^*A\right)^2 A^* y_\delta\right] + \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^3\right)^{-1} u_n,\ \ z_0 = 0, \tag{3}$$

где u_n – ошибки в вычислении итераций, причём $\|u_n\| \le \beta$.

Обозначим $C = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^3\right)^{-1}$, $B = \left(E + \alpha\left(A^*A\right)^3\right)^{-1}\alpha\left(A^*A\right)^2 A^*$. Тогда метод (3) примет вид

$$z_{n+1} = Cz_n + By_\delta + Cu_n. \tag{4}$$

В том случае, когда истокообразная представимость точного решения ($x = A^s z,\ s > 0$) неизвестна, итерационный метод (3) можно сделать эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по соседним приближениям [1-2]. Зададим уровень останова $\varepsilon > 0$ и момент останова m определим условиями:

$$\|z_n - z_{n+1}\| > \varepsilon, (n < m), \quad \|z_m - z_{m+1}\| \le \varepsilon. \tag{5}$$

Справедливы

Лемма 1. Пусть приближение w_n определяется условиями

$$w_0 = z_0,\ w_{n+1} = Cw_n + By + Cu_n,\ n \ge 0.$$

Тогда справедливо неравенство

$$\sum_{k=0}^{n}\|w_k - w_{k+1} + Cu_k\|^2 \le \|w_0 - x\|^2 + \sum_{k=0}^{n-1}\|Cu_k\|^2.$$

Лемма 2. При $\forall w_0 \in H$ и произвольной последовательности ошибок $\{u_n\}$, удовлетворяющих условию $\|u_n\| \le \beta$, выполнено неравенство

$$\varliminf_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1}\| \le 2\|C\|\beta.$$

Обе леммы используются при доказательстве следующей теоремы.

Теорема. Пусть уровень останова $\varepsilon = \varepsilon(\delta,\beta)$ выбирается как функция от уровней δ и β норм погрешностей $y - y_\delta$ и u_n. Тогда справедливы следующие утверждения:

а) если $\varepsilon(\delta,\beta) > 2\|C\|\beta$, то момент останова m определён при любом начальном приближении $z_0 \in H$ и любых y_δ и u_n, удовлетворяющих условиям $\|y - y_\delta\|, \|u_n\| \le \beta$;

б) если $\varepsilon(\delta,\beta) > \|B\|\delta + 2\|C\|\beta$, то справедлива оценка

$$m \le \frac{\|z_0 - x\|^2}{\left(\varepsilon - \|B\|\delta\right)\left(\varepsilon - \|B\|\delta - 2\|C\|\beta\right)};$$

в) если, кроме того, $\varepsilon(\delta,\beta)\to 0,\ \delta,\beta\to 0$ и $\varepsilon(\delta,\beta)\ge d\left(\|B\|\delta+\|C\|\beta^{p}\right)$, где $d>1,\ p\in(0,1)$, то $\lim\limits_{\delta,\beta\to 0}\|z_m-x\|=0$, т.е. итерационный метод (3) с правилом останова (5) сходится к точному решению операторного уравнения.

Список цитированных источников

1. Емелин, И.В. Правило останова в итерационных процедурах решения некорректных задач / И.В. Емелин, М.А. Красносельский // Автоматика и телемеханика. – 1978. – № 12. – С. 59–63.
2. Матысик, О.В. О регуляризации операторных уравнений в гильбертовом пространстве / О.В. Матысик // Доклады НАН Беларуси. – 2005. – Т. 49, № 3. – С. 38–43.

УДК 519.6+517.983

ПРАВИЛО ОСТАНОВА ПО НЕВЯЗКЕ В НЕЯВНОЙ ИТЕРАЦИОННОЙ ПРОЦЕДУРЕ РЕШЕНИЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ

Дерачиц Н.А.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель – Матысик О.В., к. ф.- м. н., доцент

В действительном гильбертовом пространстве H решается линейное операторное уравнение

$$Ax=y \tag{1}$$

с положительным ограниченным самосопряжённым оператором A, для которого нуль не является собственным значением. Однако предполагается, что нуль принадлежит спектру оператора A, поэтому задача (1) неустойчива и, следовательно, некорректна.

Для решения уравнения (1) предлагается неявная итерационная процедура

$$(E+\alpha A^3)x_{n+1}=x_n+\alpha A^2 y,\ \ x_0=0. \tag{2}$$

Предполагая существование единственного точного решения x уравнения (1) при точной правой части y, ищем его приближение $x_{n,\delta}$ при приближённой правой части y_δ, $\|y-y_\delta\|\le\delta$. В этом случае метод (2) примет вид

$$(E+\alpha A^3)x_{n+1,\delta}=x_{n,\delta}+\alpha A^2 y_\delta,\ \ x_{0,\delta}=0. \tag{3}$$

Ниже, под сходимостью метода (3) понимается утверждение о том, что приближения (3) сколь угодно близко подходят к точному решению *x* уравнения (1) при подходящем выборе *n* и достаточно малых δ, т.е. $\lim\limits_{\delta\to 0}\left(\inf\limits_{n}\|x-x_{n,\delta}\|\right)=0$.

Этот метод можно сделать вполне эффективным, если воспользоваться следующим правилом останова по невязке, аналогичным [1–2]. Зададим уровень останова $\varepsilon>0$ и определим момент *m* останова условиями:

$$\|Ax_{n,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon,\ (n<m),\ \|Ax_{m,\delta}-y_\delta\|\le\varepsilon,\ \varepsilon=b\delta,\ b>1. \tag{4}$$

Предполагается, что при начальном приближении $x_{0,\delta}$ невязка достаточно велика, больше уровня останова ε, т.е. $\|Ax_{0,\delta}-y_\delta\|>\varepsilon.$